УДК 517.54

Л. А. Яременко

Оценки функционала на классе функций с положительной действительной частью

Установлены точные нижняя и верхняя границы функционала $J(p) = \mathrm{Re}\{\gamma p(z) - zp'(z)/p(z)\}$, $\gamma \leqslant 1$, где $|z| = r$ фиксировано, $0 < r < 1$, $p(z) \in P_n(A, B)$, $-1 \leqslant B < A \leqslant 1$, некоторому классу регулярных в круге функций со значениями из правой полуплоскости.

Установлені точні нижня та верхня границі функціоналу $J(p) = \mathrm{Re}\{\gamma(p(z) - zp'(z)/p(z)\}$, $\gamma \leqslant 1$, де $|z| = r$ фіксоване, $0 < r < 1$, $p(z) \in P_n(A, B)$, $-1 \leqslant B < A \leqslant 1$, для деякого класу регулярних у крузі $|z| < 1$ функцій із значеннями з правої напівплощини.

Обозначим через $P_n(A, B)$, $-1 \leqslant B < A \leqslant 1$, класс регулярных в круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций с положительной действительной частью и разложением $p(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \ldots$, n — целое, $n \geqslant 1$, удовлетворяющих условию $p(z) = \dfrac{1 + Az^{n-1}\omega(z)}{1 + Bz^{n-1}\omega(z)}$, $z \in E$, где $\omega(z)$, $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$, — регулярная в E функция. Класс $P_1(A, B) \equiv P(A, B)$ ранее изучался в работах [1 — 3].

В настоящей статье устанавливаются точные нижняя и верхняя границы функционала

$$J(p) = \mathrm{Re}\{\gamma p(z) - zp'(z)/p(z)\}, \quad \gamma \leqslant 1, \tag{1}$$

где $|z| = r$ фиксировано, $0 < r < 1$, $p(z) \in P_n(A, B)$.

Теорема 1. *Пусть $p(z) \in P_n(A, B)$ и $-n(1 + B)/(A - B) \leqslant \gamma \leqslant 1$. Тогда на окружности $|z| = r < 1$ выполняется точная оценка $J(p) \geqslant l(r)$, где*

$$l(r) = \begin{cases} \dfrac{\gamma A^2 r^{2n} - [(n - 2\gamma)A - nB] r^n + \gamma}{(1 + Ar^n)(1 + Br^n)} = l_1(r), & R_1^0 \geqslant R^+, \\ \{2\sqrt{(a + nA)[b + nB + \gamma(A - B)]} - \\ \quad - n(A + B) - 2c\}/(A - B) = l_2(r), & R_1^0 \leqslant R^+. \end{cases}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$a = \frac{1 - A^2 r^{2n}}{r^{n-1}(1 - r^2)}, \quad b = \frac{1 - B^2 r^{2n}}{r^{n-1}(1 - r^2)}, \quad c = \frac{1 - ABr^{2n}}{r^{n-1}(1 - r^2)},$$

$$R_1^0 = \sqrt{\frac{a + nA}{b + nB + \gamma(A - B)}}, \quad R^+ = \frac{1 + Ar^n}{1 + Br^n}.$$

Доказательство. Опираясь на теорему 1 [4], задачу отыскания оценки снизу $l(r)$ функционала (1) сводим к задаче нахождения минимума функции

$$\Phi(w) = \mathrm{Re}\left[\gamma w - \frac{n(w - 1)(A - Bw)}{(A - B)w}\right] - \frac{b(d^2 - |w - s|^2)}{(A - B)|w|} \tag{2}$$

в круге $|w - s| \leqslant d$, где $w = p(z)$, $|z| = r$, $0 < r < 1$,

$$s = \frac{1 - ABr^{2n}}{1 - B^2 r^{2n}}, \quad d = \frac{(A - B)r^{2n}}{1 - B^2 r^{2n}}, \quad b = \frac{1 - B^2 r^{2n}}{r^{n-1}(1 - r^2)}. \tag{3}$$

Полагая $w = Re^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, получаем из (2)

$$\Phi(w) = \varphi(R, \theta) = \{-n(A + B) + bR + a/R +$$

$$+ [-2c + (nB + \gamma(A - B)) R + nA/R] \cos\theta\}/(A - B), \tag{4}$$

где $a = b(s^2 - d^2)$, $c = bs$.

Докажем, что минимум функции $\varphi(R, \theta)$ в круге $|Re^{i\theta} - s| \leqslant d$ достигается на его диаметре $\theta = 0$. Продифференцировав (4), будем иметь

$$\partial\varphi(R, \theta)/\partial\theta = Q(R)\sin\theta/(A - B) R,$$

$$\text{где } Q(R) = -[nB + \gamma(A - B)] R^2 + 2cR - nA. \tag{5}$$

Нетрудно убедиться в том, что минимум $Q(R)$ на отрезке $[s - d, s + d]$ достигается в точке $R = s - d$. Покажем, что $Q(s - d) > 0$. С этой целью заметим, что для любых n — целого, $n \geqslant 1$, r, $0 < r \leqslant 1$, и C, $-1 \leqslant C \leqslant 1$, выполняется неравенство

$$\frac{1 - C^2 r^{2n}}{r^{n-1}(1 - r^2)} \geqslant \frac{1 - r^{2n}}{r^{n-1}(1 - r^2)} = \frac{1}{r^{n-1}} + r^{n-1} + \frac{1}{r^{n-3}} + r^{n-3} + \ldots \geqslant n. \tag{6}$$

Используя оценку (6), неравенство $\gamma \leqslant 1$ и равенство $2(1 - ABr^{2n}) \times (1 - Ar^n)(1 - Br^n) = (1 - A^2r^{2n})(1 - Br^n)^2 + (1 - B^2r^{2n})(1 - Ar^n)^2$, получаем при $n > 1$

$$Q(s - d) = \frac{1 - A^2 r^{2n}}{r^{n-1}(1 - r^2)} - nA + \left(\frac{1 - Ar^n}{1 - Br^n}\right)^2 \times$$
$$\times \left[\frac{1 - B^2 r^{2n}}{r^{n-1}(1 - r^2)} - nB - \gamma(A - B)\right] \geqslant n(1 - A) +$$
$$+ (s - d)^2 [1 - A + (n - 1)(1 - B)] > 0.$$

При $n = 1$ имеем

$$Q(s - d) \geqslant 2c(s - d) - (s - d)^2 - 1 =$$
$$= \frac{r^2 [(1 - A^2)(1 - Br)^2 + (1 - B^2)(1 - Ar)^2]}{(1 - r^2)(1 - Br)^2} > 0.$$

Таким образом, $Q(R) > 0$ при $R \in [s - d, s + d]$. Но тогда, как следует из формулы (5), минимум функции $\varphi(R, \theta)$ в круге $|Re^{i\theta} - s| \leqslant d$ достигается на диаметре $\theta = 0$. Полагая в (4) $\theta = 0$, приходим к следующей экстремальной задаче: найти минимум функции

$$l(R) = \varphi(R, 0) = \{-n(A + B) - 2c + [b + nB +$$
$$+ \gamma(A - B)] R + (a + nA)/R\}/(A - B)$$

на сегменте $[R^-, R^+]$, где $R^{\mp} = s \mp d$. Заметим, что здесь, в силу соотношения (6) и условия теоремы $\gamma \geqslant -n(1 + B)/(A - B)$ выполняются неравенства $a + nA \geqslant n(1 + A) > 0$, $b + nB + \gamma(A - B) \geqslant n(1 + B) + \gamma(A - B) \geqslant 0$.

Нетрудно показать, что абсолютный минимум $l(R)$ при $R > 0$ достигается в точке $R_1^0 = \sqrt{\dfrac{a + nA}{b + nB + \gamma(A - B)}}$. Докажем, что $R_1^0 > R^-$ при всех $r \in (0, 1)$. Использовав равенство $1 - C^2r^{2n} = (1 + Cr^{n-1})(1 - Cr^{n+1}) - Cr^{n-1}(1 - r^2)$, где $-1 \leqslant C \leqslant 1$, получим

$$(R_1^0)^2 = \frac{(1 + Ar^{n-1})(1 - Ar^{n+1}) + (n - 1) Ar^{n-1}(1 - r^2)}{(1 + Br^{n-1})(1 - Br^{n+1}) + (n - 1) Br^{n-1}(1 - r^2) + \gamma(A - B) r^{n-1}(1 - r^2)}.$$

Нетрудно проверить, что неравенство $(R_1^0)^2 > \dfrac{1 - Ar^{n+1}}{1 - Br^{n+1}}$, справедливо тогда и только тогда, когда $\gamma < \dfrac{1 - Br^{n+1}}{1 - r^2}$. Поскольку в силу условия теоремы $\gamma \leqslant 1$, то последнее неравенство выполняется. В результате имеем

$$(R_1^0)^2 > \frac{1 - Ar^{n+1}}{1 - Br^{n+1}} > \frac{1 - Ar^n}{1 - Br^n} > \left(\frac{1 - Ar^n}{1 - Br^n}\right)^2 = (R^-)^2.$$

Итак, всегда $R_1^0 > R^-$, но не всегда $R_1^0 \leqslant R^+$. Отсюда следует, что минимум $l(R)$ на отрезке $[R^-, R^+]$ при $R_1^0 \geqslant R^+$ достигается в точке $R = R^+$ и равен $l(R^+) = l_1(r)$. Если же $R_1^0 \leqslant R^+$, то этот минимум достигается при $R = R_1^0$, $l(R_1^0) = l_2(r)$.

Экстремальная функция имеет вид [4]

$$p_0(z) = \frac{1 + Az^{n-1}\omega_0(z)}{1 + Bz^{n-1}\omega_0(z)}, \quad -1 \leqslant B < A \leqslant 1,$$

где $\omega_0(z) = z$ при $R_1^0 \geqslant R^+$, а при $R_1^0 \leqslant R^+$ — определяется формулой $\omega_0(z) = z(z-u)/(1-\bar{u}z)$, в которой постоянная u, $|u| < 1$, находится из условия $\operatorname{Re} p_0(z) = R_1^0$ при $z = r$.

Теорема 2. *Пусть $p(z) \in P_n(A, B)$ и $\gamma \leqslant 1$. Тогда на окружности $|z| = r < 1$ справедлива точная оценка $J(p) \leqslant L(r)$, где*

$$L(r) = \begin{cases} \dfrac{\gamma A^2 r^{2n} + [(n - 2\gamma)A - nB]r^n + \gamma}{(1 - Ar^n)(1 - Br^n)} = L_1(r), & R_2^0 \leqslant R^-, \\ \{2c - n(A + B) - \\ - 2\sqrt{(a - nA)[b - nB - \gamma(A - B)]}\}/(A - B) = L_2(r), & R_2^0 \geqslant R^-. \end{cases}$$

Здесь введены такие обозначения:

$$a = \frac{1 - A^2r^{2n}}{r^{n-1}(1 - r^2)}, \quad b = \frac{1 - B^2r^{2n}}{r^{n-1}(1 - r^2)}, \quad c = \frac{1 - ABr^{2n}}{r^{n-1}(1 - r^2)},$$

$$R_2^0 = \sqrt{\frac{a - nA}{b - nB - \gamma(A - B)}}, \quad R^- = \frac{1 - Ar^n}{1 - Br^n}.$$

Доказательство. На основании теоремы 1 [4] задачу отыскания оценки сверху $L(r)$ функционала (1) сводим к задаче нахождения максимума функции

$$\Psi(w) = \operatorname{Re}[\gamma w - n(w - 1)(A - Bw)/(A - B)w] + \\ + b(d^2 - |w - s|^2)/(A - B)|w| \qquad (7)$$

в круге $|w - s| \leqslant d$, где величины s, d и b имеют вид (3).

Полагая в (7) $w = x + iy$, приходим к задаче определения максимума функции

$$\Psi(w) = \psi(x, y) = \gamma x - \frac{n}{A - B}\left[A + B(1 - x) - \frac{Ax}{x^2 + y^2}\right] + \\ + \frac{b(d^2 - s^2 - x^2 - y^2 + 2sx)}{(A - B)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

в круге $(x - s)^2 + y^2 \leqslant d$. Имеем

$$\partial\psi(x, y)/\partial y = -yG(x, y)/(A - B)(x^2 + y^2)^2, \qquad (8)$$

где

$$G(x, y) = 2nAx + b\sqrt{x^2 + y^2}(d^2 - s^2 + x^2 + y^2 + 2sx) \geqslant \\ \geqslant 2n(s - d)[A + (s - d)^2] = \\ = 2n(s - d)\frac{(1 + B)(1 - Ar^n)^2 + (A - B)(1 - ABr^{2n})}{(1 - Br^n)^2} > 0.$$

Поскольку $G(x, y) > 0$ в круге $(x-s)^2 + y^2 \leqslant d$, то из равенства (8) следует, что функция $\psi(x, y)$ в указанном круге принимает максимум при $y = 0$.

Таким образом, задача сводится к исследованию функции $L(R) = \psi(R, 0) = \{2c - n(A+B) - [b - nB - \gamma(A-B)]R - (a - nA)/R\}/(A-B)$ на отрезке $[R^-, R^+]$.

Нетрудно проверить, что в случае $\gamma \leqslant 1$ абсолютный максимум функции $L(R)$ при $R > 0$ достигается в точке $R_2^0 = \sqrt{\dfrac{a - nA}{b - nB - \gamma(A-B)}}$. Можно показать, что всегда $R_2^0 < R^+$. Но возможен случай, когда $R_2^0 \leqslant R^-$, т. е. возможен случай, когда функция $L(R)$ на отрезке $[R^-, R^+]$ принимает максимум в точке $R = R^-$. Тогда $L(R^-) = L_1(r)$. Если же $R_2^0 \geqslant R^-$, то этот максимум достигается при $R = R_2^0$ и равен $L(R_2^0) = L_2(r)$.

Примечание. При $n = 1$ из теорем 1 и 2 вытекают соответствующие результаты работы [3].

Полученные в работе оценки могут быть применены к изучению класса $\Sigma_n^*(A, B)$, $-1 \leqslant B < A \leqslant 1$, однолистных звездных в круговой области $0 < |z| < 1$ функций $F(z) = 1/z + b_{n-1}z^{n-1} + b_n z^n + \dots$, удовлетворяющих в этой области условию $-\dfrac{zF'(z)}{F(z)} = p(z) \in P_n(A, B)$.

Теорема 3. *Радиус выпуклости класса* $\Sigma_n^*(A, B)$ — *наименьший на* $(0, 1)$ *корень уравнения* $A^2 r^{2n} + [nB - A(n-2)] r^n + 1 = 0$, *если* $R_1^0 \geqslant R^+$, *или уравнения* $2\sqrt{(a + nA)[b + nB + A - B]} = n(A+B) + 2c$, *если* $R_1^0 \leqslant R^+$. *Величины* a, b, c, R_1^0 *и* R^+ *определяются теоремой* 1, *где* $\gamma = 1$.

Примечание. При $n = 1$ радиус выпуклости соответствующего класса получен в работе [3], при $n = 1$, $A = 1 - 2\alpha$, $0 \leqslant \alpha < 1$, и $B = -1$ — в работе [5].

1. *Jakubowski Z. L.* On the coefficients of Caratheodory functions // Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci. math., astron. et. phys.— 1971.— **19**, N 9.— P. 805—809.
2. *Janowski W.* Some extremal problems for certain families of analytic functions. I // Ibid.— 1973.— **21**, N 1.— P. 297—410.
3. *Ahn V. V., Tuan P. D.* Meromorphic starlike univalent functions // Bull. Austral. Math. Sol.— 1984.— **30**.— P. 395—410.
4. *Яременко Л. А.* Об областях значений одной системы функционалов // Задачи гидродинамики со свободными границами.— Новосибирск, 1984.— Вып. 64.— С. 159—163.
5. *Зморович В. А.* О границах выпуклости порядка α в круге $|z| < 1$ и круговой области $0 < |z| < 1$ // Мат. сб.— 1965.— **68**, № 1.— С. 518—526.

Кубан. ун-т

Получено 26.11.87