УДК 513.88:517.948.3

Г. Г. ПОЛЕТАЕВ, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

Абстрактный аналог парного уравнения типа свертки в кольце с факторизационной парой

Рассмотрено абстрактное парное уравнение — аналог в кольце с факторизационной парой подколец для парного интегрального уравнения типа свертки. Коэффициенты уравнения предполагаются принадлежащими, вообще говоря, разным кольцам с факторизационными парами. Исследована связь разрешимости уравнений с факторизуемостью некоторых элементов, строящихся по коэффициентам.

Розглянуто абстрактне парне рівняння — аналог у кільці з факторизаційною парою підкілець для парного рівняння типу згортки. Припускається, що коефіцієнти рівняння належать, взагалі кажучи, до різних кілець з факторизаційними парами. Досліджено зв'язок розв'язності рівнянь з факторизовністю деяких елементів, що будуються за коефіцієнтами.

Настоящая статья является продолжением [1].

При построении теории задачи Римана — Гильберта, уравнений Винера — Хопфа, парных и транспонированных к ним интегральных уравнений типа свертки на определенном уровне наблюдается общность с точки зрения теории колец, причем не обязательно нормированных [1].

При соответствующих постановках удобным аппаратом исследований оказывается сочетание основных фактов об уравнениях в кольцах со специальными факторизационными парами и положений функционального анализа, а ряд общих свойств исследуемых уравнений может быть получен из соответствующих свойств их абстрактных аналогов.

Далее с позиций уравнений (-аналогов) в кольцах, обладающих факторизационными парами подколец, рассматривается абстрактное парное уравнение оносительно неизвестного x в кольце с соответствующей парой подколец $R^{\mp}$:

$$(a_1x)^- = c^-, \quad (a_2x)^+ = b^+. \tag{1}$$

Абстрактное уравнение (1) охватывает ряд постановок задачи разрешимости уравнений вида

$$\begin{gathered}\varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s)\varphi(s)\,ds = f(t), \quad -\infty < t < 0,\\ \varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s)\varphi(s)\,ds = f(t), \quad 0 < t < \infty,\end{gathered} \tag{*}$$

и их систем, а также дискретных аналогов [1, 2]; задачи типа задачи Римана — Гильберта— Привалова на оси и контуре из двух параллельных прямых; некоторые нетрадиционные матричные уравнения и уравнения векторной алгебры, допускающие прикладную трактовку и соответствующие задачи. Уравнение (1) используется для построений общих подходов в исследовании «родственных» (*) уравнений, задач, для описания связей разрешимости уравнений с факторизуемостью коэффициентов, получения формул представления решений, резольвентных ядер и других [3—7]. В виде (1), как можно заметить из (2) [1], можно записать, например, уравнение (*) в изучаемой в [2] постановке, связанную с ним пару задач и задачу типа задачи Римана — Гильберта — Привалова на сомкнутой вещественной оси; системы «подобных» (*) уравнений, а также уравнения (*), рассматриваемые в [1], и задачу типа задачи Римана — Гильберта на контуре из пары параллельных прямых.

Для дальнейшего изложения потребуется часть определений и обозначений из [3, 4, 6, 7], существенно обобщающих определения и обозначения, введенные в работе [1].

1. Обозначения и определения. Пусть R_1, R_2 — ассоциативные, вообще говоря, некоммутативные кольца с операциями умножения τ_j: $R_j \times R_j \to R_j$ ($j = 1, 2$) и общей мультипликативной единицей e ($\in R_1 \cap R_2$), а R — любое ассоциативное кольцо с единицей [3, 6, 7]. Положим $R_{1\cap 2} := R_1 \cap R_2$, $R_{1\cup 2} := R_1 + R_2$. Будем называть R_1, R_2 кольцами с общим умножением, если по сложению они являются подгруппами аддитивной абелевой группы $R_{1\cup 2}$ и

$$\tau_1 \,|\, R_{1\cap 2} \times R_{1\cap 2} = \tau_2 \,|\, R_{1\cap 2} \times R_{1\cap 2}.$$

Пусть p^+ и p^- — коммутирующие проекторы, т. е. аддитивные и идемпотентные отображения $R_{1\cup 2} \to R_{1\cup 2}$ (или $R \to R$). Положим $p^0 := p^+p^- = (= p^-p^+)$, $p_{\pm} := p^{\pm} - p^0$. Для любого подмножества $B \subseteq R_{1\cup 2}$ ($B \subseteq R$) обозначим $B^{\mp,0} := p^{\mp,0}B$, $B_{\mp} := p_{\mp}B$, $B^* := B^+ + B^-$, $B_* := B_+ + B_-$. Для любого $x \in R_{1\cup 2}$ ($x \in R$) положим $x^{\mp,0} := p^{\mp,0}x$, $x_{\mp} := p_{\mp}x$. Обратный в R для обратимого в R элемента $x \in R$ условимся обозначать x' [4]. В дальнейшем встретятся случаи, когда рассматриваемый элемент x, принадлежащий пересечению колец $A, B \subseteq R_{1\cup 2}$, может оказаться обратимым в некотором кольце $\mathbb{C}\subseteq R_{1\cup 2}$. Всякий раз, когда целесообразно уточнить какой именно обратный для x выбран, будем применять индексы, ассоциированные с кольцом, в котором этот обратный для элемента x рассматривается. Например, для обратимого в B элемента $x\in A\cap B$ символ x'_B означает обратный для x в B. Для произвольных подмножеств $A, B\subseteq R$ определим множество $\mathrm{inv}\,(A, B) := \{x\in A : x'$ существует и принадлежит $B\}$. Положим $\mathrm{inv}\,(A, A) := \mathrm{inv}\, A$. Элемент u^+ $[v^0, w^-]$ назовем правильным [4], если $u^+\in \mathrm{inv}\, R^+$ $[v^0\in \mathrm{inv}\, R^0, w^-\in \mathrm{inv}\, R^-]$.

2. Факторизационные пары подколец и факторизация элементов.

1. Определение. *Пару подколец (R^+, R^-) $[\equiv (R^-, R^+)]$ кольца R с единицей e будем называть левой (правой) факторизационной парой (ЛФП (ПФП)) R, если она порождена действующими в R коммутирующими проекторами p^+, p^-: $R^\mp = p^\mp R$, и выполняются следующие аксиомы* (ср. [4]):

$A_1)$ $e\in R^0$;

$A_2)$ $p^0\,(=p^+p^-)$ — *кольцевой гоморфизм* R^+ *и* R^- *в* R^0;

$A_3)$ $(R^+R^-\subseteq R^*$ $[R^-R^+\subseteq R^*]$.

Когда пара (R^+, R^-) является одновременно ЛФП и ПФП, будем называть ее факторизационной парой (ФП) кольца R.

2. Будем говорить, что элемент $a\in R$ допускает в R левую (правую) факторизацию (l. ф. (r. ф.)) по паре (R^+, R^-), если существуют элементы $r^+\in R^+$, $s^0\in R^0$, $t^-\in R^-$ такие, что

$$a = r^+s^0t^- \quad [a = t^-s^0r^+]. \tag{2}$$

Множители r^+, s^0, t^- в (2) называются плюс-, диагональным- и минус-факторами соответственно.

Если $a\in R$ допускает в R одновременно l.ф. и r.ф. (с, вообще говоря, различными одноименными $\mp$-0-факторами), будем говорить, что a допускает в R двустороннюю факторизацию (∂.ф.) в R [5].

Левая (правая) факторизация (2) называется: правильной левой (правой) факторизацией (п.l.ф. (п.r.ф.)), если r^+, s^0, t^- — правильные элементы; нормированной левой (правой) факторизацией (н.l.ф. (н.r.ф)), если $t^0 = r^0 = e$; нормированной правильной левой (правой) факторизацией (н.п.l.ф. (н.п.r.ф)), если она является п.l.ф.(п.r.ф.) и $t^0 = r^0 = e$; (минус) правильной левой (правой) факторизацией ((—), п.l.ф. ((—).п.r.ф.)), если минус-фактор (2) является правильным элементом; (диагонально) правильной правой факторизацией ((0).п.r.ф.), если диагональный фактор (2) является правильным элементом; простой правой факторизацией (пр.r.ф), если она является п.r.ф. и $t^0 = s^0 = r^0 = e$.

Аналогично вводятся (плюс) правильная; (минус, диагонально) правильная; (плюс, диагонально) правильная; нормированная (плюс (минус)) правильная; нормированная (плюс (минус), диагонально) правильная правая факторизации. Сокращения примем, соответственно, такими: (+). п.r.ф.; (—, 0), п.r.ф.; (+, 0), п.r.ф.; н.(+).п.r.ф. (н.(—) п.r.ф.); н.(+, 0).п.r.ф. (н.(—, 0), п.r.ф.)

Если элемент $a\in R$ допускает в R двустороннюю факторизацию [5]

$$a = r^+s^0t^- = u^-w^0v^+, \tag{3}$$

при которой левая его факторизация $a = r^+s^0t^-$ и правая $a = u^-w^0v^+$ являются, соответственно, п.l.ф. и п.r.ф., то (3) называется правильной двусторонней факторизацией (п. ∂.ф.).

Двусторонняя факторизация (3) называется: нормированной двусторонней факторизацией (н.∂.ф.), если $t^0 = r^0 = u^0 = v^0 = e$; нормированной правильной двусторонней факторизацией (н.п.∂.ф.), если она является п.∂.ф. и $t^0 = r^0 = u^0 = v^0 = e$; (минус) правильной двусторонней факторизацией ((—), п.∂.ф.), если (минус) факторы t^- и u^- в (3) являются правильными элементами; (диагонально) правильной двусторонней факторизацией ((0).п.∂.ф.), если (диагональные) факторы s^0 и w^0 в (3) являются правильными элементами; простой двусторонней факторизацией (пр. ∂.ф.), если она является н.п.∂.ф. и $s^0 = w^0 = e$.

Аналогично вводятся иные типы факторизаций, использующиеся [3, 6, 7] в сходных вопросах и соответствующие им сокращения (ср. [2—11]). Если кольцо R коммутативно, то слова: левая, правая и соответствующие буквы в сокращениях опускаются.

Теорема 1. *Нормированная правильная правая (левая) факторизация в R единственна.*

Верна более общая теорема.

Теорема 2. *А) если $r_1^+ s_1^0 t_1^- = r_2^+ s_2^0 t_2^- = a\,(\in R)$, где $r_1^+, t_2^-, s_1^0, s_2^0$ — правильные элементы и $r_1^0 = r_2^0, t_1^0 = t_2^0$, то $r_1^+ = r_2^+$, $s_1^0 = s_2^0$, $t_1^- = t_2^-$. Б) если $(R\ni)$ $a = c_1^- b_1^0 a_1^+ = c_2^- b_2^0 a_2^+$, где $c_1^-, a_2^+, b_1^0, b_2^0$ — правильные элементы и $c_1^0 = c_2^0$, $a_1^0 = a_2^0$, то $c_1^- = c_2^-$, $b_1^0 = b_2^0$, $a_1^+ = a_2^+$.*

Доказательство можно провести аналогично доказательству предложения 2.1 из [4].

3. Постановка задачи разрешимости уравнения (1). Если задача о разрешимости уравнения (1) ставится в кольце R с факторизационной парой (R^+, R^-), то элементы $a_1, a_2 \in R$, называемые его коэффициентами, и правая часть $c^- \in R^-$, $b^+ \in R^-$ наперед заданы, а $x\ (= x^- + x_+ = x_- + x^+)$ — искомый элемент из R или R^*. Более сложный случай возникает, когда в уравнении (1) коэффициенты $a_j \in R_j$ ($j = 1, 2$), причем R_1 и R_2, вообще говоря,— различные кольца с общим умножением. В этом случае будем искать решения x в $R^*_{1\cap 2}$, предполагая выполненными условия

$$R_1^+ \supseteq R_2^+, \quad R_1^- \subseteq R_2^-. \tag{4}$$

Как известно [3, 6, 9, 12], случай включений только противоположного (4) смысла даже для скалярных уравнений (*) при $k_1 \in L$, $k_2 \in L_{(c)}$ без дополнительных существенных ограничений не исследован.

Коэффициенты a_j ниже считаются обратимыми в R_j ($j = 1, 2$). Решением в $R^*_{1\cap 2}$ уравнения (1) будем называть всякий элемент $x \in R^*_{1\cap 2}$, удовлетворяющий каждому из входящих в (1) уравнений. Аналогично в R. Ясно, что случай, вообще говоря, различных колец R_1 и R_2 содержит предыдущий, как частный при $R_1 = R_2 = R$.

Резольвентой (абстрактной) в $R^*_{1\cap 2}$ абстрактного парного уравнения (1) будем называть решение в $R^*_{1\cap 2}$ этого уравнения с правой частью $c^- = a_{1-}$, $b^+ = a_{2+}$ при его существовании. Условимся обозначать эту резольвенту символом x_r.

Важным для известных приложений [3, 9] уравнения (1) является случай, когда, не умаляя общности, можно считать один из его коэффициентов таким, что обратный к нему допускает н.п.ф. В дальнейшем будем считать, что элемент a_2' обладает н.п.l.ф. или н.п.r.ф.

Установлены следующие утверждения, доказательства которых можно найти в [3]. Если в дальнейшем дополнительно ниже не указано, то результаты, полученные для некоммутативных колец R_1, R_2, сохраняются и при их коммутативности.

4. Связь разрешимости парного уравнения и аналога уравнения Винера — Хопфа в случае коэффициентов из одного кольца. Задача разрешимости уравнения (1), поставленная в R, при некоторых ограничениях может быть сведена к задаче разрешимости аналога уравнения Винера — Хопфа [7]. Справедлива такая теорема.

Теорема 3. *Пусть R — произвольное ассоциативное, вообще говоря, некоммутативное кольцо с единицей e. Если коэффициенты $a_j \in \operatorname{inv} R$ ($j = 1, 2$), а правая часть $c^- \in R^-$, $b^+ \in R^+$ и выполнены условия*

$$R = R^*, \quad RR_* \subseteq R_*, \quad a'^0 b^0 = c^0 \quad (a := a_2 a_1'),$$

то уравнение (1) *имеет решение в* R *в том и только в том случае, когда правое уравнение Винера— Хопфа* (W — HRE) *в* R

$$p^+\{av^+\} = h^+ \quad (h^+ := b^+ - \{ac_-\}^+) \tag{5}$$

имеет решение в R^+.

С помощью формул $v^+ = [a_1 x]^+$, $x = a_1' [v^+ + c_-]$ *между множествами* $Z(x)$ (*решений* $x \in R$ *уравнения* (1)) *и* $Z(v^+)$ (*решений* $v^+ \in R^+$ *уравнения* (5)) *устанавливается взаимно-однозначное соответствие.*

Перейдем к случаю различных колец R_1 и R_2.

5. Факторизация коэффициентов и разрешимость уравнения (1). Пусть R_1, R_2 — кольца с общим умножением и непустым пересечением $R_{1\cap 2}$; p^+, p^- — коммутирующие проекторы $R_{1\cup 2} \to R_{1\cup 2}$ такие, что выполнено условие (4). Тогда для разрешимости в $R^*_{1\cap 2}$ абстрактного парного уравнения (1) с коэффициентами $a_j \in R_j$ ($j = 1, 2$), необходимо выполнение условия $c^- \in R_1^-$, $b^+ \in R_2^+$.

Оказывается, разрешимость уравнений (1) зависит от типа допускаемых коэффициентами, элементами, строящимися по коэффициентам, факторизаций.

1. Разрешимость при нормированной правильной факторизации. В случае, аналогичном случаю уравнения (*) с нулевым индексом [1] получена такая теорема.

Теорема 4. *Пусть* R_1, R_2 — *ассоциативные кольца с общим умножением и единицей* $e \in R_{1\cap 2}$; p^+, p^- — *коммутирующие проекторы* $R_{1\cup 2} \to R_{1\cup 2}$ *такие, что* (R_j^+, R_j^-) — $\Phi\Pi\, R_j$ ($j = 1, 2$), *и выполнены условия* (4). *Если коэффициенты* $a_j \in \operatorname{inv} R_j$ ($j = 1, 2$), *причем элемент* a_2' *допускает в* R_2 *н. п. l. ф.*

$$a_2' = r_2^+ s_2^0 t_2^-, \tag{6}$$

а элемент $a := (a_1 r_2^+)'_{R_1}$ *допускает в* R_1 *н. п. r. ф.*

$$a = t^- s^0 r^+, \tag{7}$$

то при любой удовлетворяющей условию согласования

$$(t^{-'} s_2^0 t_2^- b^+)^0 = (s^0 r^+ c^-)^0 \tag{8}$$

правой части $c^- \in R_1^-$, $b^+ \in R_2^+$ *уравнение* (1) *имеет в* $R^*_{1\cap 2}$ *одно и только одно решение, определяющееся по формуле*

$$x = r_2^+ t^- \{(t^{-'} s_2^0 t_2^- b^+)^+ + (s^0 r^+ c^-)_-\}. \tag{9}$$

Следствие 1. *Пусть при условиях теоремы* 4 $s_2^0 = s^0$, *тогда единственным в* $R^*_{1\cap 2}$ *решением уравнения* (1) *с правой частью* $c^- = b^+ = e$ *будет элемент* x_e, *определяемый формулой*

$$x_e = r_2^+ t^- s^0. \tag{10}$$

Решение $x \in R^*_{1\cap 2}$ *уравнения* (1) *с произвольной удовлетворяющей условию согласования* (8) *правой частью* $c^- \in R_1^-$, $b^+ \in R_2^+$ *может быть определено через* x_e *по формуле*

$$x = x_e \{[(a_2 x_e)'_{R_2} b^+]^+ + [(a_1 x_e)'_{R_1} c^-]_-\}. \tag{11}$$

Формула (11) является существенным обобщением формулы (17) из [1].

Легко заметить, что при условиях следствия 1 условие согласования (8) эквивалентно такому:

$$[(a_1 x_e)'_{R_1} c^-]^0 = [(a_2 x_e)'_{R_2} b^+]^0. \tag{12}$$

С л е д с т в и е 2. *Пусть при условиях теоремы 4* $s_2^0 = s^0$ *и* $a_1^0 = a_2^0$, *тогда уравнение* (1) *имеет в* $R^*_{1\cap 2}$ *единственную резольвенту* x_r. *Она может быть определена по любой из формул*

$$x_r = e - r_2^+ t^- s^0 a_1^0; \qquad x_r = e - x_e a_1^0. \tag{13}$$

Если, кроме того, $a_1^0 \in \operatorname{inv} R_1^0$ $[a_2^0 \in \operatorname{inv} R_2^0]$, *то а) существует обратный* $(e - x_r)'_{R_{1\cap 2}}$; *б) решение* $x \in R^*_{1\cap 2}$ *уравнения* (1) *с произвольной, удовлетворяющий условию согласования* (8) *правой частью* $c^- \in R_1^-$, $b^+ \in R_2^+$ *может быть определено через* x_r *по формуле*

$$x = [e - x_r]\{[(a_2[e - x_r])'_{R_2} b^+]^+ + [(a_1[e - x_r])'_{R_1} c^-]_-\}. \tag{14}$$

Можно указать ограничения, при которых $a_1^0 = s^{0\prime}$, $a_2^0 = s_2^{0\prime}$, а значит, условия $s_2^0 = s^0$ и $a_1^0 = a_2^0$ эквивалентны. Это будет справедливо при условиях теоремы 4 если, например, R_{1*} — подкольцо. и $R_{2-}R_{2+} \subseteq R_{2*}$ или когда, в частности, сужения проектора p^0/R_j являются кольцевыми гомоморфизмами $R_j \to R_j^0$ $(j = 1, 2)$. Условие согласования (8) при этом может быть выражено через резольвенту x_r в виде

$$\{[a_1(e - x_r)]'_{R_1} c^-\}^0 = \{[a_2(e - x_r)]'_{R_2} b^+\}^0.$$

Если при условиях теоремы 4 сужение проектора $p^0: R_{1\cup 2} \to R_{1\cup 2}$ на R_j $(j = 1, 2)$ является кольцевым гомоморфизмом $R_j \to R_j^0$ $(j=1, 2)$, то условие (8) выполняется тогда и только тогда, когда

$$a_1^{0\prime} c^0 = a_2^{0\prime} b^0. \tag{15}$$

Если, кроме того, $a_1^0 a_2^0 = a_2^0 a_1^0$ (это выполняется, например, тогда, когда R_1^0 $[= R_2^0]$ — коммутативное кольцо), то условие (15) эквивалентно условию $a_1^0 b^0 = a_2^0 c^0$.

Теорему 4 и следствия 1, 2 в таком случае можно сформулировать следующим образом.

Т е о р е м а 5. *Пусть* R_1, R_2 — *ассоциативные кольца с общим умножением и единицей* $e \in R_{1\cap 2}$; p^+, p^- — *коммутирующие проекторы* $R_{1\cup 2} \to R_{1\cup 2}$ *такие, что* (R_j^+, R_j^-)—*ФП* R_j $(j = 1, 2)$; p^0/R_j — *кольцевой гомоморфизм* $R_j \to R_j^0$ $(j = 1, 2)$, *и выполняется условие* (4).

Если коэффициенты $a_j \in \operatorname{inv} R_j$ $(j = 1, 2)$, *причем элемент* a_2' *допускает в* R_2 *н. п. l. ф.* (6), *а элемент* $a := (a_1 r_2^+)'_{R_1}$ *допускает в* R_1 *н. п. r. ф.* (7), *то*

1) *при любых удовлетворяющих условию согласования* (15) $c^- \in R_1^-$, $b^+ \in R_2^+$ *уравнение* (1) *имеет в* $R^*_{1\cap 2}$ *одно и только одно решение, определяющееся по формуле* (9).

Условия $c^- \in R_1^-$, $b^+ \in R_2^+$ *и условие* (15) *для таких* c^-, b^+ *являются необходимыми условиями разрешимости уравнения* (1) *в* $R^*_{1\cap 2}$.

2) *При выполнении условия*

$$a_1^0 = a_2^0 \tag{16}$$

единственным в $R^*_{1\cap 2}$ *решением уравнения* (1) *с правой частью* $c^- = b^+ = e$ *будет элемент* x_e, *определяемый формулой*

$$x_e = r_2^+ t^- v^0 \quad (v^0 := a_j^{0\prime} (= a_j^{\prime 0}),\ j = 1, 2).$$

Решение $x \in R^*_{1\cap 2}$ *уравнения* (1) *с произвольной удовлетворяющей условию согласования*

$$c^0 = b^0, \tag{17}$$

правой частью $c^- \in R_1^-$, $b^+ \in R_2^+$ *может быть определено через* x_e *по формуле* (11).

3) *При выполнении условия* (16) *существует и единственна резольвента* x_r *уравнения* (1) *в* $R^*_{1\cap 2}$. *Она может быть определена по любой из формул*

$$x_r = e - r_2^+ t^-; \qquad x_r = e - x_e a_j^0 \quad (j = 1, 2).$$

Существуют и равны обратные $[e - x_r]'_{R_1}, [e - x_r]'_{R_2}$. *Решение* $x \in R^*_{1\cap 2}$ *уравнения* (1) *с произвольной удовлетворяющей условию согласования* (17) *правой частью* $c^- \in R_1^-$, $b^+ \in R_2^+$ *может быть определено через* x_r *по формуле* (14).

2. Если при условиях теоремы 4 кольца R_1 и R_2 коммутативные, то элемент a'_1 допускает н. п. ф.

$$a'_1 = t_1^- s_1^0 r_1^+, \tag{18}$$

где $t_1^- = t^-$, $s_1^0 = s^0$, $r_1^+ = r_2^+ r^+$. Согласно теореме 1 факторизация (18) единственна. В таком случае формуле (9) можно придать вид

$$x = r_2^+ t_1^- \{s_2^0 (u^- b^+)^+ + s_1^0 (r^+ c^-)_-\},$$

где $u^- := (t_1^-)'_{R_2} t_2^-$, $r^+ := r_2^{+\prime} r_1^+$. Если, кроме того, $s_1^0 = s_2^0 = e$, то

$$x = r_2^+ t_1^- \{(u^- b^+)^+ + (r^+ c^-)_-\}. \tag{19}$$

Формула (19) включает формулу (16) из [1].

Теорема 5 и сформулированные замечания обобщаются в виде такой теоремы.

Теорема 6. *Пусть* R_1, R_2 — *ассоциативные коммутативные кольца с общим умножением и единицей* $e \in R_{1\cap 2}$; p^+, p^- — *коммутирующие проекторы* $R_{1\cup 2} \to R_{1\cup 2}$ *такие, что* (R_j^+, R_j^-) — *ФП* R_j $(j = 1, 2)$, p^0/R_j — *кольцевой гомоморфизм* $R_j \to R_j^0$ $(j = 1, 2)$, *и выполняется условие* (4).

Если коэффициенты $a_j \in \operatorname{inv} R_j$ $(j = 1, 2)$, *причем элементы* a'_j *допускают в* R_j *пр. ф.* $a'_j = r_j^+ t_j^-$ $(j = 1, 2)$, *то*

1) *при любых удовлетворяющих условию согласования* (17) $c^- \in R_1^-$, $b^+ \in R_2^+$ *уравнение* (1) *имеет в* $R^*_{1\cap 2}$ *одно и только одно решение. Оно может быть определено по формуле* (19). *Условия* $c^- \in R_1^-$, $b^+ \in R_2^+$ *и условие* (17) *для таких* c^-, b^+ *являются необходимыми условиями разрешимости уравнения* (1) *в* $R^*_{1\cap 2}$.

2) *единственным в* $R^*_{1\cap 2}$ *решением уравнения* (1) *с правой частью* $c^- = b^+ = e$ *будет элемент* x_e, *определяемый формулой* $x_e = r_2^+ t_1^-$. *Решение* $x \in R^*_{1\cap 2}$ *уравнения* (1) *с произвольной удовлетворяющей условию согласования* (17) *правой частью* $c^- \in R_1^-$, $b^+ \in R_2^+$ *может быть определено через* x_e *по формуле* (11).

3) *Уравнение* (1) *имеет в* $R^*_{1\cap 2}$ *единственную резольвенту. Она может быть определена по любой из формул* $x_r = e - r_2^+ t_1^-$, $x_r = e - x_e$, *причем элемент* $e - x_r$ *обратим в* $R_{1\cap 2}$. *Решение* $x \in R^*_{1\cap 2}$ *уравнения* (1) *с произвольной удовлетворяющей условию согласования* (17) *правой частью* $c^- \in R_1^-$, $b^+ \in R_2^+$ *может быть определено через* x_r *по формуле* (14).

3. Формула (11) связи решений уравнения (1) с произвольной и равной единице кольца правыми частями верна и при более общих условиях. Справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть* R_1, R_2 — *ассоциативные кольца с общим умножением и единицей* $e \in R_{1\cap 2}$; p^+, p^- — *коммутирующие проекторы* $R_{1\cup 2} \to R_{1\cup 2}$ *такие, что* (R_j^+, R_j^-) — *ФП* R_j $(j = 1, 2)$ *и выполняется условие* (4).

Если уравнение (1) *с коэффициентами* $a_j \in \operatorname{inv} R_j^*$ *и правой частью* $c^- = b^+ = e$ *имеет решение* $x_e \in R^*_{1\cap 2}$, *обладающее обратными* $[x_e]'_{R_1^*}$, $[x_e]'_{R_2^*}$, *то при любой удовлетворяющей условию согласования* (12) *правой части* $c^- \in R_1^-$, $b^+ \in R_2^+$ *одно из решений* $x \in R^*_{1\cap 2}$ *уравнения* (1) *можно определить по формуле* (11).

Проверяя справедливость теоремы 7, следует учесть, что при ее условиях в (11) и (12) можно заменить символы R_1 и R_2 на R_1^*, R_2^* соответственно.

4. Аналогично теореме 4, доказанной в [3], устанавливается следующая теорема.

Теорема 8. *Пусть* R_1, R_2 — *ассоциативные кольца с общим умножением и единицей* $e \in R_{1\cap 2}$; p^+, p^- — *коммутирующие проекторы* $R_{1\cup 2} \to R_{1\cup 2}$ *такие, что* (R_j^+, R_j^-) — *ФП* R_j $(j = 1, 2)$ *и выполняется условие* (4).

Если коэффициенты $a_j \in \operatorname{inv} R_j$ $(j = 1, 2)$, *причем элемент* a_1' *допускает в* R_1 *н. п. r. ф* (18), *а элемент* $a := (a_2 t_1^-)'_{R_2}$ *допускает в* R_2 *н. п. l. ф.* (2), *то при любой удовлетворяющей условию согласования*

$$(r^{+\prime} s_1^0 r_1^+ c^-)^0 = (s^0 t^- b^+)^0 \tag{20}$$

правой части $c^- \in R_1^-$, $b^+ \in R_2^+$ *уравнение* (1) *имеет в* $R^*_{1\cap 2}$ *одно и только одно решение, определяющееся по формуле*

$$x = t_1^- r^+ \{(s^0 t^- b^+)_+ + (r^{+\prime} s_1^0 r_1^+ c^-)^-\}.$$

Условия $c^- \in R_1^-$, $b^+ \in R_2^+$ *и условие* (20) *для таких* c^-, b^+ *являются необходимыми условиями разрешимости уравнения* (1) *в* $R^*_{1\cap 2}$.

При условиях теоремы 8 очевидно, что (20) будет выполнено, например, в случае, когда p^0 — кольцевой гомоморфизм $R_j \to R_j^0$ $(j = 1, 2)$ и выполняется условие (15).

Следствие 3. *Пусть при условиях теоремы* 8 $s_1^0 = s^0$, *тогда единственным в* $R^*_{1\cap 2}$ *решением уравнения* (1) *с правой частью* $c^- = b^+ = e$ *будет элемент* x_e, *определяемый формулой*

$$x_e = t_1^- r^+ s^0; \tag{21}$$

условия (12), (20) *для* $c^- \in R_1^-$, $b^+ \in R_2^+$ *эквивалентны.*

Решение $x \in R^*_{1\cap 2}$ *уравнения* (1) *с произвольной удовлетворяющей условию* (12) *или* (20) *правой частью* $c^- \in R_1^-$, $b^+ \in R_2^+$ *может быть определено через* x_e *по формуле* (11).

5. Разрешимость при (плюс, диагонально) правильной факторизации. В случае, аналогичном случаю положительного индекса скалярного парного уравнения (*), получена следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть* R_1, R_2 — *ассоциативные кольца с общим умножением и единицей* $e \in R_{1\cap 2}$; p^+, p^- — *коммутирующие проекторы* $R_{1\cup 2} \to R_{1\cup 2}$ *такие, что* (R_j^+, R_j^-) — *ФП* R_j $(j = 1, 2)$ *и выполняется условие* (4).

Если коэффициенты $a_j \in \operatorname{inv} R_j^*$ $(j = 1, 2)$, *причем элемент* a_2' *допускает в* R_2 *н. п. l. ф.* (6), *а элемент* $a := (a_1 r_2^+)'_{R_1}$, *допускает в* R_1 *н.* $(+, 0)$. *п. r. ф.* (7) *и существует обратный* $[t^-]'_{R_2^*}$, *то*

1) *при любой удовлетворяющей условию согласования*

$$([t^-]'_{R_2} s_2^0 t_2^- b^+)^0 = (s^0 r^+ c^-)^0 \tag{22}$$

правой части $c^- \in R_1^-$, $b^+ \in R_2^+$ *одно из решений* $x \in R_{1\cap 2}^*$ *уравнения* (1) *может быть определено по формуле*

$$x = r_2^+ t^- \{([t^-]'_{R_2} s_2^0 t_2^- b^+)^+ + (s^0 r^+ c^-)_-\}. \qquad (23)$$

2) *При выполнении условия* $s_2^0 = s^0$ *элемент* x_e, *определяемый правой частью формулы* (10), *является одним из решений в* $R_{1\cap 2}^*$ *уравнения* (1) *с правой частью* $c^- = b^+ = e$.

Одно из решений $x \in R_{1\cap 2}^*$ *уравнения* (1) *с произвольной удовлетворяющей условию согласования* (12) *правой частью* $c^- \in R_1^-$, $b^+ \in R_2^+$ *может быть определено через указанный элемент* x_e *по формуле* (11).

3) *При выполнении условий* $s_2^0 = s^0$, $a_1^0 = a_2^0$ *одна из резольвент в* $R_{1\cap 2}^*$ *уравнения* (1) *может быть определена по любой из формул* (13). *Если, кроме того,* $a_1^0 \in \operatorname{inv} R_1^0$ $[a_2^0 \in \operatorname{inv} R_2^0]$, *то одно из решений* $x \in R_{1\cap 2}^*$ *уравнения* (1) *с произвольной удовлетворяющей условию согласования* (22) *правой частью* $c^- \in R_1^-$, $b^+ \in R_2^+$ *может быть определено через указанную резольвенту* x_r *по формуле* (14).

Обозначим далее через $Z(x_0)$ совокупность всех решений $x = x_0$ в $R_{1\cap 2}^*$ однородного уравнения (1) (т. е. с правой частью $c^- = b^+ = 0$), а через $Z(u_0^-)$ — совокупность всех решений $u^- = u_0^-$ в R_1^- однородного абстрактного правого уравнения Винера — Хопфа ($W-HRE$) [6]

$$p^-(a'u^-) = 0 \quad (a' := a_1 r_2^+). \qquad (24)$$

Очевидно, при условиях сформулированной ниже теоремы 10. $Z(x_0)$ и $Z(u_0^-)$ — аддитивные абелевы группы.

Для однородного уравнения (1) справедлива такая теорема.

Теорема 10. *Пусть* R_1, R_2 — *ассоциативные кольца с общим умножением и единицей* $e \in R_{1\cap 2}$; p^+, p^- — *коммутирующие проекторы* $R_{1\cup 2} \to R_{1\cup 2}$ *такие, что* (R_1^+, R_1^-) — *ЛФП* R_1, (R_2^-, R_2^+) — *ПФП* R_2 *и выполняется условие* (4).

Если коэффициенты $a_j \in \operatorname{inv} R_j$ $(j = 1, 2)$, *причем элемент* a'_2 *допускает в* R_2 *н. п. l. ф.* (6); *элемент* $a_1 r_2^+ \in \operatorname{inv}(R_1^*, R_1)$ *и элемент* $a := (a_1 r_2^+)'_{R_1}$ *допускает в* R_1 *н.* $(+, 0)$. *п. r. ф.* (7), *то*

1) *однородное парное уравнение* (1) *имеет нетривиальное решение* $x \in R_{1\cap 2}^*$ *в том и только в том случае, когда однородное абстрактное правое уравнение Винера — Хопфа* (24) *имеет нетривиальное решение* $u^- \in R_{1-}$.

2) *Соответствие* $B: Z(u_0^-) \to Z(x_0)$, *устанавливаемое с помощью формулы* $(x_0 =)\ Bu_0^- = r_2^+ u_0^-$ $(x_0 \in Z(x_0),\ u_0^- \in Z(u_0^-))$, *является изоморфизмом групп.*

3) *Если кроме указанной факторизации* (7) *элемент* a *допускает в* R_1 *другую, отличную от нее, н.* $(+, 0)$. *п. r. ф.* $a = \hat{t}^- \hat{s}^0 \hat{r}^+$ $(\hat{t}^- \neq t^-)$ и $s_2^0 = s^0 = \hat{s}^0$, *то каждый из элементов* $x_1 := r_2^+ t^- s^0$, $x_2 := r_2^+ \hat{t}^- \hat{s}^0$ *является решением в* $R_{1\cap 2}^*$ *уравнения* (1) *с правой частью* $c^- = b^+ = e$, *а одно из нетривиальных решений однородного уравнения* (1) *в* $R_{1\cap 2}^*$ *может быть определено по формуле* $x_0 = r_2^+ [t^- - \hat{t}^-] s^0$.

Утверждение 3 теоремы 10 показывает, что заключение о нетривиальной разрешимости однородного уравнения (1) при известных условиях можно сделать по существованию различных н. $(+, 0)$. п. r. ф. элемента $a := (a_1 r_2^+)'_{R_1}$ в R_1. Вопросы единственности факторизации в ряде конкретных колец можно решить с помощью общих теорем [4—5, 8—11] и др.

Следствие 4. *При общих условиях теоремы* 10 *любое нетривиальное решение* $x \in R_{1\cap 2}^*$ $[u^- \in R_{1-}]$ *однородного уравнения* (1) $[(24)]$ *представимо в виде:* $x = r_2^+ u^-$; $[u^- = r_2^{+\prime} x]$, *где* u^-, $[x]$ — *некоторое нетриви-*

альное решение в R_{1-}, $[R^*_{1\cap 2}]$ однородного уравнения (24), $[(1)]$, *соответственно.*

Следствие 5. *Если при условиях теоремы* 10 *кольца* R_j $(j=1,2)$ *являются алгебрами, а проекторы* p^+, p^- — *однородными операторами, то множества* $Z(x_0)$ *и* $Z(u_0^-)$ *являются алгебраически изоморфными линейными пространствами.*

Если при этом $Z(u_0^-)(\subseteq R_1^-)$ *n-мерно* $(n=1,2,\ldots)$ *с базисом* $\{u_i^-\}_1^n$, *то* $Z(x_0)(\subseteq R^*_{1\cap 2})$ *также n-мерно и имеет базис* $\{x_i\}_1^n$, $x_i=r_2^+u_i^-$ $(i= =1,\ldots,n)$.

6. Разрешимость при (минус) правильной факторизации. Здесь случай аналогичен случаю отрицательного индекса скалярного парного уравнения (*).

По характеристике однородного парного уравнения (1) приведем такое утверждение.

Теорема 11. *Пусть* R_1, R_2 — *ассоциативные кольца с общим умножением и единицей* $e\in R_{1\cap 2}$; p^+, p^- — *коммутирующие проекторы* $R_{1\cup 2}\to R_{1\cup 2}$ *такие, что* (R_1^+, R_1^-) — *ЛФП* R_1; (R_2^-, R_2^+) — *ПФП* R_2 *и выполняется условие* (4).

Если коэффициенты $a_j\in \operatorname{inv} R_j$ $(j=1,2)$, *причем элемент* a_2' *допускает в* R_2 *н. п. l. ф.* (6); $a_1r_2^+\in \operatorname{inv}(R_1^*, R_1)$, *а элемент* $a:=(a_1r_2^+)'_{R_1}$ *допускает в* R_1 *н.* (—). *п. r. ф.* (7), *то однородное парное уравнение* (1) *не имеет в* $R^*_{1\cap 2}$ *решений, отличных от нулевого.*

Неоднородное уравнение (1) при условиях теоремы 11 не всегда разрешимо. Справедлива такая теорема.

Теорема 12. *Пусть* R_1, R_2 — *ассоциативные кольца с общим умножением и единицей* $e\in R_{1\cap 2}$; p^+, p^- — *коммутирующие проекторы* $R_{1\cup 2}\to R_{1\cup 2}$ *такие, что* (R_j^-, R_j^+) — *ФП* R_j $(j=1,2)$ *и выполняется условие* (4).

Если коэффициенты $a_j\in \operatorname{inv} R_j^*$ $(j=1,2)$ *таковы, что элемент* a_2' *допускает в* R_2 *н. п. l. ф.* (6), *а элемент* $a:=(a_1r_2^+)'_{R_1}$ *допускает в* R_1 *н.* (—). *п. r. ф.* (7), *при которой* $s^0r^+\bar{\in} \operatorname{inv} R_1^+$, *то*

1) *для разрешимости в* $R^*_{1\cap 2}$ *неоднородного уравнения* (1) *с правой частью* $c^-\in R_1^-$, $b^+\in R_2^+$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$(s^0r^+)'_{R_1}(t^{-\prime}s_2^0t_2^-b^+-s^0r^+c^-)^+\in R_{1+}. \tag{25}$$

Если уравнение (1) *имеет решение* $x\in R^-_{1\cap 2}$ *при некоторых* $c^-\in R_{1-}$, $b^+\in R_2^+$, *то это решение единственно в* $R^*_{1\cap 2}$ *и может быть определено по формуле* (9).

2) *При выполнении условия* $s_2^0=s^0$ *решение* $x\in R^*_{1\cap 2}$ *уравнения* (1) *с произвольной удовлетворяющей условию* (25) *правой частью* $c^-\in R_1^-$, $b^+\in R_2^+$ *может быть определено через элемент* x_e, *определяемый правой частью формулы* (10), *по формуле* (11).

3) *При выполнении условий* $s_2^0=s^0$, $a_1^0=a_2^0$, $a_j^0\in \operatorname{inv} R_j^0$ $(j=1,2)$ *решение* $x\in R^*_{1\cap 2}$ *уравнения* (1) *с произвольной удовлетворяющей условию* (25) *правой частью* $c^-\in R_1^-$, $b^+\in R_2^+$ *может быть определено через элемент* x_r, *определяемый любой из формул* (13) *по формуле* (14).

Следствие 6. *При выполнении условий теоремы* 12 *уравнение* (1) *с правой частью* $c^-=b^+=e$ *решений в* $R^*_{1\cap 2}$ *не имеет.*

Следствие 7. *При выполнении общих условий теоремы* 12 *и условия* $a_2^0\in \operatorname{inv} R_2^0$ *уравнение* (1) *не имеет в* $R^*_{1\cap 2}$ *ни одной абстрактной резольвенты.*

7. Из теорем 4, 9, 12 вытекает такое предложение.

Предложение 1. *Пусть* R_1, R_2 — *ассоциативные кольца с общим умножением и единицей* $e\in R_{1\cap 2}$; p^+, p^- — *коммутирующие проекторы*

$R_{1\cup 2}\to R_{1\cup 2}$ *такие, что* (R_j^+, R_j^-) *ФП* $R_j\,(j=1,2)$ *и выполняется условие* (4). *Если коэффициенты* $a_j\in \operatorname{inv} R_j^*\,(j=1,2)$, *причем элемент* a_2' *допускает в* R_2 *н. п. l. ф.* (6), *а элемент* $a:=(a_1r_2^+)'_{R_1}$ *допускает в* R_1 *н.* (+, 0). *п. r. ф.* (7), *при которой существует обратный* $[t^-]'_{R_2^*}$ *либо допускает н.* (—). *п. r. ф.* (7), *то при разрешимости в* $R^*_{1\cap 2}$ *уравнения* (1) *с правой частью* $c^-\in R_1^-$, $b^+\in R_2^+$, *удовлетворяющей условию согласования* (22), *одно из его решений в* $R^*_{1\cap 2}$ *может быть определено по формуле* (23).

8. Дополнительный результат и заключительные замечания.

Теорема 13. *Пусть* R_1, R_2 — *ассоциативные кольца с общим умножением и единицей* $e\in R_{1\cap 2}$; p^+, p^- — *коммутирующие проекторы* $R_{1\cup 2}\to R_{1\cup 2}$ *такие, что* (R_j^+, R_j^-) — *ФП* R_j $(j=1,2)$ *и выполняется условие* (4).

Если коэффициенты $a_j\in\operatorname{inv} R_j$ $(j=1,2)$ *таковы, что элемент* a_2' *допускает в* R_2 *н. п. l. ф.* (6), *а элемент* $a:=(a_1r_2^+)'_{R_1}$ *допускает в* R_1 *представление*

$$a=t^-s^0r^+v^-\,(t^-, v^-\in R_1^-;\qquad s^0\in R_1^0,\quad r^+\in R_1^+),$$

в котором t^- — *правильный элемент;* t^-, r^+, v^- — *нормированы и* $v^-\in \operatorname{inv}(R_1^-, R_1^+)$, *то для разрешимости в* $R^*_{1\cap 2}$ *уравнения* (1) *с правой частью* $c^-\in R_1^-$, $b^+\in R_2^+$ *достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$(s^0r^+)'_{R_1}(t^{-\prime}s_2^0t_2^-b^+ - s^0r^+v^-c^-)^+\in R_{1+}.$$

При выполнении этого условия одно из решений $x\in R^*_{1\cap 2}$ *уравнения* (1) *может быть определено по формуле*

$$x=r_2^+t^-\{(t^{-\prime}s_2^0t_2^-b^+)^+ + (s^0r^+v^-c^-)_-\}.$$

Укажем, что при $R_1=R_2=R$, $a_1=e$, $c^-=0$, $a:=a_2$ уравнение (1) с неизвестным $x\in R^*$ переходит в W — HRE:

$$[ax^+]^+=b^+\,, \tag{26}$$

изученное в [6]. К виду (26) можно, в частности, привести задачу Гильберта на оси в постановке, приведенной в [8]; уравнение Винера — Хопфа; систему интегральных уравнений марковского восстановления [13] и др. В последнем случае $a=a^+\in R^+$.

Методы, развитые в [3], позволяют кроме уравнения (1) аналогично исследовать и ряд других уравнений в кольцах с факторизационными парами [3, 4, 6, 7]. В том числе — уравнения в R с неизвестными x, x^+, x_-, y^- и заданными $a_{ik}\in\operatorname{inv} R\,(i,k=1,2)$; $b^+\in R^+$, $c^-\in R^-$, $b\in R$:

$$\begin{cases}(a_{11}x^+a_{12})^+=b^+,\\ (a_{21}y^-a_{22})^-=c^-,\end{cases}\quad \begin{cases}(a_{11}xa_{12})^+=b^+\,,\\ (a_{21}xa_{22})^-=c^-\,,\end{cases}$$

$$a_{11}x^+a_{12}+a_{21}x_-a_{22}=b.$$

Последнее из этих уравнений включает в числе других ряд постановок задачи для известного интегрального уравнения типа свертки с двумя ядрами — транспонированного к изучаемому в работе [1] уравнению (*) [1, 2, 11, 12].

Для уравнений, «подобных» операторным из [14], все же сохраняются естественные при совпадении p^+, p^- с единичным оператором трудности.

Аналогично (1) можно исследовать, например, уравнения, получающиеся из (1) и приведенного ниже уравнения (27) изменением порядка сомножителей. Это обстоятельство полезно при рассмотрении уравнения (1) в кольце квадратных матриц, имеющего прикладное содержание.

Приведем в качестве примера один результат для парного уравнения

$$(a_1x)^- = c^-, \quad (xa_2)^+ = b^+ \tag{27}$$

в аналогичной уравнению (1) постановке.

Теорема 14. *Пусть R_1, R_2 — ассоциативные кольца с общим умножением и единицей $e \in R_{1\cap 2}$; p^+, p^- — коммутирующие проекторы $R_{1\cup 2} \to R_{1\cup 2}$ такие, что (R_j^+, R_j^-) — ФП R_j $(j = 1, 2)$, и выполняется условие* (4).

Если коэффициенты $a_j \in \operatorname{inv} R_j$, причем элементы $a_j'(:= [a_j]_{R_j}')$ допускают в R_j н. п. г. ф.: $a_j' = t_j^- s_j^0 r_j^+$ $(j = 1, 2)$, то при любой удовлетворяющей условию согласования

$$[s_1^0 r_1^+ c^- r_2^{+\prime}]^0 = [t_1^{-\prime} b^+ t_2^- s_2^0]^0 \tag{28}$$

правой части $c^- \in R_1^-$, $b^+ \in R_2^+$ уравнение (27) *имеет в $R_{1\cap 2}^*$ одно и только одно решение, определяющееся по формуле*

$$x = t_1^- \{[t_1^{-\prime} b^+ t_2^- s_2^0]_+ + [s_1^0 r_1^+ c^- r_2^{+\prime}]^-\} r_2^+ .$$

Условия $c^- \in R_1^-$, $b^+ \in R_2^+$ и условие согласования (28) *для таких c^-, b^+ являются необходимыми условиями разрешимости уравнения* (27) *в $R_{1\cap 2}^*$.*

Отметим, что если при условиях теоремы 14 p^0/R_j — кольцевые гомоморфизмы $R_j \to R_j^0$ $(j = 1, 2)$, то условие согласования (28) эквивалентно условию $a_1^0 b^0 = c^0 a_2^0$.

Некоторые дополнительные замечания к теореме 14, в том числе другие условия согласования, имеются в [3].

Общие результаты работы и аналогичные им (в частности, рассматривая алгебраическую сторону вопроса) позволяют упростить получение теорем существования, формул представления решений уравнений типа (*) и др. в различных банаховых алгебрах, если только условие (4) выполнено. В таких приложениях используются решения задачи о факторизации функций и матриц-функций. Опираясь, например, на факторизационные теоремы М. Г. Крейна [8] и непосредственно вытекающие из них теоремы 1, 2, можно сразу получить соответствующие утверждения для парных интегральных уравнений с ядрами $k_j \in L_1$ $(-\infty, \infty)$ или $k_j \in L_{\langle c_j \rangle}$ $(j = 1, 2)$, задачи типа Римана — Гильберта на вещественной или ей параллельной оси, а также ряд результатов, приведенных в [1] и др. работах.

При решении задачи факторизации в некоторых банаховых алгебрах можно использовать теоремы типа теорем Винера — Леви из [15], а в кольцах с факторизационными парами, не обязательно банаховых,— подходы из [4]. В кольце с канонической факторизационной парой [4] решение задачи факторизации существенно упрощается. Это ведет к упрощению и «повышению конструктивности» результатов по характеристике разрешимости уравнений (1). Укажем, что с помощью главных результатов работы [4] о факторизации и вложениях и результатов, приведенных выше, можно сформулировать некоторые условия разрешимости уравнений (1), (26), (27) и др., приведенных в терминах обратимости, вообще говоря, в другом кольце элементов, строящихся по коэффициентам.

Заметим, что некоторые сведения об абстрактных уравнениях (1) и др. приведены в [16]. Отметим также, что по указанным выше уравнениям в R, $R_{1\cap 2}$, $R_{1\cup 2}$ соответственно может быть поставлена общая задача восстановления и, подобно тому, как это сделано для уравнения (*) в [17], изучены некоторые ее случаи.

1. *Полетаев Г. С.* Парное уравнение типа свертки с ядрами из различных банаховых алгебр // Укр. мат. журн.— 1991.—43, № 6.—С.803—813.
2. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* О парном интегральном уравнении и его транспонированном. I // Теорет. и прикл. математика.— 1958.— Вып. 1.— С. 58—81.

3. *Полетаев Г. С.* Абстрактные аналоги интегральных уравнений с ядрами, зависящими от разности аргументов, в ассоциативных кольцах.— М., 1980.— 62 с. Деп. в ВИНИТИ, № 3322 —79.
4. *McNabb A.*, *Schumitzky A.* Factorization of operators. I. Algebraic Theory and Examples // J. Funct. Anal.— 1972.— 9, N 3.— P. 262—295.
5. *Нижник Л. П.* Обратная нестационарная задача рассеяния.— Киев : Наук. думка, 1973.— 182 с.
6. *Полетаев Г. С.* К теории абстрактных аналогов некоторых уравнений типа свертки // Мат. физика.— 1978.— Вып. 24.— С. 104—106.
7. *Полетаев Г. С.* Об уравнениях и системах одного типа в кольцах с факторизационными парами.— Киев, 1988.— 20 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики : 88.31).
8. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // Успехи мат. наук.— 1958.— 13,— Вып. 5.— С. 3—120.
9. *Полетаев Г. С.* О парных интегральных уравнениях с ядрами из различных банаховых алгебр. I // Функцион. анализ.— 1974.— Вып. 3.— С. 134—145.
10. *Гохберг И. Ц.*, *Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения.— М. : Наука, 1967.— 508 с.
11. *Гохберг И. Ц.*, *Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.— М. : Наука, 1971.— 352 с.
12. *Гахов Ф. Д.*, *Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки.— М. : Наука, 1978.— 296 с.
13. *Королюк В. С.* Стохастические модели систем.— Киев : Наук. думка, 1989.— 208 с.
14. *Далецкий Ю. Л.*, *Крейн М. Г.* Устойчивость дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1970.— 535 с.
15. *Крейн М. Г.* О некоторых новых банаховых алгебрах и теоремах типа теорем Винера — Леви для рядов и интегралов Фурье // Мат. исследования.— 1966.— 1, вып. 1.— С. 82—109.
16. *Полетаев Г. С.* О некоторых интегральных уравнениях, встречающихся в задачах механики и о теории их абстрактных аналогов // VIII Воронеж. зим. мат. шк. Тез. докл.— Воронеж, 1974.— С. 87—89.
17. *Полетаев Г. С.* О восстановлении ядер некоторых интегральных уравнений по решениям.— М., 1974.— 15 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 1896—74.

Получено 30.05.90