УДК 517.944

А. С. Галицын, В. Б. Мосеенков

Об однозначной разрешимости в целом осесимметричной задачи конвекции вязкой термически неоднородной жидкости

1. Если вязкая механически несжимаемая жидкость заполняет полость $\Pi_1 \times [0, 2\pi]$ в твердом теле $\Pi_2 \times [0, 2\pi]$, где $\Pi_1 = \{r, z \mid 0 < \delta < r < 1, h_1 < z < h_2\}$, $\Pi_2 = \{r, z \mid 0 \leqslant r < R_1, \quad H_1 < z < H_2\}$, $R_1 > 1$, $[h_1, h_2] \subset \subset (H_1, H_2)$, то конвективный теплообмен в ней описывается, как известно [1 — 4], системой уравнений

$$D\psi_t - r\partial(\psi, r^{-2}D\psi) - D_\nu(D\psi) = r\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\rho}\right)_r + \nabla\cdot\Phi(\psi) + F_1\right],$$

$$\rho c_p \tau_t - r^{-1}\partial(\psi, \tau) - \operatorname{div}(\varkappa\nabla\tau) = \varepsilon_1\rho\nu F(\psi) + F_2,$$

где t — время, (r, φ, z) —цилиндрические координаты (все функции в системе в силу осевой симметрии не зависят от угла $\varphi \in [0, 2\pi]$ и вместе с независимыми переменными являются безразмерными [4]); ψ — функция тока, τ — разность между абсолютной температурой и постоянной, поддерживаемой на внешней границе $\partial\Pi_2 = \overline{\Pi}_2 \setminus \Pi_2$ твердого тела;

$$D\psi = r\left(\frac{\psi_r}{r}\right)_r + \psi_{zz}, \quad D_\nu\varphi = r\left[\left(\nu\,\frac{\varphi_r}{r}\right)_r + \left(\nu\,\frac{\varphi_z}{r}\right)_z\right], \quad \partial(\psi, \varphi) = \psi_r\varphi_z -$$

$$- \psi_z\varphi_r, \quad F(\psi) = 2\left\{\left[\left(\frac{\psi_z}{r}\right)_r\right]^2 + \left(\frac{\psi_z}{r^2}\right) + \left(\frac{\psi_{rz}}{r}\right)^2\right\} + \left[\left(\frac{\psi_z}{r}\right)_z - \left(\frac{\psi_r}{r}\right)_r\right]^2,$$

$$\mathbf{\Phi}(\psi)=\frac{1}{\rho}\left\{2(\rho\nu)_z\left(\frac{\psi_r}{r}\right)_z+(\rho\nu)_r\left[\left(\frac{\psi_r}{r}\right)_r-\left(\frac{\psi_z}{r}\right)_z\right],\quad 2(\rho\nu)_r\left(\frac{\psi_z}{r}\right)_r-\right.$$

$$\left.-(\rho\nu)_z\left[\left(\frac{\psi_r}{r}\right)_r-\left(\frac{\psi_z}{r}\right)_z\right]\right\},\quad \nabla\cdot\mathbf{u}=\operatorname{div}\mathbf{u}=r^{-1}[(ru^r)_r+(ru^z)_z],$$

$$\mathbf{u}=(u^r,u^z),\ \nabla\varphi=(\varphi_r,\varphi_z);$$

ρ — плотность; ν — кинематическая вязкость; c_p — удельная теплоемкость в изобарном процессе; $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности; ε, ε_1 — малые положительные безразмерные параметры, выражающиеся через известные характерные теплофизические величины [4]; F_1 и F_2 — известные функции, характеризующие объемные силы, излучение и т. д.

Эти уравнения выводятся из общих уравнений термоконвекции вязкой жидкости, как и соответствующие уравнения в [2, 4]. При этом предполагается, что давление p отличается от гидростатического давления p_0 слагаемым, зависящим лишь от τ.

Термически неоднородной жидкостью будем называть жидкость, теплофизические и реологические параметры которой зависят лишь от температуры τ. Анализ теплофизических свойств реальных жидкостей позволяет уточнить это определение следующим образом: все указанные параметры строго положительны и медленно меняются с температурой τ, т. е. являются функциями, зависящими от $\varepsilon\tau$; $\rho(\varepsilon\tau)$ — монотонно убывающая, а $c_p(\varepsilon\tau)$— монотонно возрастающая функция; функция $\varkappa$ медленно меняется с градиентом температуры, т. е. $\varkappa=\varkappa(\varepsilon\tau,\varepsilon\nabla\tau)$. Свойства монотонности ρ и c_p дают основание полагать, что $\rho(\varepsilon\tau)\,c_p(\varepsilon\tau)-1$ есть малая медленно меняющаяся функция (вида $\varepsilon u(\varepsilon\tau)$).

Таким образом, если пренебречь малыми слагаемыми порядка ε и ε_1, получим систему

$$D\psi_t-r\partial(\psi,r^{-2}D\psi)-D_\nu(D\psi)=r\left[\frac{1}{\varepsilon}(\mathcal{P}(\varepsilon\tau))_r+F_1\right],\quad (r,z,t)\in\Pi_1^T,\tag{1}$$

$$\sigma\tau_t-r^{-1}\partial(\psi,\tau)-\operatorname{div}[\varkappa(\varepsilon\tau,\varepsilon\nabla\tau)\nabla\tau]=F_2,\quad (r,z,t)\in(\Pi_1\cup(\Pi_2\setminus\overline{\Pi}_1))^T,\tag{2}$$

где $\mathcal{P}(\xi)\equiv\rho^{-1}(\xi)$, $\Pi_{t_1}^{t_2}\equiv\Pi\times[t_1,t_2)$, $\Pi^t\equiv\Pi_0^t$; $\sigma=\sigma'=1$, $\varkappa=\varkappa'(\varepsilon\tau,\varepsilon\nabla\tau)$, если $(r,z)\in\Pi_1$; $\sigma=\sigma''\neq 1$, $\varkappa=\varkappa''$, если $(r,z)\in\Pi_2\setminus\overline{\Pi}_1$ (σ'', $\varkappa''$ — постоянные положительные параметры, характеризующие твердое тело); $\nu=\nu(\varepsilon\tau)$, $\varkappa=\varkappa(\varepsilon\tau,\varepsilon\nabla\tau)$ и $\mathcal{P}=\mathcal{P}(\varepsilon\tau)$ непрерывны и обладают следующими свойствами:

1) $0<\nu_0\leqslant\nu(\xi)\leqslant\nu_1$, $|\dot\nu(\xi)|\leqslant\nu_2$;
2) $\varkappa_0(1+|\eta|^{2\gamma})\leqslant\varkappa(\xi,\eta)\leqslant\varkappa_1(1+|\eta|^{2\gamma})$, $\quad\gamma\geqslant 0$;
3) $[\varkappa(\xi,\varepsilon\eta_1)\eta_1-\varkappa(\xi,\varepsilon\eta)\eta](\eta_1-\eta)\geqslant\varkappa_2|\eta_1-\eta|^2$;
4) $|\varkappa(\xi_1,\varepsilon\eta)-\varkappa(\xi,\varepsilon\eta)|\leqslant\varkappa_3|\xi_1-\xi|$;
5) $0<\mathcal{P}_0\leqslant\mathcal{P}(\xi)$, $\mathcal{P}(0)=1$;
6) $|\mathcal{P}(\xi)-\mathcal{P}(\xi_1)|\leqslant\mathcal{P}_1(1+|\xi|^{\gamma_1}+|\xi_1|^{\gamma_1})|\xi-\xi_1|$, $1\leqslant\gamma_1\leqslant 2\gamma+1$ для

всяких ξ,ξ_1 из R^1 и η,η_1 из R^3 ($\dot\nu(\xi)$ есть обычная производная функции $\nu(\xi)$, $\eta_i,\varkappa_i,\mathcal{P}_i$ — положительные константы).

Для уравнений (1), (2) будем рассматривать начально-краевую задачу

$$\psi|_{t=0}=\psi_0(r,z),\quad \tau|_{t=0}=\tau_0(r,z),\tag{3}$$

$$\psi|_{\partial\Pi_1^T}=D\psi|_{\partial\Pi_1^T}=0,\tag{4}$$

$$[\tau]_{\partial\Pi_1^T}=[\varkappa(\mathbf{n}\cdot\nabla\tau)]_{\partial\Pi_1^T}=0,\quad \tau''|_{\partial\Pi_2^T}=0,\tag{5}$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к $\partial\Pi_1=\overline{\Pi}_1\setminus\Pi_1$, $[\tau]_{\partial\Pi_1^T}$ — скачок функции τ, заданной на $[\Pi_1 \cup (\Pi_2 \setminus \overline{\Pi}_1)]^T$, равный $(\tau' - \tau'')|_{\partial\Pi_1^T}$ $(\partial\Pi_1^T \equiv \partial\Pi_1 \times [0, T)$; $\tau'(\tau'')$ — сужение функции τ, заданной в Π_2^T, на Π_1^T $((\Pi_2 \setminus \overline{\Pi}_1)^T)$.

Следуя [1—4], введем функциональные пространства, необходимые для определения понятия обобщенного решения задачи (1)—(5). Пусть $L_p(\Pi)$ — банахово пространство с нормой

$$\|\varphi\|_{p,\Pi} = \Big(\int_{\Pi} |\varphi|^p r dr dz\Big)^{1/p} \Big(\|\varphi\|_{2,\Pi} \equiv \|\varphi\|_{\Pi}, \|\varphi\|^2_{\Pi_2} = \int_{\Pi_2} \sigma |\varphi|^2 r dr dz\Big),$$

$W_{2,0}^{(1)}(\Pi_1)$, $W_{2,0}^{(1)}(\Pi_2)$, $W_{2,0}^{(2)}(\Pi_1)$, $W_{2,0}^{(3)}(\Pi_1)$ — гильбертовы пространства функций $\varphi(r, z)$, удовлетворяющих граничным условиям (4), (5), со скалярными произведениями

$$(\varphi, \psi)_{(1),\Pi_1} = \int_{\Pi_1} (\nabla\varphi \cdot \nabla\psi) r dr dz, \quad (\tau, \vartheta)_{(1),\Pi_2} = \int_{\Pi_2} \overline{\varkappa} (\nabla\tau \cdot \nabla\vartheta) r dr dz$$

$$\overline{\varkappa} = \min\{\varkappa_0, \varkappa_2, \varkappa''\},$$

$$(\varphi, \psi)_{(2),\Pi_1} = \int_{\Pi_1} \frac{D\varphi}{r^2} \frac{D\psi}{r^2} r dr dz, \quad (\varphi, \psi)_{(3),\Pi_1} = \Big(\frac{D\varphi}{r^2}, \frac{D\psi}{r^2}\Big)_{(1),\Pi_1}$$

и соответствующими нормами $\|\cdot\|_{(1),\Pi_2}$, $\|\cdot\|_{(i),\Pi_1}$, $i = \overline{1, 3}$.

Обозначим через $L_{p,q}(\Pi^T)$ $(L_{p,p} \equiv L_p)$ банахово пространство функций $\psi(r, z, t)$, оснащенное нормой

$$\|\psi\|_{p,q,\Pi^T} = \Big(\int_0^T \|\psi\|^q_{p,\Pi} dt\Big)^{1/q} (\|\cdot\|_{p,p,\Pi^T} \equiv \|\cdot\|_{p,\Pi^T}, \|\cdot\|_{p,\frac{2p}{3p-2}} \equiv |||\cdot|||_{p,\Pi^T}),$$

а через $V_{2+2\gamma,0}^{1,0}(\Pi_i^T)$, $V_{2,0}^{2,0}(\Pi_1^T)$, $V_{2,0}^{3,0}(\Pi_1^T)$—банаховы пространства распределений $C^0(0, T; L_2(\Pi_i)) \cap L_{2+2\gamma}(0, T; W_{2+2\gamma,0}^{(1)}(\Pi_i))$, $C^0(0, T; W_{2,0}^{(1)}(\Pi_1)) \cap L_2(0, T; W_{2,0}^{(2)}(\Pi_1))$, $C^0(0, T; W_{2,0}^{(2)}(\Pi_1)) \cap L_2(0, T; W_{2,0}^{(3)}(\Pi_1))$, снабженные нормами

$$|u|_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_i^T)} = (\sup_{0\le t\le T} \|u\|^2_{\Pi_i} + \|u\|^2_{(1),\Pi_i^T})^{1/2} + \varepsilon^{\gamma/(\gamma+1)} \| \, |\nabla u| \, \|_{2+2\gamma}, \ \Pi_i^T \ i=1, 2,$$

$$|\psi|_{V_{2,0}^{2,0}(\Pi_1^T)} = \Big(\sup_{0\le t\le T} \Big\| \frac{|\nabla\psi|}{r} \Big\|^2_{\Pi_1} + \Big\| \frac{D\psi}{r} \Big\|^2_{\Pi_1^T}\Big)^{1/2},$$

$$|\psi|_{V_{2,0}^{3,0}(\Pi_1^T)} = (\sup_{0\le t\le T} \|\psi\|^2_{(2),\Pi_1} + \|\psi\|^2_{(3),\Pi_1^T})^{1/2}$$

(здесь $\|\cdot\|_{(i),\Pi_j^T}$ — норма в $L_2(0, T; W_{2,0}^{(i)}(\Pi_j^T)$, $j = 1, 2)$.

Обобщенным решением задачи (1) — (5) будем называть пару функций $\psi \in V_{2,0}^{3,0}(\Pi_1^T)$, $\tau \in V_{2+2\gamma,0}^{1,0}(\Pi_2^T)$, удовлетворяющих интегральным тождествам

$$\int_{\Pi_1} r^{-1}\varphi D\psi dr dz \Big|_{t=0}^{t=t_1} + \int_{\Pi_1^{t_1}} [-r^{-1}\varphi_t D\psi - \partial(\psi, r^{-2}D\psi)\varphi + r^{-1}\nu(\varepsilon\tau)(\nabla D\psi \cdot \nabla\varphi) \times$$

$$\times dr dz dt = \int_{\Pi_1^{t_1}} [\varepsilon^{-1}\mathscr{P}(\varepsilon\tau)\varphi_r + F_1] dr dz dt, \tag{6}$$

$$\int_{\Pi_2} \sigma\tau\vartheta r dr dz \Big|_{t=0}^{t=t_1} + \int_{\Pi_2^{t_1}} \{-\sigma[\tau\vartheta_t + r^{-1}\partial(\psi, \tau)\vartheta] + \varkappa(\varepsilon\tau, \varepsilon\nabla\tau)(\nabla\tau \cdot \nabla\vartheta)\} \times$$

$$\times r dr dz dt = \int_{\Pi_2^{t_1}} \vartheta F_2 r dr dz dt \tag{7}$$

для всяких $\varphi \in \{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_1^T) \mid \varphi_t \in L_2(\Pi_1^T)\}$, $\vartheta \in \{V_{2+2\gamma,0}^{1,0}(\Pi_2^T) \mid \vartheta_t \in L_2(\Pi_2^T)\}$ и всех t_1

из $[0, T]$. Это определение корректно, как и соответствующие определения в [1 — 4], если $\varphi_0 \in W^{(2)}_{2,0}(\Pi_1)$, $\tau_0 \in L_2(\Pi_2)$, $F_i \in L_{p,\frac{2p}{3p-2}}(\Pi_i^T)$, $1 < p \leqslant 2$, $i = 1, 2$.

Для отыскания обобщенного решения задачи (1) — (5) построим итерационный процесс $(\psi^1, \tau^1), (\psi^2, \tau^2), \ldots$, в котором $(\psi^{n+1}, \tau^{n+1}$, есть обобщенное решение задачи

$$D\psi_t - r\partial(\psi, r^{-2}D\psi) - D_{\nu_n}D\psi = r\,[\varepsilon^{-1}(\mathcal{P}(\varepsilon\tau))_r + F_1], \tag{8}$$

$$\sigma\tau_t - r^{-1}\partial(\psi, \tau) - \operatorname{div}[\varkappa_n(\varepsilon\tau^n, \varepsilon\nabla\tau)\nabla\tau] = F_2, \tag{9}$$

$$\nu_n = \nu(\varepsilon\tau^n), \quad \nu_0 = \nu(0), \quad \varkappa_0 = \varkappa_0(0, \varepsilon\nabla\tau^1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

удовлетворяющее начально-краевым условиям (3)—(5).

2. В связи с тем, что на каждом шаге итерационного процесса (8), (9) решается задача вида

$$D\psi_t - r\partial(\psi, \tau^{-2}D\psi) - D_\nu D_\psi = r\,[\varepsilon^{-1}(\mathcal{P}(\varepsilon\tau))_r + F_1], \tag{10}$$

$$\sigma\tau_t - r^{-1}\partial(\psi, \tau) - \operatorname{div}[\varkappa(r, z, t, \varepsilon\nabla\tau)\nabla\tau] = F_2 \tag{11}$$

с начально-краевыми условиями (3)—(5), возникает необходимость исследования ее однозначной разрешимости в целом (здесь $\nu = \nu(r, z, t)$ и $\varkappa = \varkappa(r, z, t, \cdot)$ — известные функции).

Теорема 1. *Если* $(\psi_0, \tau_0) \in W^{(2)}_{2,0}(\Pi_1) \times L_2(\Pi_2)$, $F_i \in L_{p,\frac{2p}{3p-2}}(\Pi_i^T)$, $1 < p \leqslant 2$, $i = 1, 2$, *функции* $\varkappa$ *и* $\mathcal{P}$ *удовлетворяют условиям* 2, 3, 5, 6, *а* ν — *условиям* $0 < \nu_0 \leqslant \nu(r, z, t) \leqslant \nu_1$, $r, z, t \in \Pi_1^T$, $M_\nu \equiv \bar{\nu} - c_0\|\nu_r\|_{\Pi_1^T} > 0$, $\bar{\nu} = \min\{\nu_0, 1\}$, *то задача* (3) — (5), (10), (11) *имеет единственное обобщенное решение* (ψ, τ), *удовлетворяющее равенствам*

$$\int\limits_{\Pi_1}\left|\frac{\nabla\psi}{r}\right|^2 rdrdz\,\Big|_{t=0}^{t=t_1} + \int\limits_{\Pi_1^{t_1}}\nu\left|\frac{D\psi}{r^2}\right|^2 rdrdzdt = \int\limits_{\Pi_1^{t_1}}\Big[-\frac{D\psi}{r}(\nabla\psi\cdot\nabla\nu) + \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{P}(\varepsilon\tau)\,\psi_r + \psi F_1\Big]drdzdt, \tag{12}$$

$$\int\limits_{\Pi_1}\left|\frac{D\psi}{r^2}\right|^2 rdrdz\,\Big|_{t=0}^{t=t_1} + \int\limits_{\Pi_1^{t_1}}\nu\left|\nabla\left(\frac{D\psi}{r^2}\right)\right|^2 rdrdzdt = \int\limits_{\Pi_1^{t_1}}\Big[\nu_r\left|\frac{D\psi}{r^2}\right|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{P}(\varepsilon\tau)\times \left(\frac{D\psi}{r^2}\right)_r + \frac{D\psi}{r^2}F_1\Big]drdzdt, \tag{13}$$

$$\int\limits_{\Pi_2}\sigma\tau^2 rdrdz\,\Big|_{t=0}^{t=t_1} + \int\limits_{\Pi_2^{t_1}}\varkappa|\nabla\tau|^2 rdrdzdt = \int\limits_{\Pi_2^{t_1}}\tau F_2 rdrdzdt \tag{14}$$

для всякого t_1 *из* $[0, T]$ *и неравенствам*

$$|\tau|^2_{V^{1,0}_{2,0}(\Pi_2^T)} + \varepsilon^{2\gamma}\,\||\nabla\tau|\|^{2+2\gamma}_{2+2\gamma,\Pi_1^T} \leqslant c_1(\|\tau_0\|^2_{\Pi_2} + \||F_2\||^2_{p,\Pi_2^T}) \equiv M_1(\tau_0, F_2), \tag{15}$$

$$|\psi|^2_{V^{2,0}_{2,0}(\Pi_1^T)} \leqslant c_2 M_\nu^{-2}\left[\left\|\frac{|\nabla\psi_0|}{r}\right\|^2_{\Pi_1} + \||F_1\||^2_{p,\Pi_1^T} + M_1(1 + \varepsilon^{\gamma_1+1}M_1^{\gamma_1}) \equiv \equiv M_\nu^{-2}M_2(\psi_0, \tau_0, F_1, F_2),\right. \tag{16}$$

$$|\psi|^2_{V^{3,0}_{2,0}(\Pi_1^T)} \leqslant c_3 M_\nu^{-2}\,[\|\psi_0\|^2_{(2),\Pi_1} + \||F_1\||^2_{p,\Pi_1^T} + M_1(1 + \varepsilon^{\gamma_1+1}M_1^{\gamma_1})] \equiv \equiv M_\nu^{-2}M_3(\psi_0, \tau_0, F_1, F_2), \tag{17}$$

где c_i, $i = 0, 1, 2, 3$, — *константы, зависящие лишь от* Π_1, Π_2, δ *и* p.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку доказательство этой теоремы во многом повторяет доказательство аналогичных теорем из [1—4] и основывается на априорных оценках, которые выводятся из соотношений типа па (12)—(14), покажем лишь как получить оценки (15)—(17) из (12)—(14) и оценить разность двух обобщенных решений.

В силу неравенства

$$\|u\|_{\frac{p}{p-1},\frac{2p(m-1)}{2-p},\Pi^T} \leqslant c^{(p,m,\gamma)}\varepsilon^{-\frac{(m-2)(2-p)}{2p(m-1)}}[|u|_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi^T)} + \varepsilon^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}\||\nabla u|\|_{2+2\gamma,\Pi^T}], \tag{18}$$

справедливого для всякой функции $u\in\{V_{2,0}^{1,0}(\Pi^T)\,|\,\nabla u|\in L_{2+2\gamma}(\Pi^T)\}$ и $p\in(1,2]$ (это неравенство при $m\in[2,2+2\gamma]$, $\gamma\geqslant 0$ обобщает неравенство (2.3) из [4]), и свойств функций $\nu(r,z,t)$, $\varkappa(r,z,t,\eta)$, $\mathcal{P}(\xi)$ из соотношений (13), (14) получим

$$|\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_2^T)} + \varepsilon^{2\gamma}\||\nabla\tau|\|^{2+2\gamma}_{2+2\gamma,\Pi_2^T} \leqslant c_1(\|\tau_0\|^2_{\Pi_2} + \|\|F_2\|\|^2_{p,\Pi_2^T}),$$

$$\bar{\nu}|\psi|^2_{V_{2,0}^{3,0}(\Pi_1^t)} \leqslant \bar{\nu}\|\psi_0\|^2_{(2),\Pi_1} + \tilde{c}\|\nu_r\|_{\Pi_1^T}\left\|\frac{D\psi}{r^2}\right\|^2_{4,\Pi_1^t} + c_4\|\|F_1\|\|_{p,\Pi_1^T}\times$$

$$\times|\psi|_{V_{2,0}^{3,0}(\Pi_1^T)} + \left|\int\limits_{\Pi_1^t}\frac{1}{\varepsilon}[\mathcal{P}(\varepsilon\tau)-1]\left(\frac{D\psi}{r^2}\right)_r drdzdt\right| \leqslant \bar{\nu}\|\psi_0\|^2_{(2),\Pi_1} +$$

$$+ c\|\nu_r\|_{\Pi_1^T}|\psi|^2_{V_{2,0}^{3,0}(\Pi_1^t)} + c_4\|\|F_1\|\|_{p,\Pi_1^T}|\psi|_{V_{2,0}^{3,0}(\Pi_1^t)} + c_5|\tau|_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_2^T)}|\psi|_{V_{2,0}^{3,0}(\Pi_1^t)} +$$

$$+ c_6\varepsilon^{\gamma_1}\|\tau\|^{\gamma_1+1}_{2(\gamma_1+1),\Pi_2^T}|\psi|_{V_{2,0}^{3,0}(\Pi_1^t)} \leqslant \bar{\nu}\|\psi_0\|^2_{(2),\Pi_1} + C\|\nu_r\|_{\Pi_1^T}|\psi|^2_{V_{2,0}^{3,0}(\Pi_1^t)} +$$

$$+ \frac{1}{2}M_\nu|\psi|^2_{V_{2,0}^{3,0}(\Pi_1^t)} + M_\nu^{-1}c_7\{\|\|F_1\|\|^2_{p,\Pi_1^T} + |\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_2^T)} + \varepsilon^{\gamma_1+1}[|\tau|^{2(\gamma_1+1)}_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_2^T)} +$$

$$+ \varepsilon^{\frac{2\gamma(\gamma_1+1)}{\gamma+1}}\||\nabla\tau|\|^{2(\gamma_1+1)}_{2+2\gamma,\Pi_2^T}]\},$$

откуда следуют оценки (15), (17). Неравенство (16) доказывается аналогично.

Если $(\psi^{(1)},\tau^{(1)})$, $(\psi^{(2)},\tau^{(2)})$ суть два обобщенных решения задачи (3)—(5), (10), (11), то для $\psi=\psi^{(1)}-\psi^{(2)}$, $\tau=\tau^{(1)}-\tau^{(2)}$ использовав свойства 3, 5, 6 и неравенство (18), легко получить оценки

$$|\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_{2,t_1}^{t_2})} \leqslant \|\tau\|^2_{\Pi_2}\big|_{t=t_1} + \left|\int\limits_{\Pi_{1,t_1}^{t_2}}\tau\partial(\psi,\tau^{(1)})\,drdzdt\right| \leqslant \|\tau\|^2_{\Pi_2}\Big|_{t=t_1} +$$

$$+ c_8\|\tau^{(1)}\|_{(1),\Pi_{2,t_1}^{t_2}}(|\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_{2,t_1}^{t_2})} + |\psi|^2_{V_{2,0}^{2,0}(\Pi_{1,t_1}^{t_2})}),$$

$$M_\nu|\psi|^2_{V_{2,0}^{2,0}(\Pi_{1,t_1}^{t_2})} \leqslant \bar{\nu}\left\|\frac{|\nabla\psi|}{r}\right\|^2\Bigg|_{t=t_1} + \left|\int\limits_{\Pi_{1,t_1}^{t_2}}\psi\partial(\psi^{(2)},r^{-2}D\psi)\,drdzdt\right| +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}\left|\int\limits_{\Pi_{1,t_1}^{t_2}}\psi_r[\mathcal{P}(\varepsilon\tau^{(1)}) - \mathcal{P}(\varepsilon\tau^{(2)})]\,drdzdt\right| \leqslant \bar{\nu}\left\|\frac{|\nabla\psi|}{r}\right\|^2\Bigg|_{t=t_1} +$$

$$+ c_9\|\psi^{(2)}\|_{(2),\Pi_{1,t_1}^{t_2}}|\psi|^2_{V_{2,0}^{2,0}(\Pi_{1,t_1}^{t_2})} + c_{10}M_\nu^{-1}|\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_{2,t_1}^{t_2})} + \frac{1}{2}M_\nu|\psi|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_{1,t_1}^{t_2})}) +$$

$$+ c_{11}M_\nu^{-1}\varepsilon^{2\gamma_1}(\|\tau^{(1)}\|^{2\gamma_1}_{2\gamma_1,\Pi_{2,t_1}^{t_2}} + \|\tau^{(2)}\|^{2\gamma_1}_{2\gamma_1,\Pi_{2,t_1}^{t_2}})|\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_{2,t_1}^{t_2})},\quad t_1,t_2\in[0,T],$$

из которых следует единственность обобщенного решения задачи (3)—(5), (10), (11).

Сильная сходимость (ψ, τ) к (ψ_0, τ_0) в $W_{2,0}^{(2)}(\Pi_1^T) \times L_2(\Pi_2^T)$ при $t \to +0$ доказывается аналогично [4].

3. Итак, если $M_\varepsilon \equiv \bar{\nu} - \varepsilon C M_1(\tau_0, F_2) > 0$, $C = c_0 \nu_r / \bar{\varkappa}$, то в силу теоремы 1 существует единственное обобщенное решение (ψ^{n+1}, τ^{n+1}) задачи (3) — (5), (8), (9) и для него справедливы неравенства

$$|\tau^{n+1}|^2_{V^{1,0}_{2,0}(\Pi_2^T)} + \varepsilon^{2\gamma} \| |\nabla \tau^{n+1}| \|^{2+2\gamma}_{2+2\gamma, \Pi_2^T} \leqslant M_1(\tau_0, F_2), \tag{19}$$

$$|\psi^{n+1}|^2_{V^{2,0}_{2,0}(\Pi_1^T)} \leqslant M_\varepsilon^{-2} M_2(\psi_0, \tau_0, F_1, F_2), \ |\psi^{n+1}|^2_{V^{3,0}_{2,0}(\Pi_1^T)} \leqslant M_\varepsilon^{-2} M_3(\psi_0, \tau_0, F_1, F_2), \tag{20}$$

т. е. последовательность (ψ^n, τ^n) ограничена и, следовательно, слабо сходится в $L_2(0, T; W_{2,0}^{(3)}(\Pi_1)) \times L_2(0, T; W_{2,0}^{(1)}(\Pi_2))$.

Покажем теперь, что (ψ^n, τ^n) сильно сходится в $V_{2,0}^{2,0}(\Pi_1^T)\, V_{2,0}^{1,0}(\Pi_2^T)$. Действительно, согласно теореме 1 функции $\psi = \psi^{n+1} - \psi^n$, $\tau = \tau^{n+1} - \tau^n$ удовлетворяют равенствам

$$\int\limits_{\Pi_1} \left| \frac{\nabla \psi}{r} \right|^2 r dr dz \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \int\limits_{\Pi^{t_2}_{1,t_1}} \nu_n \left| \frac{D\psi}{r} \right|^2 r dr dz dt = \int\limits_{\Pi^{t_2}_{1,t_1}} \Big[- \frac{D\psi}{r} \nabla \psi \cdot \nabla \nu_n +$$

$$+ \partial(\psi^n, r^{-2} D\psi)\psi + \frac{\nu_n - \nu_{n-1}}{r} (\nabla D\psi^n \cdot \nabla \psi) + \frac{1}{\varepsilon} (\mathcal{P}_{n+1} - \mathcal{P}_n) \Big] dr dz dt, \tag{21}$$

$$\int\limits_{\Pi_2} \sigma |\tau|^2 r dr dz \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \int\limits_{\Pi^{t_2}_{2,t_1}} [\varkappa(\varepsilon\tau^n, \varepsilon\tau^{n+1}) \nabla \tau^{n+1} - \varkappa(\varepsilon\tau^n, \varepsilon\nabla\tau^n) \nabla \tau r dr dz dt =$$

$$= \int\limits_{\Pi^{t_2}_{2,t_1}} \Big\{ [\varkappa(\varepsilon\tau^{n-1}, \varepsilon\nabla\tau^n) - \varkappa(\varepsilon\tau^n, \varepsilon\nabla\tau^n)] (\nabla\tau^n \cdot \nabla\tau) + \frac{\tau}{r} \partial(\psi, \tau^{n+1}) \Big\} r dr dz dt \tag{22}$$

для всяких t_1, t_2 из $[0, T]$ (здесь $\nu_n = \nu(\varepsilon\tau_n)$, $\mathcal{P}_n = (\varepsilon\tau_n)$). Эти равенства выводятся аналогично (12) — (14).

Оценивая правые части (21), (22), в силу свойств 1 — 6 и неравенств (18) — (20) при условии, что $\gamma \geqslant 1$, получаем

$$M_\varepsilon |\psi|^2_{V^{2,0}_{2,0}} \leqslant \bar{\nu} \left\| \frac{|\nabla\psi|}{r} \right\|^2_{\Pi_1} \Big|_{t=t_1} + \varepsilon \|\psi^n\|_{(3), \Pi^{t_2}_{1,t_1}} \| |\nabla\psi| \|_{(4), \Pi^{t_2}_{1,t_1}} \times$$

$$\times \|\tau^n - \tau^{n-1}\|_{(4), \Pi^{t_2}_{1,t_1}} + c_{13} \|\tau\|_{\Pi^{t_2}_{2,t_1}} \| |\nabla\psi| \|_{\Pi^{t_2}_{1,t_1}} + \varepsilon^{\gamma_1} c_{14} \|\tau\|_{(4), \Pi^{t_2}_{2,t_1}} \times$$

$$\times \| |\nabla\psi| \|_{(4), \Pi^{t_2}_{2,t_1}} (\|\tau^{n+1}\|^{\gamma_1}_{2\gamma_1, \Pi^{t_2}_{1,t_1}} + \|\tau^n\|^{\gamma_1}_{2\gamma_1, \Pi^{t_2}_{1,t_1}}) + c_{15} \left\| \frac{D\psi}{r} \right\|_{\Pi^{t_2}_{1,t_1}} \times$$

$$\times \| |\nabla\psi^n| \|_{(4), \Pi^{t_2}_{1,t_1}} \| |\nabla\psi| \|_{(4), \Pi^{t_2}_{1,t_1}} \leqslant \bar{\nu} \left\| \frac{|\nabla\psi|}{r} \right\|^2_{\Pi_1} \Big|_{t=t_1} + c_{16} (\|\psi^n\|^2_{(3), \Pi^{t_2}_{1,t_1}} +$$

$$+ \|\psi^n\|_{(3), \Pi^{t_2}_{1,t_1}}) \left\| \frac{D\psi}{r} \right\|^2_{\Pi^{t_2}_{1,t_1}} + \frac{1}{4} M_\varepsilon |\psi|^2_{V^{2,0}_{2,0}(\Pi^{t_2}_{1,t_1})} + c_{17} M_\varepsilon^{-1} |\tau|^2_{V^{1,0}_{2,0}(\Pi^{t_2}_{2,t_1})} +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{12} |\tau^n - \tau^{n-1}|_{V^{1,0}_{2,0}(\Pi^{t_2}_{2,t_1})},$$

$$|\tau|^2_{V^{1,0}_{2,0}(\Pi^{t_2}_{2,t_1})} \leqslant \|\tau\|^2_{\Pi_2} \Big|_{t=t_1} + \varepsilon c_{18} \|\tau^n - \tau^{n-1}\|_{(4), \Pi^{t_2}_{2,t_1}} \| |\nabla\tau| \|_{\Pi^{t_2}_{2,t_1}} \times$$

$$\times \| |\nabla\tau^n| \|_{4,\Pi_{1,t_1}^{t_2}} + c_{19} \| |\nabla\psi| \|_{4,\Pi_{2,t_1}^{t_2}} \| |\nabla\tau^{n+1}| \|_{\Pi_{2,t_1}^{t_2}} \|\tau\|_{(4),\Pi_{2,t_1}^{t_2}} \leqslant \|\tau\|_{\Pi_2}|_{t=t_1} +$$

$$+ \varepsilon c_{20} M_\varepsilon^{-1} \|\tau^n\|_{(1),\Pi_{2,t_1}^{t_2}}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \| |\nabla\tau^n| \|_{2+2\gamma,\Pi_{1,t_1}^{t_2}}^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \|\tau\|^2_{(1),\Pi_{2,t_1}^{t_2}} +$$

$$+ \frac{M_\varepsilon}{4(c_{17}M_\varepsilon^{-1} - 1)} |\psi|^2_{V_{2,0}^{2,0}(\Pi_{1,t_1}^{t_2})} + c_{21} M_\varepsilon^{-2} \|\tau^{n+1}\|^2_{(1),\Pi_{2,t_1}^{t_2}} \|\tau\|^2_{(1),\Pi_{2,t_1}^{t_2}} +$$

$$+ \frac{\varepsilon M_\varepsilon}{12 c_{17}} |\tau^n - \tau^{n-1}|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_{2,t_1}^{t_2})},$$

откуда

$$\frac{1}{2} M_\varepsilon [|\psi|^2_{V_{2,0}^{2,0}(\Pi_{1,t_1}^{t_2})} + |\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_{2,t_1}^{t_2})}] \leqslant c_{22} M_\varepsilon^{-1} \left(\left\| \frac{|\nabla\psi|}{r} \right\|^2_{\Pi_1} + \|\tau\|^2_{\Pi_2} \right) \Big|_{t=t_1} +$$

$$+ c_{23} (\|\psi^n\|^2_{(3),\Pi_{1,t_1}^{t_2}} + \|\psi^n\|_{(3),\Pi_{1,t_1}^{t_2}} + \varepsilon M_\varepsilon^{-2} \|\tau^n\|_{(1),\Pi_{2,t_1}^{t_2}}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \| |\nabla\tau^n| \|_{2+2\gamma,\Pi_{1,t_1}^{t_2}}^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} +$$

$$+ M_\varepsilon^{-3} \|\tau^{n+1}\|^2_{(1),\Pi_{2,t_1}^{t_2}}) [|\psi|^2_{V_{2,0}^{2,0}(\Pi_{1,t_1}^{t_2})} + |\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_{2,t_1}^{t_2})}] +$$

$$+ \varepsilon \frac{1}{4} |\tau^n - \tau^{n-1}|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_{2,t_1}^{t_2})}$$

для всяких t_1, t_2 из $[0, T]$.

Разобъем отрезок $[0, T]$ на конечное число отрезков $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, ..., $[t_{k-1}, t_k]$, $t_0 = 0$, $t_k = T$, таких, что

$$\mu(t_i, t_{i+1}) \equiv c_{23} (\|\psi^n\|_{(3),\Pi_{1,t_1}^{t_2}} + \|\psi^n\|_{(3),\Pi_{1,t_1}^{t_2}} + \varepsilon M_\varepsilon^{-2} \|\tau^n\|_{(1),\Pi_{2,t_1}^{t_2}}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \times$$

$$\times \| |\nabla\tau^n| \|_{2+2\gamma,\Pi_{1,t_1}^{t_2}}^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} + M_\varepsilon^{-3} \|\tau^{n+1}\|^2_{(1),\Pi_{2,t_1}^{t_2}}) \leqslant \frac{1}{4} M_\varepsilon, \quad i = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Это можно сделать. Действительно, если $\mu(0, T) > 1/2$, то произведя дробление так, чтобы все $\mu(t_i, t_{i+1})$, кроме быть может последнего, были равны $M_\varepsilon/4$, в силу (19), (20) получим

$$\frac{1}{4} M_\varepsilon (k-1) \leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \mu(t_i, t_{i+1}) \leqslant c_{24} [\|\psi^n\|^2_{(3),\Pi_1^T} + M_\varepsilon^{-3} \|\tau^{n+1}\|_{(1),\Pi_2^T} +$$

$$+ \sqrt{k} (\|\psi^n\|_{(3),\Pi_1^T} + \varepsilon M_\varepsilon^{-2} \|\tau^n\|_{(1),\Pi_2^T}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \| |\nabla\tau^n| \|_{2+2\gamma,\Pi_1^T}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}})] \leqslant$$

$$\leqslant c_{25} \left[\frac{M_3}{M_\varepsilon} + \frac{M_1}{M_\varepsilon^3} + \sqrt{k} \left(\sqrt{\frac{M_3}{M_\varepsilon}} + \sqrt{\frac{M_1}{M_\varepsilon^2}} \right) \right],$$

откуда $k \leqslant c_{26} M_\varepsilon^{-5} (M_1 + M_3) \equiv M$, и, следовательно, для всякого целого i из $[0, k-1]$ справедливы оценки

$$u_{i+1}^{n+1} + v_{i+1}^{n+1} \leqslant \frac{\alpha}{2} (u_i^{n+1} + v_i^{n+1}) + \varepsilon_1 u_{i+1}^n, \tag{23}$$

где $i = 0, 1, \ldots, k-1$; $n = 1, 2, \ldots$; $\alpha = 8c_{22} M_\varepsilon^{-2}$, $\varepsilon_1 = \varepsilon M_\varepsilon^{-1} < 1$,

$$u_{i+1}^{n+1} = |\tau^{n+1} - \tau^n|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_{2,t_i}^{t_{i+1}})}, \; v_{i+1}^{n+1} = |\psi^{n+1} - \psi^n|^2_{V_{2,0}^{2,0}(\Pi_{1,t_i}^{t_{i+1}})},$$

$$u_{i+1}^1 = |\tau^1|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_{2,t_i}^{t_{i+1}})} \; v_{i+1}^1 = |\psi^1|^2_{V_{2,0}^{2,0}(\Pi_{1,t_i}^{t_{i+1}})}, \quad u_0^{n+1} = v_0^{n+1} = u_{i+1}^0 = v_{i+1}^0 = 0.$$

Рекуррентное неравенство (23) приводит, как известно [4], к оценке $\max\{u_i^{n+1}, v_i^{n+1}\} \leqslant \varepsilon_1^n \left[u_i^1 + \sum_{p=1}^{i-1} \frac{\alpha^p}{p!} n(n+1)\ldots(n+p-1)\, u_{i-p}^1 \right]$, которая и доказывает сильную сходимость последовательности (ψ^n, τ^n) к (ψ, τ) в $V_{2,0}^{2,0}(\Pi_1^T) \times V_{2,0}^{1,0}(\Pi_2^T)$:

$$|\psi^{n+1} - \psi^n|^2_{V_{2,0}^{2,0}(\Pi_1^T)} + |\tau^{n+1} - \tau^n|_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_2^T)} \leqslant 2\varepsilon_1^n \sum_{i=1}^{k} \left[u_i^1 + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{i-1} \frac{\alpha^p}{p!}\, n(n+1)\ldots(n+p-1)\, u_{i-p}^1 \right] \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon^n \left[kM_1 + k^2 (n+k)^k M_1 \max_{1 \leqslant p \leqslant k-1} \frac{\alpha^p}{p!} \right] \leqslant c_{27} \varepsilon^n M_1 (n+M)^M \frac{\alpha^{[\alpha]}}{[\alpha]!}.$$

Оценки скорости сходимости (ψ^n, τ^n) к (ψ, τ) выводятся аналогично.

Предельный переход в интегральных тождествах (6), (7), которым согласно теореме 1 удовлетворяет (ψ^n, τ^n), осуществляется, как и в [1—4], на основании соответствующей слабой и сильной сходимости (ψ^n, τ^n) к (ψ, τ). Заметим лишь, что при доказательстве предельного соотношения

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Pi_1^T} \frac{\nu(\varepsilon\tau^n)}{r} (\nabla D\psi^n \cdot \nabla\varphi)\, drdzdt = \int_{\Pi_1^T} \frac{\nu(\varepsilon\tau)}{r} (\nabla D\psi \cdot \nabla\varphi)\, drdzdt$$

следует учесть слабую сходимость ψ^n к ψ в $L_2(0, T; W_{2,0}^{(3)}(\Pi_1))$ и тот факт, что ввиду сильной сходимости τ^n к τ в $L_2(\Pi_2^T)$ цилиндр Π_1^T для всяких $\varepsilon > 0$ и $n > 0$ можно разбить на две части Π_{11}^T и Π_{12}^T так, что $\Pi_1^T = \Pi_{11}^T \cup \cup \Pi_{12}^T$, $\operatorname{mes} \Pi_{11}^T < \varepsilon$ и последовательность τ^n сходится к τ равномерно на Π_{12}^T.

Соотношения вида (12)—(14) для обобщенного решения задачи (1)—(5) доказываются как и соответствующие соотношения в [4].

Следует отметить, что (ψ, τ) сходится сильно к (ψ_0, τ_0) в $W_{2,0}^{(2)}(\Pi_1) \times \times L_2(\Pi_2)$ при $t \to +0$, поскольку (ψ^n, τ^n) сильно сходится к (ψ, τ) и (ψ_0, τ_0) при $n \to \infty$ и $t \to +0$ в $V_{2,0}^{2,0}(\Pi_1^T) \times V_{2,0}^{1,0}(\Pi_2^T)$ и $W_{2,0}^{(2)}(\Pi_1) \times L_2(\Pi_2)$ соответственно.

Единственность обобщенного решения (ψ, τ) задачи (1)—(5) выводится от противного из оценок типа (23).

Таким образом, доказана следующая теорема .

Т е о р е м а 2. *Если* $(\psi_0, \tau_0) \in W_{2,0}^{(2)}(\Pi_1) \times L_2(\Pi_2)$, $F_i \in L_{p, \frac{2p}{3p-2}}(\Pi_i^T)$, $1 < p \leqslant 2$, $i = 1, 2$, *функции* $\nu, \varkappa, \mathcal{P}$ *удовлетворяют условиям* 1 — 6, $\gamma \geqslant 1$, $\varepsilon < \{\bar{\nu} C^{-1} M_1^{-1}(\tau_0, F_2),\ \bar{\nu}(1 + CM_1(\tau_0, F_2))^{-1}\}$, *то существует единственное обобщенное решение задачи* (1) — (5), *удовлетворяющее энергетическим равенствам* (12) — (14) *и оценкам* (19), (20).

З а м е ч а н и е. Все результаты, полученные в работе, верны и в случае, когда Π_1 и Π_2 есть произвольные ограниченные области с достаточно гладкими границами и Π_1 отстоит от оси вращения Oz.

1. *Ладыженская О. А.* Об однозначной разрешимости в целом трехмерной задачи Коши для уравнений Навье—Стокса при наличии осевой симметрии // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР.— 1968.— 7.— С. 155—177.
2. *Галицын А. С., Легейда Г. А., Мосеенков В. Б.* Аксиально-симметрические квазилинейные сопряженные задачи нестационарной конвекции и проекционно-сеточный метод их решения.— Киев, 1984.— 46 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.22).
3. *Мосеенков В. Б.* О разрешимости в целом трехмерной начально-краевой задачи для модифицированных уравнений термоконвекции.— Киев, 1984.— 47 с.— (Препринт / АН АН УССР. Ин-т математики; 84.17).

4. *Мосеенков В. Б.* Глобальные теоремы об однозначной разрешимости и устойчивости осесимметричных начально-краевых задач термоконвекции.— Киев, 1986.—52 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.42).

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 07.07.87