УДК 517.958

Н. В. Салтанов

Аналоги обобщенных гидродинамических потенциалов в теории уравнений Ламе и Максвелла

В едином подходе в определенном классе ортогональных координатных систем получены представления общих решений систем уравнений Ламе и Максвелла через обобщенные скалярные потенциалы, являющиеся аналогами предложенных автором ранее обобщенных потенциалов теории газодинамических полей. Проведено сопоставление полученных представлений с известными в теориях электромагнетизма и упругости представлениями Герца, Уиттекера, Дебая, Бейтмена и Морса — Фешбаха.

За єдиним підходом в певному класі ортогональних координатних систем одержано зображення загальних розв'язків систем рівнянь Ламе і Максвела через узагальнені скалярні потенціали, котрі є аналогами запропонованих автором раніше узагальнених потенціалів теорії газодинамічних полів. Проведено співставлення одержаних зображень з відомими в теоріях електромагнетизму і пружності зображеннями Герца, Уіттекера, Дебая, Бейтмена и Морса — Фешбаха.

1. Обратимся к системе уравнений Максвелла в отсутствие зарядов и токов

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathbf{E}\right),\ \operatorname{rot}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathbf{E}\right)=-\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\tau},\tag{1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H}=0,\ \operatorname{div}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathbf{E}\right)=0,\ d\tau=dt/\sqrt{\varepsilon\mu}.\tag{2}$$

Здесь использованы принятые обозначения. Комбинируя первые и вторые уравнения (1) и (2), записываем их в форме Зильберштейна — Бейтмена [1, 2]

$$\operatorname{rot}\mathbf{Q}=i\partial\mathbf{Q}/\partial\tau,\tag{3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{Q}=0,\tag{4}$$

$$\mathbf{Q}=\mathbf{H}-i\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathbf{E},\ i=\sqrt{-1}.\tag{5}$$

Обратимся к уравнению Ламе

$$\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}-\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial\tau^2}=0,\ \ d\tau\equiv c_s dt,\ \ \varepsilon\equiv\frac{c_s^2}{c_e^2},\tag{6}$$

где $\mathbf{u}$ — смещение, c_s и c_e — скорости распространения волн сдвига и сжатия соответственно. Представляя вектор упругого смещения в виде потенциальной и соленоидальной составляющих, имеем

$$\mathbf{u}=\nabla\Phi+\mathbf{w},\ \left(\frac{\Delta}{\varepsilon}-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\Phi=0,\tag{7}$$

$$\left(\operatorname{rot}\operatorname{rot}+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\mathbf{w}=0,\tag{8}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{w}=0.\tag{9}$$

Систему уравнений для соленоидальной составляющей упругого смещения (8) и (9) представим в виде системы, состоящей из уравнения (9) и следующих трех линейных уравнений первого порядка:

$$\operatorname{rot}\mathbf{w}=\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\tau},\ \operatorname{rot}\mathbf{a}=-\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial\tau},\ \operatorname{div}\mathbf{a}=0.\tag{10}$$

Здесь $\mathbf{a}$ — соленоидальный вектор, связанный с углом поворота φ элемента объема соотношением $2\varphi=(\partial\mathbf{a}/\partial\tau)$. Комбинируя первое и второе уравнения (10), (9) и третье уравнение (10), приходим к уравнениям (3) и (4), где

$$\mathbf{Q}=\mathbf{w}-i\mathbf{a}.\tag{11}$$

Отметим, что система уравнений (15.4)—(15.6) курса [3] получается из системы (9) и (10) дифференцированием их левых и правых частей по времени.

2. Обобщенный комплексный потенциал вектора $\mathbf{Q}$, удовлетворяющего системе уравнений (3) и (4), введем аналогично обобщенным потенциалам теории одномерных неустановившихся и двухмерных установившихся газодинамических полей соответственно, в переменных спидографа и годографа [4] и обобщенному потенциалу поля Громеки [5]. При этом рассмотрение проведем в ортогональной системе координат (x_1, x_2, x_3). Исключая из второй компоненты уравнения (3) величину Q_3 с помощью третьей компоненты указанного уравнения, записываем

$$\frac{h_2}{h_1h_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{h_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}+i\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial x_3}\right)(h_1Q_1)=\left(\frac{h_2}{h_1h_3}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{h_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)(h_2Q_2),\tag{12}$$

где величины h_1, h_2 и h_3 — коэффициенты Ламе. Будем требовать коммутируемость дифференциальных операторов, входящих в уравнение (12). В результате придем к следующим условиям:

$$h_1 = 1, \ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{h_2}{h_3} = 0. \tag{13}$$

Пусть условия (13) выполнены. Решая уравнение (12) и используя третью компоненту уравнения (3), получаем

$$\mathbf{Q} = \Delta \frac{\partial (qS)}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 (qS)}{\partial \tau^2} \mathbf{e}_1 + i\nabla \frac{\partial (qS)}{\partial \tau} \times \mathbf{e}_1. \tag{14}$$

Здесь S — обобщенный комплексный потенциал, $\mathbf{e}_1$ — орт, касательный к координатной линии x_1, q — множитель, который будет определен ниже. Подставляя выражение (14) в первую компоненту уравнения (3), имеем

$$\left(\Delta^* - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)(qS) = 0, \tag{15}$$

$$\Delta^* = \Delta - \varkappa_h \frac{\partial}{\partial x_1}, \ \varkappa_h \equiv \frac{\partial (h_2 h_3)}{h_2 h_3 \partial x_1}, \tag{16}$$

где Δ — оператор Лапласа. Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что вектор $\mathbf{Q}$, определяемый соотношениями (14)—(16), тождественно удовлетворяет уравнению неразрывности (4). Таким образом, задача определения комплексного векторного поля $\mathbf{Q}$, удовлетворяющего уравнениям (3) и (4), при принятых допущениях относительно геометрии ортогональных систем сведена к одному линейному однородному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка (15) для определения комплексного скалярного потенциала S. Если этот потенциал найден, то вектор $\mathbf{Q}$ определится выражением (14). Следует отметить, что обобщенный потенциал поля $\mathbf{Q}$, определяемый соотношениями (14)—(16), аналогичен предложенным автором ранее обобщенным потенциалам теории газодинамических полей [4] не только по способу их ввода, но и по виду зависимости от них соответствующих величин.

3. Как следует из соотношений (1) и (8), в случае простых гармонических колебаний, происходящих с частотой ω, величины $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{w}$ удовлетворяют уравнению

$$(\mathrm{rot} - k)(\mathrm{rot} + k)\mathbf{F} = 0, \ \mathbf{F} = \{\mathbf{H}, \mathbf{E}, \mathbf{w}\}, \ k = \left\{\sqrt{\varepsilon\mu}\,\omega, \ \frac{\omega}{c_s}\right\}. \tag{17}$$

Учитывая, что операторы $(\mathrm{rot} - k)$ и $(\mathrm{rot} + k)$ коммутируют друг с другом, решение уравнения (17) представляем в виде суперпозиции двух полей Громеки, различающихся знаком параметра завихренности

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \ \mathrm{rot}\, \mathbf{F}_\alpha = (-1)^{\alpha+1} k \mathbf{F}_\alpha, \ \alpha = 1, 2. \tag{18}$$

Пусть выполнены условия (13). Аналогично подходу, использованному при вводе газодинамических потенциалов [4], решение уравнений (18) представим в виде [5]

$$\mathbf{F}_\alpha = \nabla \frac{\partial (qS_{r\alpha})}{\partial x_1} + k^2 q S_{r\alpha} \mathbf{e}_1 + (-1)^{\alpha+1} k \nabla (qS_{r\alpha}) \times \mathbf{e}_1, \tag{19}$$

$$(\Delta^* + k^2)(qS_{r\alpha}) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \tag{20}$$

где $S_{r\alpha}$ — действительные обобщенные потенциалы, оператор Δ^* определяется согласно (16), множитель q будет определен ниже. Подставляя выражения (19) в первое из соотношений (18), имеем

$$\mathbf{F} = \nabla \frac{\partial q (S_{r1} + S_{r2})}{\partial x_1} + k^2 q (S_{r1} + S_{r2}) \mathbf{e}_1 + k\nabla [q (S_{r1} - S_{r2})] \times \mathbf{e}_1. \tag{21}$$

В гидромеханике математическому исследованию потоков (полей) Громеки посвящено значительное количество работ отечественных и зарубежных авторов. Результаты этих исследований могут оказаться полезными при анализе задач теории упругости и электромагнетизма.

4. Пусть выполнены условия (13). Тогда справедливо следующее представление общего решения уравнения Ламе (6):

$$\mathbf{u} = \nabla\left(\Phi_1 + \frac{\varepsilon - 1}{2} x_1 q S_e\right) + \nabla(q\chi) \times \mathbf{e}_1 + qS_e\mathbf{e}_1, \tag{22}$$

$$\left(\Delta^* - \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\{qS_e,\ q\chi\} = 0, \tag{23}$$

$$\left(\Delta - \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\Phi_1 - \frac{(1-\varepsilon)^2}{2} x_1 \frac{\partial^2(qS_e)}{\partial\tau^2} +$$

$$+ \frac{\varkappa_h}{2}\left[1 + \varepsilon - (1-\varepsilon)\, x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\right](qS_e) = 0. \tag{24}$$

Здесь величины S_e, Φ_1 и χ — обобщенные потенциалы. Обобщенный потенциал S_e введен по аналогии с обобщенными газодинамическими потенциалалами [4]. В статическом ($\partial/\partial\tau = 0$) случае уравнение (24) заметно упрощается. Если к тому же $\varkappa_h = 0$, т. е. $h_2 = h_2(x_2, x_3)$, $h_3 = h_3(x_2, x_3)$, то оно переходит в уравнение Лапласа ($\Delta\Phi_1 = 0$).

Отвлекаясь от физического значения вектора $\mathbf{u}$ и полагая в соотношениях (22)—(24) $\varepsilon = 1$, получаем соответствующее представление общего решения векторного волнового уравнения $(\Delta - \partial^2/\partial\tau^2)\ \mathbf{u} = 0$. При этом заметим, что для $\varkappa_h = 0$ и $q = 1$ все три обобщенных потенциала S_e, χ и Φ_1 удовлетворяют скалярным волновым уравнениям. Кроме того, ряд актуальных вопросов теории и приложений линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных изучен в работах [2, 6—9].

5. Пусть наряду с условиями (13) выполнены следующие условия:

$$h_2h_3 = f_1(x_1)\, g_1(x_2,\ x_3),\ f_1 = 1,\ x_1^2. \tag{25}$$

Тогда уравнения (15),) (23) и (20) сводятся соответственно к обычному волновому уравнению и уравнению Гельмгольца при $q = 1$, x_1

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\{S,\ S_e,\ \chi\} = 0, \tag{26}$$

$$(\Delta + k^2)\, S_{r\alpha} = 0, \quad \alpha = 1{,}2. \tag{27}$$

Важно отметить, что среди приведенных в [10] ортогональных координатных систем, в которых переменные в уравнениях (26) и (27) разделяются, условиям (13) удовлетворяют прямоугольная система ($x_1 = x$, y или z), три цилиндрических (круговая, эллиптическая и параболическая; $x_1 = z$), а также сферическая и коническая системы ($x_1 = R$, где R — радиус).

6. Сопоставим приведенные выше представления решений систем уравнений Ламе и Максвелла с некоторыми известными представлениями решений указанных систем.

В декартовой системе координат $(x,\ y,\ z)$ при $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_z$ $q = 1$ и $S = iS_i$, где S_i — действительный скаляр, соотношения (14) и (15) представляют собой решение Герца (см., например, соотношения (9) из [1, с. 18]).

Рассмотрим соотношения (20) и (21). Пусть координатная система и множитель q таковы, что уравнения (20) являются уравнениями Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)\, S_{r\alpha} = 0, \quad \alpha = 1,\ 2. \tag{28}$$

Введем новые потенциалы ψ_1 и ψ_2 следующим образом:

$$\psi_1 = k(S_{r1} - S_{r2}),\ \psi_2 = k(S_{r1} + S_{r2}),\ (\Delta + k^2)\{\psi_1,\ \psi_2\} = 0. \tag{29}$$

В результате выражение (21) примет вид

$$\mathbf{F} = \mathbf{M} + \mathbf{N}, \ \mathbf{M} = \nabla (q\psi_1) \times \mathbf{e}_1, \ \mathbf{N} = kq\psi_2 \mathbf{e}_1 + \nabla \frac{\partial (q\psi_2)}{k \partial x_1}. \tag{30}$$

Здесь величины $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ эквивалентны величинам $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$, входящим в выражение (13.1.6) курса [10]. При этом существенно отметить, что ни вектор $\mathbf{M}$. ни вектор $\mathbf{N}$ каждый в отдельности не удовлетворяют уравнению вида (18), можно убедиться в том, что вектор $\mathbf{F}$, определяемый выражениями (30), удовлетворяет уравнению указанного вида при $\chi = \pm \psi$. В сферических координатах представление вида (29), (30) впервые получено Дебаем [1, 11].

Известно [1], что решение системы уравнений (3) и (4) может быть выражено через комплексный вектор Герца $\mathbf{G}$ следующим образом:

$$\mathbf{Q} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{G} + i \operatorname{rot} \partial \mathbf{G} / \partial \tau, \tag{31}$$

$$(\Delta - \partial^2 / \partial \tau^2) \mathbf{G} = 0, \quad \mathbf{G} = \mathbf{\Gamma} - i \mathbf{\Pi}, \tag{32}$$

где $\mathbf{\Pi}$ и $\mathbf{\Gamma}$ — действительные векторы Герца полей электрического и магнитного типов соответственно [1, 9]. Установим связь между комплексным вектором Герца $\mathbf{G}$ и введенным выше обобщенным скалярным потенциалом гидродинамического типа. Для этого рассмотрим следующую специализацию величины $\mathbf{G}$:

$$\mathbf{G} = \nabla K + qS\mathbf{e}_1. \tag{33}$$

Здесь K, q и S — скалярные функции. Подставляя выражение (33) в уравнение (32), с учетом условий (13) приходим к уравнению (15), а также к следующему соотношению:

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) K + \varkappa_h q S = 0. \tag{34}$$

Подставляя выражение (33) в соотношение (31), с учетом условий (13) и уравнения (15) приходим к выражению (14).

Таким образом показано, что при выполнении условий (13) введенному выше обобщенному скалярному потенциалу гидродинамического типа соответствует специализация комплексного вектора Герца (33) и (34). Заметим при этом, что в декартовой системе координат (x, y, z) при $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_z$ представление (31)—(34) переходит в представление Уиттекера [1].

Обратимся к введенному выше представлению (22)—(24) решения уравнения Ламе. Положим

$$qS_e = - \Delta^* (q\Psi), \ \Phi_1 = \Phi + \partial (q\Psi) / \partial x_1 - \frac{1 - \varepsilon}{2} x_1 \Delta^* (q\Psi). \tag{35}$$

Здесь Φ и Ψ — новые обобщенные потенциалы. В результате придем к следующему представлению:

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi + \operatorname{rot} (q\chi \mathbf{e}_1) + \operatorname{rot} \operatorname{rot} (q\Psi \mathbf{e}_1), \ (\Delta / \varepsilon - \partial^2 / \partial \tau^2) \Phi + \partial (q\Pi) / \partial x_1 = 0,$$
$$(\Delta^* - \partial^2 / \partial \tau^2)(q\Psi) = q\Pi, \ \Delta^* (q\Pi) = 0, \ (\Delta^* - \partial^2 / \partial \tau^2)(q\chi) = 0, \tag{36}$$

где Π — промежуточная функция. Пусть $\Pi = 0$ и система координат декартова, цилиндрическая (круговая, эллиптическая, параболическая), сферическая или коническая. Тогда представление (36) является представлением Дебая — Морса — Фешбаха [10—14]. В этом случае оно включает три уравнения в частных производных второго порядка, служащих для определения трех величин Φ, χ и Ψ. В общем случае представление (36) включает четыре уравнения в частных производных второго порядка, служащих для определения четырех величин Φ, χ, Ψ и Π. В этом смысле представление (22)—(24) проще, поскольку оно в общем случае включает три уравнения в частных производных второго порядка, служащих для определения трех величин Φ_1, χ и S_e.

В статическом ($\partial/\partial\tau = 0$) случае при $\Pi = 0$ представление (36) принимает вид

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi_1 + \operatorname{rot}(q\chi\mathbf{e}_1) \quad \Delta\Phi_1 = 0, \ \Delta^*(q\chi) = 0\,(\Phi_1 = \Phi + (\partial(q\Psi)/\partial x_1)).$$

То, что здесь потенциал Φ_1 является гармоническим, следует из уравнений $\Delta\Phi = 0$ и $\Delta^*(q\Psi) = 0$. Таким образом показано, в частности, что в статическом случае представление Дебая — Морса — Фешбаха фактически имеет мощность двух обобщенных потенциалов. В то же время представление (22)—(24) и в статическом случае имеет мощность трех обобщенных потенциалов.

7. Из условий (13) с использованием соответствующих соотношений векторного анализа [15] получаем следующую связь радиуса-вектора текущей точки пространства с координатами x_1, x_2 и x_3:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0(x_\alpha) + x_1\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3, \ |\partial\mathbf{R}_0/\partial x_\alpha|\,\mathbf{e}_\alpha = \partial\mathbf{R}_0/\partial x_\alpha, \quad \alpha = 2, 3, \tag{37}$$

$$\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = 0, \ (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)\,[(\partial\mathbf{R}_0/\partial x_3)^2\,\partial^2\mathbf{R}_0/\partial x_2^2 - (\partial\mathbf{R}_0/\partial x_2)^2\,\partial^2\mathbf{R}_0/\partial x_3^2] = 0. \tag{38}$$

Соотношения (38) представляют собой систему двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных соответственно первого и второго порядка, служащих для определения трех компонент вектора $\mathbf{R}_0$ в функции координат x_2 и x_3. Можно убедиться в том, что координатные поверхности $x_2 = \mathrm{const}$ либо $x_3 = \mathrm{const}$ являются развертывающимися поверхностями [16]. Можно также убедиться в том, что в декартовых, цилиндрических, сферических и конических координатах уравнения (38) удовлетворяются тождественно.

1. *Бейтмен Г.* Математическая теория распространения электромагнитных волн.— М. : Физматгиз, 1958.— 180 с.
2. *Фущич В. И., Никитин А. Г.* Симметрия уравнений Максвелла.— Киев : Наук. думка, 1983.— 200 с.
3. *Зоммерфельд А.* Механика деформируемых сред.— М. : Изд-во иностр. лит., 1954.— 488 с.
4. *Салтанов Н. В* Аналитическая гидромеханика.— Киев : Наук. думка, 1984.— 200 с.
5. *Салтанов Н. В.* Представление обобщенного потенциала в теории однородных винтовых потоков несжимаемой жидкости // Нелинейные задачи мат. физики: Тез. докл. VI Респ. конф. (Донецк, 10—15 сент. 1987 г.)— Донецк: Ин-т прикл. математики и механики АН УССР, 1987.— С. 129.
6. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.* Асимптотические решения уравненений в частных производных.— Киев : Вища шк., 1976.— 592 с.
7. *Луковский И. А., Барняк М. Я., Комаренко А. Н.* Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости.— Киев : Наук. думка, 1984.— 232 с.
8. *Селезов И. Т., Кривонос Ю. Г., Яковлев В. В.* Рассеяние волн локальными неоднородностями в сплошных средах.— Киев : Наук. думка, 1985.— 236 с.
9. *Хижняк Н. А.* Интегральные уравнения макроскопической электродинамики.— Киев : Наук. думка, 1986.— 280 с.
10. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики : В 2-х т.— М. : Изд-во иностр. лит., 1960.— Т. 2.— 896 с.
11. *Дебай П.* Избранные труды.— Л. : Наука, 1987.— 560 с.
12. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.— Киев : Наук. думка, 1981.— 284 с.
13. *Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А.* Дифракция упругих волн.— Киев : Наук. думка, 1978.— 308 с.
14. *Улитко А. Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости.— Киев : Наук. думка, 1979.— 264 с.
15. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления.— М. : Наука, 1965.— 428 с.
16. *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии.— М. : Гостехтеоретиздат, 1956.— 420 с.

Ин-т гидромеханики АН УССР, Киев

Получено 12.01.89