УДК 517.9

В. Г. Самойленко

Дифференциально-геометрическая структура и спектральные свойства нелинейных вполне интегрируемых динамических систем типа Мельникова

Рассматривается предложенный В. К. Мельниковым новый класс нелинейных динамических систем, которые являются обобщением динамической системы Кортевега де Фриза. Изучаются дифференциально-геометрические и спектральные свойства динамических систем типа В. К. Мельникова, приведен их гамильтонов вид, установлено так называемое градиентное тождество. Описан класс конечнозонных потенциалов оператора Штурма — Лиувилля, удовлетворяющих данным динамическим системам.

Розглядається запропонований В. К. Мельниковим новий клас нелінійних динамічних систем, які є узагальненням динамічної системи Кортевега де Фріза. Вивчаються диференціально-геометричні та спектральні властивості динамічних систем типу В. К. Мельникова, дано їх гамільтонів запис, встановлена так звана градієнтна тотожність. Описано клас скінченнозонних потенціалів для оператора Штурма—Ліувілля, що задовольняють даним динамічним системам.

В. К. Мельников [1] предложил новый подход к проблеме нахождения нелинейных интегрируемых систем и ввел новый специальный класс вполне интегрируемых нелинейных динамических систем, обладающих обобщенным представлением типа Лакса — Манакова [2, 3]. В данной статье рассмотрим дифференциально-геометрическую структуру динамических систем В. К. Мельникова и изучим некоторые их спектральные свойства в солитонном и конечнозонном секторе решений.

1. Солитонный сектор решений. В случае спектральной задачи Штурма—Лиувилля на оси $\mathbb{R}^1$ в работе [1] приведена следующая нелинейная динамическая система:

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j \frac{\partial}{\partial x} |f_j|^2, \tag{1}$$

где $u \in M \simeq \mathcal{S}(\mathbb{R}^1; \mathbb{R}^1)$ — многообразие Шварца, $t \in \mathbb{R}^1$ — эволюционный параметр, $f_j \in L_2(\mathbb{R}^1; \mathbb{C}^1)$ — собственные функции оператора Штурма—Лиувилля L

$$(\lambda + L) f = - f_{xx} + (u + \lambda) f = 0, \tag{2}$$

с собственными значениями $\lambda_j \in \mathbb{R}^1$, $j = \overline{1, n}$, $\varepsilon_j \in \mathbb{R}^1$, $j = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Очевидно, уравнение (1) можно записать в гамильтоновом виде

$$u_t = -\mathcal{L} \operatorname{grad} H - \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j \mathcal{L} \operatorname{grad} \lambda_j, \tag{3}$$

где $H = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \left(\frac{1}{2} u_x^2 - u^3 \right) dx \in \mathcal{D}(M)$, собственные значения задачи (2) $\lambda_j = \lambda_j [u] \in \mathcal{D}(M)$, $j = \overline{1, n}$, рассматриваются как гладкие по Фреше инвариантные функционалы на многообразии M, $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x} : T^*(M) \to T(M)$ — имплектический и нетеровый для (3) оператор. Из (2) и (3) вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1. *Пусть задана спектральная задача* (2), *причем оператор L удовлетворяет условию изоспектральности типа Лакса* $\frac{d}{dt} \sigma(L) = 0$ *для всех $t \in \mathbb{R}^1$ и некоторого векторного поля $du/dt = K[u]$ на многообразии M.*

Тогда векторное поле

$$K[u] \in \operatorname*{span}_{\mathbb{R}^1} \{ \mathcal{L} \operatorname{grad} \gamma_j,\ \mathcal{L} \operatorname{grad} \lambda_k : j \in \mathbb{Z},\ k = \overline{1, n} \}, \tag{4}$$

где $\gamma_j \in D(M)$, $j \in \mathbb{Z}$, составляют бесконечную иерархию гладких на M функционалов, соответствующих асимптотическим при $|\lambda| \to +\infty$ и $|\lambda| \to 0$ разложениям регуляризованного детерминанта [4] *оператора Штурма—Лиувилля* (2).

Доказательство. Обозначим через $\gamma(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}^1$, целую функцию —регуляризованный детерминант оператора Штурма —Лиувилля (2). Собственные значения $\lambda_j \in \mathbb{R}^1$, $j = \overline{1, n}$, — это, по определению, нули функции $\gamma(\lambda)$, т. е. $\gamma(\lambda_j) = 0$, $j = \overline{1, n}$. Поскольку $d\lambda_j/dt = 0$, $j = \overline{1, n}$, то, очевидно, также $d\gamma_j/dt = 0$, $j \in \mathbb{Z}$, где $\gamma(\lambda) \simeq \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \gamma_j \lambda^{-j}$ при $|\lambda| \to +\infty$ и $\gamma(\lambda) \simeq$ $\simeq \sum_{j \in \mathbb{Z}_-} \gamma_j \lambda^{-j}$ при $|\lambda| \to 0$.

С другой стороны, из представления (3) следует градиентное тождество [3]

$$-4\lambda \mathscr{L} \operatorname{grad} \gamma(\lambda) = \mathscr{M} \operatorname{grad} \gamma(\lambda), \tag{5}$$

где $\mathscr{L} = \partial = \partial/\partial x$, $\mathscr{M} = \partial^3 + 2(u\partial + \partial u)$ — согласованная [5] пара имплектических и нетеровых на M операторов для векторного поля (4), $\lambda \in \mathbb{C}^1$. Из тождества (5) находим

$$\{\gamma_j, \gamma_k\}_{\mathscr{L}} = \{\gamma_j \ \gamma_k\}_{\mathscr{M}} = \{\gamma_j, \lambda_p\}_{\mathfrak{N}} = \{\lambda_p, \lambda_m\}_{\mathscr{L}} = \{\lambda_p, \lambda_m\}_{\mathscr{M}} = 0$$

для всех $j, k \in \mathbb{Z}$, $p, m = \overline{1, n}$, где $\{(\cdot), (\cdot)\}_{\mathfrak{N}} = (\operatorname{grad}(\cdot), \ \mathfrak{N} \operatorname{grad}(\cdot))$, $\mathfrak{N} \in$ $\in \{\mathscr{L}, \mathscr{M}\}$, обозначает скобку Пуассона. Отсюда, в частности, следует вложение (4). Кроме того, из (5) также получаем, что для всех $k = \overline{1, n}$ справедливо

$$\operatorname{grad} \lambda_k \in \operatorname*{span}_{\mathbb{R}^1} \{\operatorname{grad} \gamma_j \in T^*(M) : j \in \mathbb{Z}\}.$$

Следствие 1. *Существует такая «бесконечнополиномиальная» функция $f : \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^1$, имеющая особенности в точках $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$, что динамическая система* (1) *может быть записана в следующем формально-алгебраическом виде:*

$$u_t = -\mathscr{L} f(\Lambda) u, \tag{6}$$

где $\Lambda = \mathscr{L}^{-1} \mathscr{M}$ — рекурсионный на M оператор.

Следствие 2. *Динамическая система* (1) (*динамическая система* (6)) *обладает стандартным представлением типа Лакса $dL/dt = [L, P]$ с L-оператором* (2) *и P-оператором специального «бесконечнополиномиального» по $\lambda \in \mathbb{C}^1$ вида с особенностями в точках $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty \in \overline{\mathbb{C}}$.*

Замечание. Утверждение 1 и следствия 1, 2 справедливы и в случае произвольной динамической системы $u_t = K[u]$, заданной на M и обладающей стандартным представлением типа Лакса с условием изоспектральности $\dfrac{d}{dt} \sigma(L) = 0$, где L—соответствующий оператор, входящий в пару Лакса.

2. Конечнозонный сектор решений. Пусть $u \in M \simeq C^{(\infty)}(\mathbb{R}^1 \times$ $\times (2\pi)^{-1}, \mathbb{R}^1)$ — 2π-периодическое функциональное многообразие гладких функций на $\mathbb{R}^1$. Обозначим через $S(x; \lambda)$, $x \in \mathbb{R}^1$, $\lambda \in \mathbb{C}^1$, матрицу монодромии для дифференциального выражения (2). Тогда спектр $\sigma(L)$ оператора L (2) при условии $\sup_{x \in \mathbb{R}^1} |f(x; \lambda)| < \infty$ имеет зонную структуру [3, 4] с границами в точках $\lambda = \lambda_j \in \mathbb{R}^1$, $j = \overline{1, 2N+1}$, где $N \in Z_+$ — число зон, $\dfrac{1}{2} \operatorname{tr} S(x; \lambda) = \Delta(\lambda)$, где $\Delta(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}^1$ — целая аналитическая функция конечного порядка с действительными коэффициентами, $\Delta^2(\lambda_j) = 1$, $j = \overline{1, 2N+1}$.

Если динамическая система $u_t = K[u]$ на M является изоспектральной для оператора L (2), то, очевидно, $d\lambda_j/dt = 0$, $j = \overline{1, N}$, $t \in \mathbb{R}^1$. Отсюда очевидным образом следует, что коэффициенты асимптотического разложения выражения $\gamma(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{\sqrt{\Delta^2(\lambda) - 1}}$ при $|\lambda| \to +\infty$ $\left(\gamma(\lambda) \simeq \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \gamma_j \lambda^{-j}\right)$ и при $|\lambda| \to 0$ $\left(\gamma(\lambda) \simeq \sum_{j \in \mathbb{Z}_-} \gamma_j \lambda^{-j}\right)$ также являются инвариантами динамической системы $u_t = K[u]$. Кроме того, также легко проверить справедливость и в этом случае градиентного тождества (5). Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. *Если динамическая система* $u_t = K[u]$: $K[u] \in \operatorname{span}_{\mathbb{R}^1}\{\mathcal{L}\operatorname{grad}\gamma_j, \mathcal{L}\operatorname{grad}\lambda_k : j \in \mathbb{Z}, k = \overline{1, N}\}$, *то спектр* $\sigma(L)$ *оператора* (2) *подвергается изоспектральной деформации типа Лакса, т. е.* $d\sigma(L)/dt = 0$ *для* $t \in \mathbb{R}^1$, *где как и раньше,* $\mathcal{L} = \partial/\partial x$.

Доказательство утверждения 2 аналогично приведенному выше.

Отметим, что поскольку $\operatorname{grad}\gamma(\lambda) \sim \operatorname{grad}\Delta(\lambda) = S_{12}(x; \lambda)$, $x \in \mathbb{R}^1$, $S(x; \lambda) = \| S_{ij}(x; \lambda) \|$, $i, j = 1, 2$, то

$$\operatorname{grad}\lambda_k \sim \operatorname{grad}\Delta(\lambda_k) = S_{12}(x; \lambda_k) = c_k^{(11)} y_1^2(x, x_0; \lambda_k) + c_k^{(22)} y_2^2(x, x_0; \lambda_k) + \\ + c_k^{(12)} y_1(x, x_0; \lambda_k)\, y_2(x, x_0; \lambda_k), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{7}$$

где $y_1(x, x_0; \lambda)$, $y_2(x, x_0; \lambda)$ — базис решений уравнения (3) с условиями $y_1(x_0, x_0; \lambda) = y_2'(x_0, x_0; \lambda) = 1$, $y_1'(x_0, x_0; \lambda) = y_2(x_0, x_0; \lambda) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^1$ — произвольная фиксированная точка; $\lambda \in \mathbb{C}^1$ — произвольное число; $c_k^{(ij)}$, $i, j = 1, 2$, $k = \overline{1, N}$, — некоторые действительные числа.

Рассмотрим теперь нелинейную динамическую систему вида

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x + \sum_{j=1}^{2N+1} \varepsilon_j \frac{\partial}{\partial x} S_{12}(x; \lambda_j) = K[u], \tag{8}$$

где $\lambda_j \in \mathbb{R}^1$, $j = \overline{1, 2N+1}$, — границы зон спектра $\sigma(L)$ оператора L (2), ε_j, $j = 1, 2N+1$,— некоторые действительные числа, причем в силу определения $S_{12}(x; \lambda) = y_2(x + 2\pi, x; \lambda)$, $x \in \mathbb{R}^1$, $\lambda \in \mathbb{C}^1$. Уравнение (8) можно представить в гамильтоновом виде

$$u_t = K[u] = -\mathcal{L}\operatorname{grad} H - \sum_{j=1}^{2N+1} \varepsilon_j \Delta'(\lambda_j) \operatorname{grad}\lambda_j \tag{9}$$

или в более общем виде

$$u = -\mathcal{L}\operatorname{grad}\Delta(\lambda) + \sum_{j=1}^{2N+1} \varepsilon_j \mathcal{L}\operatorname{grad}\Delta(\lambda_j). \tag{10}$$

Рассмотрим теперь аналитические свойства функции $S_{12}(x; \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}^1$. Известно [2, 5], что $S_{12}(x; \lambda)$ является целой функцией по переменной $\lambda \in \mathbb{C}^1$ и представима в виде

$$S_{12}(x; \lambda) = \tilde{S}_{12}(x; \lambda) \sqrt{(\Delta^2(\lambda) - 1)/P_N(\lambda)}, \tag{11}$$

где $P_N(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}^1$, — некоторый полином степени $2N + 1$,

$$\tilde{S}_{12}(x; \lambda) = -i \prod_{j=1}^{N} (\lambda - \mu_j), \tag{12}$$

причем $\mu_j \in C^1$, $j = \overline{1, N}$,— составляют часть так называемого дополнительного спектра $\sigma_l(L)$ оператора L (2). Если известна динамика спектра $\sigma_l(L)$ в силу динамической системы (10), то согласно [2, 5] решение обратной периодической задачи для уравнения (3) представимо с помощью явной формулы

$$u(x;t)=2\sum_{j=1}^{N}\mu_j(x;t)-\sum_{j=1}^{2N+1}\lambda_j. \tag{13}$$

Принимая во внимание соотношение

$$\frac{d}{dt}S_{12}(x;\mu)=\{\Delta(\lambda),S_{12}(x;\mu)\}_{\mathscr{L}}-\sum_{j=1}^{2N+1}\varepsilon_j\{\Delta(\lambda_j),S_{12}(x;\mu)\}_{\mathscr{L}} \tag{14}$$

и проводя затем вычисления в соответствии с [5], находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu_j(x;t)=-\frac{iS_{12}(x;\lambda)\sqrt{P_N(\mu_j)}}{2(\mu_j-\lambda)\prod\limits_{n\neq j}(\mu_j-\mu_n)}+\sum_{k=1}^{2N+1}\frac{i}{2}\varepsilon_kS_{12}(x;\lambda_k)\times$$
$$\times\sqrt{P_N(\mu_j)}/\left[(\mu_j-\lambda_k)\prod_{n\neq j}(\mu_j-\mu_n)\right]. \tag{15}$$

Отметим также, что используя (13), явную формулу для $u(x;t)\in M$ можно записать через риманову θ-функцию следующим образом [2, 5]:

$$u(x;t)=2\frac{d^2}{dx^2}\ln\Theta(x,\infty)-\sum_{j=1}^{2N+1}\lambda_j+2\sum_{j=1}^{N}\oint_{a_j}d\omega_j(\lambda), \tag{16}$$

где $d\omega_j(\lambda)$, $j=\overline{1,N}$, — базис голоморфных дифференциалов на римановой поверхности Γ функции $z=\sqrt{P_N(\lambda)}$, $\lambda,z\in\mathbb{C}^1$, алгебраический род которой равен числу N; a_j, $b_j\subset\Gamma$, $j=\overline{1,N}$, — базис одномерной группы гомологий $H_1(\Gamma;\mathbb{Z})$ поверхности Γ,

$$\Theta(x;\lambda)=\vartheta(\vec{\omega}(\lambda)-\vec{\alpha}(x-x_0)-\vec{q}), \tag{17}$$

$$\omega_j(\lambda)=\int_{\mu_0}^{\lambda}d\omega_j(\lambda),\quad q_j(x_0,t)=\sum_{j=1}^{N}\omega_j(\mu_k(x_0))+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}b_{jk}-\frac{j}{2},$$
$$b_{jk}=b_{kj}=\oint_{b_j}d\omega_k(\lambda),\quad\oint_{a_k}d\omega_j(\lambda)=\delta_{kj},\quad j,k=\overline{1,N}. \tag{18}$$

Таким образом, решение $u(x;t)\in M$ полностью определено, если изучена «временная» эволюция вектора $\vec{q}\in J(\Gamma)=\mathbb{C}^N/\|\delta_{jk},b_{jk}\|$. Из (15) и (18) находим

$$\frac{dq_j(x_0;t)}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d\omega_j(\lambda)}{d\lambda}\sqrt{\Delta^2(\lambda)-1}-\sum_{k=1}^{2N+1}\frac{1}{2}\varepsilon_k\frac{d\omega_j(\lambda_k)}{d\lambda}\sqrt{\Delta^2(\lambda_k)-1}, \tag{19}$$

откуда при каждом $j=\overline{1,N}$ получаем

$$q_j(x_0;t)=q_j(x_0;t_0)+\frac{1}{2}\left[\frac{d\omega_j(\lambda)}{d\lambda}\sqrt{\Delta^2(\lambda)-1}-\sum_{k=1}^{2N+1}\varepsilon_k\times\right.$$
$$\left.\times\frac{d\omega_j(\lambda_k)}{d\lambda}\sqrt{\Delta^2(\lambda_k)-1}\right](t-t_0). \tag{20}$$

Для динамической системы (8), учитывая представления (9) и (10), имеем

$$q_j(x_0;t)=q_j(x_0;t_0)+4i(t-t_0)\operatorname{reg}\lim_{\lambda\to\infty^+\in\Gamma}\left[\lambda^{5/2}\frac{d\omega_j(\lambda)}{d\lambda}\right]-4i(t-t_0)\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{2N+1}\varepsilon_k\frac{d\omega_j(\lambda_k)}{d\lambda}\sqrt{\Delta^2(\lambda_k)-1}. \tag{21}$$

Используя теперь явное представление [3, 5] для дифференциалов $d\omega_j(\lambda)$, $j=\overline{1, N}$,

$$d\omega_j(\lambda)=\sum_{k=1}^{N} C_{jk}\lambda^{N-k}d\lambda/\sqrt{P_N(\lambda)} \tag{22}$$

и вычисляя $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_k}\sqrt{(\Delta^2(\lambda)-1)/P_N(\lambda)}=p_k$, $k=\overline{1,\ 2N+1}$, окончательно находим для всех $j=\overline{1, N}$;

$$q_j(x_0;\ t)=q_j(x_0;\ t_0)+4i(t-t_0)\operatorname{reg}\lim_{\lambda\to\infty^+\in\Gamma}\lambda^{5/2}\sum_{k=1}^{N} C_{jk}\lambda^{N-k}P_N^{-1/2}(\lambda)-$$

$$-4i(t-t_0)\sum_{k=1}^{2N+1}\varepsilon_k\sum_{s=1}^{N} C_{js}\lambda_k^{N-s}p_k. \tag{23}$$

Тем самым выражение (16) для $u(x;\ t)\in M$ полностью определено в явном аналитическом виде, что и завершает решение задачи описания класса конечнозонных потенциалов в (2), удовлетворяющих нелинейной динамической системе (8).

В заключение отметим, что вырождая риманову поверхность Γ к рациональной при условии, что $\lambda_{2N+1}\to 0$, из (16) и (23) можно получить явные формулы для решений солитонного типа динамической системы (8), редуцирующейся в динамическую систему (1) в силу (7).

Ясно также, что описанная выше методика изучения полной интегрируемости нелинейной динамической системы Мельникова (1) может быть использована для исследования произвольных нелинейных динамических систем вида (3), обладающих изоспектральным L-оператором типа Лакса.

1. *Мельников В. К.* Новый метод получения нелинейных интегрируемых систем.— Дубна, 1988.— 23 с.— (Препринт / Объед. ин-т ядер. исслед; № Р 2-88-728).
2. *Теория* солитонов: метод обратной задачи/В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский.— М. : Наука, 1980.— 319 с.
3. *Манаков С. В.* Метод обратной задачи рассеяния и двумерные эволюционные уравнения // Успехи мат. наук.— 1976.— **31**, № 5.— С. 245—246.
4. *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов.—М. : Наука, 1986.— 527 с.
5. *Интегрируемые* динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты / Ю. А. Митропольский, Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский, В. Г. Самойленко.— Киев : Наук. думка, 1987.— 296 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 22.05.89