УДК 519.21

И. К. Мацак, А. Н. Пличко

Неравенство Хинчина и асимптотическое поведение сумм $\Sigma\varepsilon_n x_n$ в банаховых решетках

Дается ряд обобщений классического неравенства Хинчина в банаховых решетках. Изучается асимптотика $\| \Sigma_1^n \varepsilon_i x_i \|$.

Дається ряд узагальнень класичної нерівності Хінчина в банахових решітках. Вивчається асимптотика $\| \Sigma_1^n \varepsilon_i x_i \|$.

Исследованию сумм независимых случайных величин (н. с. в.) в банаховых пространствах посвящена значительная библиография [1]. В то же время важному частному случаю банаховых пространств — банаховым решеткам уделялось сравнительно мало внимания [2—5]. Настоящая статья была стимулирована следующим обобщением классического неравенства Хинчина на q-вогнутые ($q < \infty$) банаховы решетки, полученным Море [3, 6, с. 49—50]:

$$C^{-1} \left\| \left(\sum_1^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \right\| \leqslant M \left\| \sum_1^n \varepsilon_i x_i \right\| \leqslant C \left\| \left(\sum_1^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \right\| , \quad (1)$$

где (ε_i) — независимые копии ε, ε — симметричная с. в. Бернулли, $P(\varepsilon = \pm 1) = 1/2$, x_i — элементы банаховой решетки X.

Мы получим некоторые обобщения неравенств (1) и применим их к изучению асимптотики величины $\| \Sigma_1^n \varepsilon_i x_i \|$.

Напомним некоторые определения [6, 7]. Банахова решетка X — это векторная решетка, являющаяся одновременно банаховым пространством со следующим согласованием порядка и нормы: $|x| \leqslant |y| \Rightarrow \|x\| \leqslant \|y\|$, где $|x|$ — модуль элемента $x \in X$. Существует стандартный способ введения в банаховой решетке функциональных операций, в частности операции $(\Sigma_1^n |x_i|^p)^{1/p}$ [6, 1.d]. Поэтому имеет смысл следующее определение.

Определение. *Банахова решетка X называется q-вогнутой, если существует такая константа $D_q(X)$, что*

$$\Big(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q\Big)^{1/q} \leqslant D_q(X) \Big\| \Big(\sum_1^n |x_i|^q\Big)^{1/q} \Big\|, \quad 1 \leqslant q < \infty,$$

$$\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x_i\| \leqslant D_\infty(X) \Big\| \bigvee_{i=1}^n |x_i| \Big\|, \qquad q = \infty$$

для любых элементов $x_1, \ldots, x_n$ из X и любого n.

В качестве примеров банаховых решеток отметим пространства $C[0, 1]$, $L_p(\mu)$ и $V[0, 1]$. Первые два являются банаховыми решетками с обычным поточечным порядком. В пространстве $V[0, 1]$ порядок порождается двойственностью между ним и $C[0, 1]$. Решетка $L_p(\mu)$ q-вогнута при $q \geqslant p$; $V[0, 1]$ q-вогнута при любом $1 \leqslant q \leqslant \infty$; $C[0, 1]$ не является q-вогнутой ни при каком $q < \infty$.

В дальнейшем через $(\xi_i)_1^\infty$ будем обозначать последовательность н. с. в. в банаховой решетке X, $M\xi_i = 0$, $\|\cdot\|$ — норма в X, $\|\xi\|_p = (M\|\xi\|^p)^{1/p}$. Если банахова решетка X несепарабельна, то будем предполагать сепарабельно значность ξ_i. Константа $0 < C_p(X) < \infty$ зависит только от p и X, и в разных местах будет обозначать не обязательно одинаковые величины.

Предложение 1. *Пусть при некотором $q < \infty$ X — q-вогнутая банахова решетка. Тогда для $1 \leqslant p < \infty$ существует такая константа $C_p(X) < \infty$, что*

$$C_p^{-1}(X) \Big\| \Big(\sum_1^n |\xi_i|^2\Big)^{1/2} \Big\|_p \leqslant \Big\| \sum_1^n \xi_i \Big\|_p \leqslant C_p(X) \Big\| \Big(\sum_1^n |\xi_i|^2\Big)^{1/2} \Big\|_p. \qquad (2)$$

Доказательство. Неравенства (2) следуют из (1) при $p = 1$ и $\xi_i = \varepsilon_i x_i$, $i \geqslant 1$. С другой стороны, для $0 < p$, $r < \infty$ существует число $K_{p,r}$ такое, что

$$\Big\| \sum_1^n \varepsilon_i x_i \Big\|_p \leqslant K_{p,r} \Big\| \sum_1^n \varepsilon_i x_i \Big\|_r$$

(см. [6, с. 74]). Следовательно, неравенства (2) справедливы для $1 \leqslant p < \infty$ и $\xi_i = \varepsilon_i x_i$. Так как любые независимые симметричные с. в. $(\xi_i)_1^\infty$ в X не ограничивая общности [1, с. 209] можно считать представленными в виде $\xi_i = \varepsilon_i \bar{\xi}_i$, где $(\varepsilon_i, \bar{\xi}_i)$ независимы в совокупности, для любого i ξ_i и $\bar{\xi}_i$ одинаково распределены, то из теоремы Фубини имеем неравенства (2) для симметричных с. в. $(\xi_i)_1^\infty$. Общий случай получается из безусловности последовательности $(\xi_i)_1^\infty$ [1, с. 239] в $L_p(X)$, известных рассуждений Буркхольдера (см. предложение 2) и оценок в симметричном случае.

Говорят, что банахово пространство X обладает свойством безусловности мартингальных разностей ($X \in UMD$) [8], если для любых X-значных последовательностей мартингальных разностей $(d_i)_1^\infty$, $\|d_i\|_p < \infty$, любых чисел θ_i $(\theta_i = \pm 1)$, всех $n \geqslant 1$ и $1 < p < \infty$

$$\Big\| \sum_1^n \theta_i d_i \Big\|_p \leqslant C_p(X) \Big\| \sum_1^n d_i \Big\|_p. \qquad (3)$$

П р е д л о ж е н и е 2. *Если банахова решетка X обладает свойством UMD, то для любого $1 < p < \infty$ и любой мартингал-разностной последовательности $(d_i)_1^\infty$, $\| d_i \|_p < \infty$ справедливы неравенства*

$$C_p^{-1}(X) \left\| \left(\sum_1^n | d_i |^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leqslant \left\| \sum_1^n d_i \right\|_p \leqslant C_p(X) \left\| \left(\sum_1^n | d_i |^2 \right)^{1/2} \right\|_p .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно [8], что если банахово пространство $X \in UMD$, то оно суперрефлексивно. Суперрефлексивное пространство имеет тип больше 1 [9, с. 91]. Отсюда следует [6, с. 92], что банахова решетка X q-вогнута при некотором $q < \infty$. Пусть последовательность $(\varepsilon_i)_1^\infty$ такая, что совокупности $(\varepsilon_i)_1^\infty$ и $(d_i)_1^\infty$ независимы между собой. Тогда из (1) и неравенства Кахана [6, с. 74] имеем

$$C_p^{-1}(X) \left\| \left(\sum_1^n | d_i |^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leqslant \left\| \sum_1^n d_i \varepsilon_i \right\|_p \leqslant C_p(X) \left\| \left(\sum_1^n | d_i |^2 \right)^{1/2} \right\|_p .$$

Отсюда и из оценки (3) получаем неравенства предложения 2.

Отметим, что пространства $L_p(\mu) \in UMD$ при $1 < p < \infty$, пространства Орлича $L_M \in UMD$, когда M и M^* удовлетворяют Δ_2-условию [10].

З а м е ч а н и е. Неравенства (2) при $1 < p < \infty$ справедливы для любой мартингал-разностной последовательности в R^1 (неравенства Буркхольдера). В бесконечномерном случае это не всегда так. Например, в банаховой решетке $L_1[0, 1]$, которая q-вогнута, при любом $1 \leqslant q < \infty$ существует мартингал-разностная последовательность, для которой неравенства (2) неверны.

Действительно, если бы в $L_1[0, 1]$ выполнялись неравенства предложения 2, то имели бы место и неравенства (3), т. е. $L_1[0, 1] \in UMD$, что приводит к противоречию, поскольку $L_1[0, 1]$ нерефлексивно.

Приведем несколько вспомогательных утверждений.

Л е м м а 1. *Пусть X — банахово пространство, $x_i \in X$, $i = \overline{1, n}$. Тогда для любого $k \geqslant 1$*

$$M \left\| \sum_1^n \varepsilon_i x_i \right\|^{2k} \leqslant (2k-1)^k \left(M \left\| \sum_1^n \varepsilon_i x_i \right\|^2 \right)^k .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 1 содержится в доказательстве теоремы 1. e. 13 [6, с. 76].

Л е м м а 2. *Пусть для некоторого $q < \infty$ X — q-вогнутая банахова решетка, $x_i \in X$, $i = \overline{1, n}$. Тогда*

$$\left(M \left\| \sum_1^n \varepsilon_i x_i \right\|^2 \right)^{1/2} \leqslant K_q \left\| \left(\sum_1^n | x_i |^2 \right)^{1/2} \right\| ,$$

где $K_q = D_r(X) B_r$, $r = \max(2, q)$, $B_r = \sqrt{2}\,(\Gamma((r+1)/2)/\sqrt{\pi})^{1/r}$ — константа Хинчина, $B_2 = 1$, $D_r(X)$ — константа в определении q-вогнутости.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $q \geqslant 2$

$\left(M \left\| \sum_1^n \varepsilon_i x_i \right\|^2 \right)^{1/2} \leqslant \left(M \left\| \sum_1^n \varepsilon_i x_i \right\|^q \right)^{1/q} \leqslant$ (учитывая q-вогнутость и то, что здесь мат. ожидание является просто конечной суммой) $\leqslant$

$$\leqslant D_q(X) \left\| \left(M \left| \sum_1^n \varepsilon_i x_i \right|^q \right)^{1/q} \right\| \leqslant D_q(X) B_q \left\| \left(\sum_1^n | x_i |^2 \right)^{1/2} \right\| .$$

Доказательство последнего неравенства содержится в доказательстве теоремы 1.*d*.6 [6, с. 50]. При $1 \leqslant q < 2$ используется тот факт, что q-вогнутая решетка является 2-вогнутой.

Лемма 3. *Пусть* $(\zeta_n)_1^\infty$ — *последовательность с. в. в* R^1, $(A_n)_1^\infty$ — *вещественная последовательность,* $A_n \uparrow \infty$ *при* $n \to \infty$ *и*

$$P(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \zeta_k \geqslant t\sqrt{A_n}) \leqslant C \exp(-t^2).$$

Тогда почти наверное (п. н.)

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \zeta_n / \sqrt{A_n \ln \ln A_n} \leqslant 1.$$

Доказательство. Пусть числа $\beta > \lambda > 1$ фиксированы, $V(i) = \sqrt{A_i \ln \ln A_i}$, $I_n = \{i : \lambda^{n-1} \leqslant V(i) < \lambda^n\}$, $(I_{n_k})_1^\infty$ — последовательность множеств индексов, которую получим из $(I_n)_1^\infty$, если выбросим пустые множества, $\overline{\zeta}_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \zeta_k$, $M_k = \max(i : i \in \mathcal{J}_{n_k})$, $m_k = \min(i : i \in \mathcal{J}_{n_k})$. В условиях леммы

$$\sum_{k=1}^\infty P(\overline{\zeta}_{M_k} \geqslant \beta V(M_k)) \leqslant C \sum_{k=1}^\infty (\ln A_{M_k})^{-\beta^2}. \tag{4}$$

Поскольку при достаточно больших k $\ln A_{M_k} + \ln \ln \ln A_{M_k} > 2(n_k - 1)\ln \lambda$ и, следовательно, $\ln A_{M_k} > (n_k - 1)\ln \lambda$, то ряд (4) сходится, и по лемме Бореля — Кантелли

$$P(\overline{\zeta}_{M_k} > \beta V(M_k) \text{ б. ч. р.}) = 0 \tag{5}$$

(б. ч. р. означает бесконечное число раз). Тогда из условия $\beta > \lambda > 1$ и равенства (5) получаем

$$P(\zeta_n > \beta V(n) \text{ б. ч. р.}) \leqslant P(\overline{\zeta}_{M_k} \geqslant \beta V(m_k) \text{ б. ч. р.}) \leqslant$$
$$\leqslant P(\overline{\zeta}_{M_k} \geqslant (\beta/\lambda) V(M_k) \text{ б. ч. р.}) = 0.$$

Следовательно, п. н. $\overline{\lim_{n \to \infty}} \zeta_n / V(n) \leqslant \beta$. Так как $\beta > 1$ — произвольное число, то отсюда следует утверждение леммы.

Утверждение, близкое к лемме 3, содержится в [11].

Предложение 3. *Пусть* X — *банахово пространство,*

$$x_i \in X, \quad i = \overline{1, n}, \quad N_\delta = \max\left(1, \frac{1}{2}(\ln(1+\delta))^{-1/2}(1+\delta)^{-(2\ln(1+\delta))^{-1}}\right),$$

$$M_2(n) = M\left\|\sum_1^n \varepsilon_i x_i\right\|^2.$$

Тогда для любых $\delta > 0$ *и* $t > 0$

$$P\left(\left\|\sum_1^n \varepsilon_i x_i\right\| > t(e(1+\delta)M_2(n))^{1/2}\right) \leqslant 2N_\delta \exp(-t^2/2). \tag{6}$$

Доказательство. Достаточно обосновать оценку

$$M \exp\left(t\left\|\sum_1^n \varepsilon_i x_i\right\|\right) \leqslant 2N_\delta \exp\left(\frac{t^2}{2} e(1+\delta) M_2(n)\right) \tag{7}$$

при $\delta > 0$ и любом конечном t. Переход (7) $\Rightarrow$ (6) известен [12, с. 70]. Применяя известную оценку $\exp(u) \leqslant 2 \operatorname{ch}(u)$ и лемму 1, имеем

$$M \exp\left(t\left\|\sum_1^n \varepsilon_i x_i\right\|\right) \leqslant 2\left(1 + \frac{t^2 M_2(n)}{2!} + \sum_{k=2}^\infty \frac{t^{2k} M\left\|\sum_1^n \varepsilon_i x_i\right\|^{2k}}{(2k)!}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(1+\frac{t^2M_2(n)}{2!}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(t^2M_2(n))^k}{k!}\,\frac{(2k-1)^k}{2^k(2k-1)!!}\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2\left(1+\frac{t^2M_2(n)}{2!}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(t^2M_2(n))^k}{k!}\left(\frac{\sqrt{\pi}\,(2k-1)^k}{\Gamma(k+1/2)\,2^{2k}}\right)\right). \qquad (8)$$

Подставим в (8) элементарную оценку

$$\frac{\sqrt{\pi}\,(2k-1)^k}{\Gamma(k+1/2)\,2^{2k}}\leqslant\frac{e^k\sqrt{k/2}}{2^k}.$$

Тогда

$$M\exp\left(t\left\|\sum_1^n\varepsilon_ix_i\right\|\right)\leqslant 2\left(1+\frac{t^2M_2(n)}{2!}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(t^2M_2(n)\,e\,(1+\delta)/2)^k}{k!}\sqrt{k/2}\,(1+\delta)^{-k}\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2\max\left(1,\max_{k\geqslant 2}\sqrt{k/2}\,(1+\delta)^{-k}\right)\exp\left((1+\delta)\,eM_2(n)\,t^2/2\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2N_\delta\exp\left((1+\delta)\,eM_2(n)\,t^2/2\right),$$

т. е. неравенство (7) установлено.

Из предложения 3 и лемм 2, 3 вытекает такое следствие.

Следствие 1. *Пусть X — банахово пространство, $x_i\in X$, $i\geqslant 1$ и $M_2(n)\uparrow\infty$ при $n\to\infty$. Тогда п. н.*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\left\|\sum_1^n\varepsilon_ix_i\right\|}{\sqrt{2eM_2(n)\ln\ln M_2(n)}}\leqslant 1.$$

Следствие 2. *Пусть X — q-вогнутая банахова решетка для некоторого $q<\infty$, $x_i\in X$, $i\geqslant 1$, $\delta>0$. Тогда*

$$P\left(\left\|\sum_1^n\varepsilon_ix_i\right\|>t\,(e\,(1+\delta))^{1/2}\,K_q\left\|\left(\sum_1^n|x_i|^2\right)^{1/2}\right\|\right)\leqslant 2N_\delta\exp(-t^2/2). \qquad (9)$$

Если $\left\|\left(\sum_1^n|x_i|^2\right)^{1/2}\right\|\uparrow\infty$ при $n\to\infty$, то п. н.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\left\|\sum_1^n\varepsilon_ix_i\right\|}{\sqrt{2eK_q^2\left\|\left(\sum_1^n|x_i|^2\right)^{1/2}\right\|^2\ln\ln\left\|\left(\sum_1^n|x_i|^2\right)^{1/2}\right\|^2}}\leqslant 1, \qquad (10)$$

где константа K_q определена в лемме 2, а N_δ — в предложении 3.

Напомним, что X называется пространством типа p, если существует такая константа $C_p(X)$, что для любых конечных наборов $x_i\in X$ выполняется неравенство $\left\|\sum_1^n\varepsilon_ix_i\right\|_p\leqslant C_p(X)\left(\sum_1^n\|x_i\|^p\right)^{1/p}$.

Из оценок работы [13] методом близким лемме 3 выводится такое следствие.

Следствие 3. *Пусть X — банахово пространство типа 2, $B_n^2=\sum_1^n\|x_i\|^2\uparrow\infty$, $\|x_n\|=o(B_n^2/\ln\ln B_n^2)^{1/2}$. Тогда п. н.*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\left\| \sum_{1}^{n} \varepsilon_i x_i \right\|}{\sqrt{2B_n^2 \ln \ln B_n^2}} \leqslant 1.$$

Примеры. 1. $X = L_p[0, 1]$, $1 \leqslant p \leqslant 2$. Тогда в неравенствах (9), (10) $K_q = 1$. При $p > 2$ $K_q = B_p$ — константа Хинчина, а в неравенствах (9), (10) величину $\left\| \left(\sum_{1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} \right\|$ можно заменить на $\left(\sum_{1}^{n} \| x_i \|^2 \right)^{1/2}$.

2. $X = V[0, 1]$ — банахова решетка функций ограниченной вариации. $V[0, 1]$ является 2-вогнутой банаховой решеткой и $D_2(V[0, 1]) = 1$, поскольку $V[0, 1] = C^*[0, 1]$, а $C[0, 1]$ является p-выпуклой банаховой решеткой для любого $1 \leqslant p < \infty$, $D^{(2)}(C[0, 1]) = 1$ (см. предложение 1. d.4 из [6]).

1. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах.— М. : Наука, 1985.— 368 с.
2. *Горгадзе З. Г., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Гауссовские ковариации в банаховых подрешетках пространства $L_0(T, E, \nu)$ // Докл. АН СССР.— 1978.— **241**, № 3.— С. С. 528—531.
3. *Maurey B.* Type et cotype dans les espaces munis de structures localles inconditionelles. // Seminaire Maurey-Schwartz.— 1973-74. Exposes 24—25. Ecole Polytechnique, Paris.
4. *Pisier G., Zinn J.* On the limit theorems for random variables with values in the spaces L_p $(2 \leqslant p < \infty)$ // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.— 1978.— **41**.— S. 289—304.
5. *Gine E., Zinn J.* Central limit theorems and weak laws of large numbers in certain Banach spaces // Ibid.— 1983.— **62**.— P. 323—354.
6. *Lindenstrauss J., Trafriri L.* Classical Banach spaces.— Berlin etc.: Springer, 1979.— Vol. 2.— 243 p.
7. *Бухвалов А. В., Векслер А. И., Гейлер В. А.* Нормированные решетки // Итоги науки. Мат. анализ.— 1980.— **18**.— С. 125—184.
8. *Burkholder D. L.* A geometrical characterisation of Banach spaces in which martingale difference are unconditinal // Ann. Probab.— 1981.— **9**, N 6.— P. 997—1011.
9. *Schwartz L.* Geometry and probability in Banach spaces // Lect. Notes Math.— 1981.— **852**.— P. 1—101.
10. *Бухвалов А. В.* Непрерывность операторов в пространствах вектор—функций; приложения к теории базисов // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР.— 1987.— **157**.— С. 5—22.
11. *Петров В. В.* Последовательности m-ортогональных случайных величин // Там же.— 1982.— **119**.— С. 198—202.
12. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин.— М. : Наука, 1972.— 414 с.
13. *Пинелис И. Ф., Саханенко А. И.* Замечания о неравенствах для вероятностей больших уклонений // Теория вероятностей и ее применения.— 1985.— **30**, № 1.— С. 127—131.

Киев. ун-т

Получено 10.10.88