УДК 517.9

Н. С. Гончар, Р. С. Мацкив

Экспоненциальная двумерная модель евклидовой теории поля

Доказано, что двумерная экспоненциальная модель теории поля тривиальна при $\alpha^2 > 8\pi$.

Доведено, що двовимірна експоненціальна модель теорії поля є тривіальною при $\alpha^2 > 8\pi$.

В настоящее время получены значительные результаты в изучении скалярных неполиномиальных моделей в евклидовой формулировке. Важное место среди этих моделей занимают экспоненциальные модели, рассмотренные в [1—8]. В этих работах изучался вопрос о нетривиальности теории при отсутствии ультрафиолетового (УФ) и объемного обрезаний. В [6, 8] авторы настоящей статьи изучали евклидовы функции Грина (ЕФГ) для двумерного случая при снятых УФ и объемном обрезаниях для лангранжиана взаимодействия с плотностью вида

$$\mathscr{L}(\xi) = g : e^{\alpha\xi(x)}:.$$

Модели такого вида рассматривались ранее в [4, 5], в частности, установлено, что для пространства-времени размерности $n \geqslant 3$ теория поля тривиальна при отсутствии УФ-обрезания. Аналогичный результат справедлив и для двумерного случая при достаточно больших значениях верхней константы связи $\alpha^2 > \alpha_0^2 > 4\pi$ [4]. В случае $\alpha^2 < 4\pi$ установлено [1, 2], что теория поля нетривиальна при устраненном УФ-обрезании и фиксированном объеме. В настоящей статье получены более точные по сравнению с [4] оценки для величины α^2, а именно: при $\alpha^2 > 8\pi$ и снятом УФ-обрезании ЕФГ оказываются свободными, т. е. соответствующая им теория поля тривиальна. Следует отметить, что аналогичные результаты получены в [9] для модели $\lambda\varphi_d^4$ и в [10] для $P(\varphi)_d$ при размерности пространства-времени $d > 4$. Следовательно, наибольший интерес представляет двумерный случай при значениях $\alpha^2 < 4\pi$. Рассмотрим его при устраненных одновременно УФ и объемном обрезаниях конструктивно построим соответствующие ЕФГ для достаточно больших значений главной константы связи g. Будем использовать обозначения, введенные в [6—8].

1. Тривиальность экспоненциальной двумерной модели при отсутствии УФ-обрезания. Рассмотрим экспоненциальную двумерную модель при наличии обрезаний с лангранжианом вида

$$\mathscr{L}_V^\beta(\xi) = g \int_V : e^{\alpha\xi_\beta(x)} : dx, \tag{1}$$

где $\xi_\beta(x)$ — случайное гауссово поле с нулевым средним и корреляционной функцией

$$K_\beta(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} \frac{e^{-\beta(k^2+m^2)} e^{i(k,x-y)}}{k^2+m^2}\, dk, \tag{2}$$

а подынтегральное выражение в (1) имеет вид

$$: e^{\alpha\xi_\beta(x)} : = e^{\alpha\xi_\beta(x)} e^{-\frac{1}{2}K_\beta(0)\alpha^2}.$$

В соотношении (1) V и β задают соответственно объемное и УФ-обрезания. Рассмотрим характеристические функции меры, абсолютно непрерывной относительной гауссовой меры

$$\sigma_n^\beta(\{\tau_1, x_1\}, \ldots, \{\tau_n, x_n\}) =$$

$$= \frac{M : e^{i\tau_1\xi_\beta(x_1)} : \ldots : e^{i\tau_n\xi_\beta(x_n)} : e^{-g\int\limits_V :e^{\alpha\xi_\beta(x)}:dx}}{Me^{-g\int\limits_V :e^{\alpha\xi_\beta(x)}:dx}}. \tag{3}$$

Аналитически продолженные по τ_j, $j = \overline{1, n}$, на чисто мнимые значения $\tau_j = -it_j$, эти функции имеют вид

$$\sigma_n^\beta(\{-it_1, x_1\}, \ldots, \{-it_n, x_n\}) =$$

$$= \frac{M : e^{t_1\xi_\beta(x_1)} : \ldots : e^{t_n\xi_\beta(xn)} : e^{-g\int\limits_V :e^{\alpha\xi_\beta(x)}:dx}}{Me^{-g\int\limits_V :e^{\alpha\xi_\beta(x)}:dx}}. \tag{4}$$

Введем обозначение $X_n^\beta(\{t, X\}_n) = \sigma_n(\{-it, X\}_n)$, где $(\{t, X\}_n) = (\{t_1, x_1\}, \ldots, \{t_n, x_n\})$. Функции $X_n^\beta(\{t, X\}_n)$ не являются характеристическими функциями в чисто вероятностном понимании, поскольку отличаются от них множителем $\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^n K_\beta(0)\, t_j^2\right\}$, но нам удобно пользоваться этой терминологией ввиду того, что ЕФГ можно получить из $X_n^\beta(\{t, X\}_n)$ следующим образом:

$$S_n^\beta(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial t_1 \ldots \partial t_n} X_n^\beta(\{t, X\}_n)\,|_{t_1=\ldots=t_n=0}. \tag{5}$$

В дальнейшем понадобятся вспомогательные функции

$$\overline{X}_n^\beta(\{t, X\}_n) = X_n^\beta(\{t, X\}_n)\ \exp\left\{-\sum_{i<j} K_\beta(x_i - x_j)\, t_i t_j\right\}. \tag{6}$$

Теорема 1. *Для функций* $X_n^\beta(\{t, X\}_n$ *и* $\overline{X}_n^\beta(\{t, X\}_n)$ *справедливы представления*

$$X_n^\beta(\{t, X\}_n) = \frac{e^{\sum\limits_{i<j}^n K_\beta(x_i-x_j)t_it_j} M \exp\left\{-g\int\limits_V : e^{\alpha\xi_\beta(x)} : e^{\alpha\sum\limits_{i=1}^n K_\beta(x_i-x_j)t_it_j} dy\right\}}{M\exp\left\{-g\int\limits_V : e^{\alpha\xi_\beta(x)} : dx\right\}}, \tag{7}$$

$$\overline{X}_n^\beta(\{t, X\}_n) = \frac{M\exp\left\{-g\int\limits_V : e^{\alpha\xi_\beta(y)} : e^{\alpha\sum\limits_{i=1}^n K_\beta(x_i-y)t_i} dy\right\}}{M\exp\left\{-g\int\limits_V : e^{\alpha\xi_\beta(y)} : dy\right\}}. \tag{8}$$

Доказательство формул приведено в [9]. На основании представлений (7), (8) будет доказана тривиальность модели с взаимодействием (1) при $\alpha^2 > 8\pi$, если устранить УФ-обрезание. Запишем $\overline{X}_n^\beta(\{t, X\}_n)$ в виде

$$\overline{X}_n^\beta(\{t, X\}_n) = \frac{Me^{-g\int\limits_V [e^{\alpha\sum\limits_{i=1}^n K_\beta(x_i-y)t_i} - 1]:e^{\alpha\xi_\beta(y)}:dy}\ e^{-g\int\limits_V :e^{\alpha\xi_\beta(y)}:dy}}{Me^{-g\int\limits_V :e^{\alpha\xi_\beta(y)}:dy}}.$$

Применяя к последнему выражению неравенство Йенсена, получаем оценки

$$\exp\left\{-g\int_V [e^{\alpha\sum_{i=1}^{n} K_\beta(x_i-y)t_i} - 1]\,\overline{X}_1^\beta(\{\alpha, y\})\,dy\right\} \leqslant \overline{X}_n^\beta(\{t, X\}_n) \leqslant 1, \qquad (9)$$

где

$$\overline{X}_1^\beta(\{\alpha, y\}) = \frac{M : e^{\alpha\xi_\beta(y)} : e^{-g\int_V :e^{\alpha\xi_\beta(y_1)}:dy_1}}{Me^{-g\int_V :e^{\alpha\xi_\beta(y_1)}:dy_1}}.$$

Покажем, что при достаточно больших значениях α функция $\overline{X}_1^\beta(\{\alpha, y\})$ стремится к нулю при $\beta \to 0$. Тогда из неравенств (9) следует

$$\lim_{\beta\to 0} \overline{X}_n^\beta(\{t, X\}_n) = 1.$$

С этой целью представим $\overline{X}_1^\beta(\{\alpha, y\})$, использовав формулу (8), в виде

$$\overline{X}_1^\beta(\{\alpha, y\}) = \frac{Me^{-g\int_V e^{\alpha^2 K_\beta(y-y_1)} :e^{\alpha\xi_\beta(y_1)}:dy_1}}{Me^{-g\int_V :e^{\alpha\xi_\beta(y_1)}:dy_1}}. \qquad (10)$$

Поскольку знаменатель в (10) отличен от нуля в силу неравенств

$$e^{-g|V|} \leqslant Me^{-g\int_V :e^{\alpha\xi_\beta(y)}:dy} \leqslant 1,$$

то $\overline{X}_1^\beta(\{\alpha, y\}) \to 0$ при $\beta \to 0$ лишь тогда, когда числитель стремится к нулю. Рассмотрим корреляционную функцию $K_\beta(x-y)$ в виде (2). С помощью элементарных преобразований для $K_\beta(x-y)$ можно получить представление

$$K_\beta(x-y) = \frac{1}{4\pi}\int_\beta^\infty \frac{e^{-\lambda m^2}}{\lambda} e^{-\frac{|x-y|}{4\lambda}}\,d\lambda. \qquad (11)$$

Для удобства введем обозначение $Z = M\exp\left\{-g\int_V :e^{\alpha\xi_\beta(y)}:dy\right\}$.

Теорема 2. *При произвольном $\beta > 0$ существуют независимые от β числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, которые могут быть выбраны как угодно близкими к нулю, такие, что для $\overline{X}_1^\beta(\{\alpha, y\})$ справедливы оценки*

$$0 \leqslant \overline{X}_1^\beta(\{\alpha, y\}) \leqslant Z^{-1}\Bigg[\frac{1}{2}\exp\{-g\pi\delta^2\beta^{1-\frac{1}{4\pi}[\alpha^2(e-\delta^2/4-1/2)-\varepsilon]}\} \times$$

$$\times \exp\{-(\alpha^2/8\pi - \varepsilon)(e^{-m^2}/m^2 + m^2)\} + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta^{\varepsilon/16\pi\alpha^2} e^{\varepsilon^2/16\pi\alpha^2(e^{-m^2}/m^2+m^2)} +$$

$$+ \frac{1}{2}\exp\{-g\pi\delta^2\beta^{1-\frac{\alpha^2}{4\pi}(e-\delta^2/4-1/2)}\}\exp\left\{-\frac{\alpha^2}{8\pi}(e^{-m^2}/m^2 + m^2)\right\}\Bigg]. \qquad (12)$$

Доказательство. Пусть V — некоторый компакт из R^2, а x — внутренняя точка из V. Пусть $\delta > 0$ — некоторое достаточно малое число. Выберем β настолько малым, чтобы круг радиуса $\delta\sqrt{\beta}$ с центром в точке x принадлежал V. Тогда имеет место неравенство

$$Me^{-g\int_V e^{\alpha^2 K_\beta(x-y)} :e^{\alpha\xi_\beta(y)}:dy} \leqslant Me^{-g\int_{|y-x|\leqslant\delta\sqrt{\beta}} e^{\alpha^2 K_\beta(x-y)} :e^{\alpha\xi_\beta(y)}:dy}. \qquad (13)$$

Поскольку для указанных значений $|y-x|$ с учетом представления (11) справедливо неравенство

$$K_\beta(x-y) \geqslant \frac{1}{4\pi}\int_\beta^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda m^2} e^{-\delta^2\beta/4\lambda} d\lambda \geqslant \frac{1}{4\pi} e^{-\delta^2/4}\int_\beta^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda m^2} d\lambda, \quad (14)$$

а $K_\beta(0) = \frac{1}{4\pi}\int_\beta^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda m^2} d\lambda$, то получим

$$M\exp\left\{-g\int_V e^{\alpha^2 K_\beta(x-y)} : e^{\alpha\xi_\beta(y)} : dy\right\} \leqslant M\exp\left\{-ge^{-\alpha^2/8\pi}\int_\beta^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda m^2} d\lambda + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha^2}{4\pi} e^{-\delta^2/4}\int_\beta^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda m^2} d\lambda \int_{|y-x|\leqslant\delta\sqrt{\beta}} e^{\alpha\xi_\beta(y)} dy\right\}. \quad (15)$$

Используя неравенство Йенсена, имеем

$$\int_{|y-x|\leqslant\delta\sqrt{\beta}} e^{\alpha\xi_\beta(y)} dy \geqslant \int_{|y-x|\leqslant\delta\sqrt{\beta}} dy \exp\left\{\frac{\alpha}{\pi\delta^2\beta}\int_{|y-x|\leqslant\delta\sqrt{\beta}} \xi_\beta(y)\, dy\right\} =$$

$$= \pi\delta^2\beta \exp\left\{\frac{\alpha}{\pi\delta^2\beta}\int_{|y-x|\leqslant\delta\sqrt{\beta}} \xi_\beta(y)\, dy\right\}. \quad (16)$$

Поскольку случайная величина $\int_{|y-x|\leqslant\delta\sqrt{\beta}} \xi_\beta(y)\, dy$ является гауссовой с дисперсией

$$G_\beta(x, x) = \int_{|y_1-x|\leqslant\delta\sqrt{\beta}}\int_{|y_2-x|\leqslant\delta\sqrt{\beta}} K_\beta(y_1-y_2)\, dy_1 dy_2,$$

то учитывая неравенства (15), (16), получаем оценку

$$M\exp\left\{-g\int_V e^{\alpha^2 K_\beta(x-y)} : e^{\alpha\xi_\beta(y)} : dy\right\} \leqslant \frac{(2\pi)^{-1/2}}{\sqrt{G_\beta(x, x)}}\int_{-\infty}^\infty e^{-z^2/2G_\beta(x,x)} \times$$

$$\times \exp\{-g\pi\delta^2\beta e^{\alpha^2 K_\beta(0)(e^{-\delta^2/4}-1/2)} e^{\alpha z/\pi\delta^2\beta}\}\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-z^2/2} \times$$

$$\times \exp\{-g\pi\delta^2\beta e^{\alpha^2 K_\beta(0)(e^{-\delta^2/4}-1/2)} e^{\frac{\alpha\sqrt{G_\beta(x,x)}}{\pi\delta^2\beta}}\}\, dz = \dot{I}_1 + \dot{I}_2,$$

где $\dot{I}_1$ — интеграл с областью интегрирования от $-\infty$ до 0, а $\dot{I}_2$ — интеграл с областью интегрирования от 0 до ∞. Ввиду того, что $K_\beta(x-y) \leqslant K_\beta(0)$, справедливо неравенство $G_\beta(x, x) \leqslant \pi\delta^2\beta K_\beta(0)$ Тогда для $\dot{I}_1$ получим

$$\dot{I}_1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-z^2/2}\exp\{-g\pi\delta^2\beta e^{\alpha^2 K_\beta(0)(e^{-\delta^2/4}-1/2)} e^{\alpha z\sqrt{K_\beta(0)}}\}\, dz.$$

Последний интеграл разобьем на два с промежутками интегрирования $-\varepsilon\sqrt{K_\beta(0)}/\alpha \leqslant z \leqslant 0$ и $-\infty < z \leqslant -\varepsilon\sqrt{K_\beta(0)}/\alpha$. Тогда получим оценку

$$\dot{I}_1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-z^2/2} dz \exp\{-g\pi\delta^2\beta e^{[\alpha^2(e^{-\delta^2/4}-1/2)-\varepsilon]K_\beta(0)}\} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\varepsilon/\alpha\sqrt{K_\beta(0)}} e^{-z^2/2} dz \leqslant \frac{1}{2} \exp\{-g\pi\delta^2\beta e^{[\alpha^2(e^{-\delta^2/4}-1/2)-\varepsilon]K_\beta(0)}\} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-z^2/4} dz e^{-\varepsilon^2 K_\beta(0)/\alpha^2}.$$

Ввиду того, что

$$K_\beta(0) = \frac{1}{4\pi}\int_\beta^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda m^2} d\lambda = \frac{1}{4\pi}\int_\beta^1 d\lambda/\lambda + \frac{1}{4\pi}\left(\int_1^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda m^2} d\lambda -\right.$$

$$\left. - \int_\beta^1 \frac{1-e^{-\lambda m^2}}{\lambda} d\lambda\right) = -\frac{1}{4\pi}\ln\beta + \frac{1}{4\pi} C_1(\beta),$$

где $C_1(\beta)$ — конечная величина при $\lambda \to 0$, для $\dot{I}_1$ будем иметь такое неравенство:

$$\dot{I}_1 \leqslant \frac{1}{2}\exp\{-g\pi\delta^2\beta e^{\frac{1}{4\pi}[\alpha^2(e^{-\delta^2/4}-1/2)-\varepsilon](-\ln\beta + C_1(\beta))}\} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{16\pi\alpha^2}(-\ln\beta + C_1(\beta))\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\exp\{-g\pi\delta^2\beta^{1-\frac{1}{4\pi}[\alpha^2(e^{-\delta^2/4}-1/2)-\varepsilon]}\}\exp\left\{\frac{1}{4\pi}[\alpha^2(e^{-\delta^2/4}-1/2)-\varepsilon]\, C_1(\beta)\right\} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\beta^{\frac{\varepsilon^2}{16\pi\alpha^2}}\exp\{-\varepsilon^2 C_1(\beta)/16\pi\alpha^2\}.$$

Аналогично получаем оценку для $\dot{I}_2$

$$\dot{I}_2 \leqslant \frac{1}{2}\exp\{-g\pi\delta^2\beta e^{\alpha^2/4\pi(e^{-\delta^2/4}-1/2)(-\ln\beta + C_1(\beta))}\}.$$

Поскольку $\sup_{\beta>0} |C_1(\beta)| \leqslant 1/m^2 + m^2$, то с учетом оценок для $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ имеем неравенство (12).

Теорема 3. *При $\alpha^2 > 8\pi$ существуют такие ε и δ, что*

$$\lim_{\beta\to 0} \overline{X}_1^\beta(\{\alpha, y\}) = 0. \tag{17}$$

Доказательство. Выберем ε и δ такими, чтобы правая часть неравенства (12) стремилась к нулю, если $\beta \to 0$. Для этого достаточно потребовать выполнения неравенства

$$1 - \left[\frac{\alpha^2}{4\pi}(e^{-\delta^2/4} - 1/2) - \varepsilon\right] < 0.$$

Отсюда получим неравенство

$$\alpha^2 > \frac{4\pi(1+\varepsilon)}{e^{-\delta^2/4}-1/2} > \frac{4\pi(1+\varepsilon)}{1/2-\delta^2/4} = \frac{8\pi(1+\varepsilon)}{1-\delta^2/2}.$$

Если выбрать $\alpha^2 > 8\pi$, то ε и δ можно выбрать достаточно малыми, чтобы выполнялось последнее неравенство. Следовательно, при $\alpha^2 > 8\pi$ имеет место равенство (17). Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Если $\alpha^2 > 8\pi$ и $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — достаточно малые, то*

$$\lim_{\beta\to 0} \overline{X}_n^\beta(\{t_1, x_1\}, \ldots, \{t_n, x_n\}) = 1.$$

Доказательство. Для $\overline{X}_n^\beta(\{t, X\}_n)$ справедливы неравенства

$$\exp\left\{-g\int_V [e^{\alpha\sum_{i=1}^n K_\beta(x_i-y)t_i} - 1]\, \overline{X}_1^\beta(\{\alpha, y\})\, dy\right\} \leqslant \overline{X}_n^\beta(\{t, X\}_n) \leqslant 1.$$

Переходя к пределу при $\beta\to 0$ под знаком интеграла в левой части неравенства, с учетом (17) получаем искомое равенство. При этом необходимо только убедиться, что функция $\exp\left\{\alpha\sum_{i=1}^n K_\beta(x_i-y)\,t_i\right\} - 1$ интегрируема по y в области V при $\beta\to 0$. С учетом асимптотики $K(x-y)$ при $|x-y|\to 0$, т. е.

$$K(x-y) = -\frac{1}{2\pi}\ln|x-y| + C + o(|x-y|),$$

для значений t_i получим неравенства $t_i < 4\pi/\alpha n$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, при достаточно малых t_i переход к пределу под знаком интеграла при $\beta\to 0$ обоснован. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. При $\alpha^2 > 8\pi$ *и достаточно малых значениях t_i, $i = \overline{1, n}$, существует предел*

$$\lim_{\beta\to 0} X_n^\beta(\{t, X\}_n) = \exp\left\{\sum_{i<j} K(x_i-x_j)\,t_i t_j\right\}, \tag{18}$$

т. е. предельные характеристические функции совпадают с характеристическими функциями свободной теории поля.

Доказательство. Справедливость формулы (18) следует из теоремы 4 и формул (6). Используя формулы (5), получаем, что $S_n^\beta(x_1, \ldots, x_n)$ при $\beta\to 0$ совпадают с ЕФГ свободной теории поля.

2. Уравнения для характеристических функций и их разрешимость при $\alpha^2 < 4\pi$. Для функций $\overline{X}_n^\beta(\{t, X\}_n)$ в [6] получены уравнения

$$\overline{X}_n^\beta(\{t, X\}_n) = g^2\alpha^2 \exp\left\{-g\int_V [e^{\alpha\sum_{i=1}^n K_\beta(x_i-z)t_i} - 1]\, dz\right\} \times$$

$$\times \int_0^{t_n} \exp\left\{g\int_V [e^{\alpha\sum_{i=1}^n K_\beta(x_i-z)t_i} - 1]\, dz\right\} \int_V K_\beta(x_n-y)\left[\int_0^\alpha\int_V K_\beta(y-y_1)\,\times\right.$$

$$\times \exp\left\{\alpha\sum_{i=1}^n K_\beta(x_i-y)\,t_i + \alpha\sum_{i=1}^n K_\beta(x_i-y_1)\,t_i + \alpha\tau K_\beta(y-y_1)\right\} \times$$

$$\left.\times\, \overline{X}_{n+2}^\beta(\{t, X\}_n, \{\tau, y\}, \{\alpha, y_1\})\, dy_1 d\tau\right] dy\,dt_n + \overline{X}_{n-1}^\beta(\{t, X\}_{n-1}) \times$$

$$\times \exp\Big\{-g\int_V e^{\alpha\sum_{i=1}^{n-1}K_\beta(x_i-z)t_i}[e^{\alpha K_\beta(x_n-z)t_n}-1]\,dz\Big\}+$$

$$+\delta_{n,1}\exp\Big\{-g\int_V[e^{\alpha K_\beta(x_1-z)t_1}-1]\,dz\Big\}\cdot \tag{19}$$

Исследуем разрешимость уравнения (19) в двумерном случае при $\alpha^2 < 4\pi$ и достаточно больших значениях g. Пусть ε — фиксированное число такое, что $0<\varepsilon<g$. Умножив правую и левую части уравнений (19) на функцию

$$\exp\Big\{\varepsilon\int_V[e^{\alpha\sum_{i=1}^{n}K_\beta(x_i-z)t_i}-1]\,dz\Big\}$$

и введя обозначение

$$\tilde{X}_n^\beta(\{t,X\}_n)=\overline{X}_n^\beta(\{t,X\}_n)\exp\Big\{\varepsilon\int_V[e^{\alpha\sum_{i=1}^{n}K_\beta(x_i-z)t_i}-1]\,dz\Big\}, \tag{20}$$

относительно $\tilde{X}_n^\beta(\{t,X\}_n)$ получим уравнения

$$\tilde{X}_n^\beta(\{t,X\}_n)=\exp\Big\{-(g-\varepsilon)\int_V[e^{\alpha\sum_{i=1}^{n}K_\beta(x_i-z)t_i}-1]\,dz\Big\}\times$$

$$\times g^2\alpha^2\int_0^{t_n}\int_V K_\beta(x_n-y)\exp\Big\{\alpha\sum_{i=1}^{n}K_\beta(x_i-y)t_i\Big\}\times\Big[\int_0^{\alpha}\int_V K_\beta(y-y_1)\times$$

$$\times\tilde{X}_n^\beta(\{t,X\}_n,\{\tau,y\},\{\alpha,y_1\})\exp\Big\{\alpha\sum_{i=1}^{n}K_\beta(x_i-y)t_i+\alpha\tau K_\beta(y-y_1)\Big\}\times$$

$$\times\exp\Big\{-\varepsilon\int_V[e^{\alpha\sum_{i=1}^{n}K_\beta(x_i-z)t_i+\alpha\tau K_\beta(y-z)+\alpha^2K_\beta(y_1-z)}-1]\,dz\times$$

$$\times\exp\Big\{g\int_V[e^{\alpha\sum_{i=1}^{n}K_\beta(x_i-z)t_i}-1]\,dz\Big\}\,dy_1d\tau\Big]\,dydt_n+\tilde{X}_{n-1}^\beta(\{t,X\}_{n-1})\times$$

$$\times\exp\Big\{-(g-\varepsilon)\int_V e^{\alpha\sum_{i=1}^{n-1}K_\beta(x_i-z)t_i}[e^{\alpha K_\beta(x_n-z)t_n}-1]\,dz\Big\}+$$

$$+\delta_{n,1}\exp\Big\{-(g-\varepsilon)\int_V[e^{\alpha K_\beta(x_1-z)t_1}-1]\,dz\Big\}. \tag{21}$$

Уравнения (21) будем решать в банаховом пространстве $B_\xi^{T_1}$, которое определяется так: вектор $b=\{b_1(\{t_1,x_1\}),\ldots,b_n(\{t_1,x_1\},\ldots,\{t_n,x_n\}),\ldots\}$ принадлежит $B_\xi^{T_1}$, если $b_k(\{t,X\}_k)$, $k=\overline{1,\infty}$, — непрерывные комплексно-значные функции в области $T_1^k=[L\times V]^k$, где L — компакт из R^1, и конечна такая норма:

$$\|b\|=\sup_{n\geq 1}\xi^n\sup_{\{t,X\}_n}|b_n(\{t,X\}_n)|,\quad 0<\xi<1.$$

Введем операторы R и P, действующие в $B_{\xi}^{T_1}$ по правилу

$$(Rb)_n(\{t, X\}_n) = \alpha^2 \exp\left\{-(g-\varepsilon)\int\limits_V [e^{\alpha\sum\limits_{i=1}^{n} K_\beta(x_i-z)t_i} - 1]\,dz\right\} \times$$

$$\times \int\limits_0^{t_n}\int\limits_V K_\beta(x_n-y)\Big[\int\limits_0^{\alpha}\int\limits_V b_{n+2}(\{t, X\}_n, \{\tau, y\}, \{\alpha, y_1\}) \exp\Big\{\alpha\sum_{i=1}^{n} K_\beta(x_i-y)\,t_i +$$

$$+ \alpha\sum_{i=1}^{n} K_\beta(x_i-y_1)\,t_i + \alpha\tau K_\beta(y-y_1)\Big\}\exp\left\{g\int\limits_V [e^{\alpha\sum\limits_{i=1}^{n} K_\beta(x_i-z)t_i} - 1]\,dz\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{-\varepsilon\int\limits_V e^{\alpha\sum\limits_{i=1}^{n} K_\beta(x_i-z)t_i}\, e^{\alpha\tau K_\beta(y-z)+\alpha^2 K_\beta(y_1-z)} - 1]\,dz\right\} dy_1 d\tau\Big]\,dy\,dt_n,$$

$$(Pb)_n(\{t, X\}_n) = b_{n-1}(\{t, X\}_{n-1}) \exp\left\{-(g-\varepsilon)\int\limits_V e^{\alpha\sum\limits_{i=1}^{n} K_\beta(x_i-z)t_i} \times\right.$$

$$\left.\times [e^{\alpha K_\beta(x_n-z)t_n} - 1]\,dz\right\}.$$

Используя операторы R и P, уравнение (21) сокращенно запишем в виде

$$\tilde{\mathrm{X}} = (g^2 R + p)\,\tilde{\mathrm{X}} + F, \tag{22}$$

где

$$F = \left\{\exp\left\{-(g-\varepsilon)\int\limits_V [e^{\alpha K_\beta(x_1-z)t_1} - 1]\,dz, 0, 0, \ldots\right\}.\right.$$

В пространстве $B_{\xi}^{T_1}$ для нормы оператора $g^2R + P$ в [8] получена оценка

$$\| g^2R + P \| \leqslant \frac{y^2}{\xi^2\varepsilon(g-\varepsilon)} \sup_{y_1\in R^2} \exp\left\{-\varepsilon\int\limits_V [e^{\alpha^2 K_\beta(y_1-z)} - 1]\,dz\right\} + \xi.$$

Положив $\varepsilon = g/2$, рассмотрим случай, когда $V = R^2$, $\beta = 0$. Получим оценку

$$\| g^2R + P \| \leqslant \frac{4}{\xi^2}\exp\left\{-\frac{g}{2}\int\limits_{R^2} [e^{\alpha^2 K(z)} - 1]\,dz\right\} + \xi.$$

Теорема 6. *Уравнение* (22) *однозначно разрешимо в пространстве* $B_{\xi}^{T_1}$ *в бесконечном объеме и снятом УФ-обрезании при* $\alpha^2 < 4\pi$, *если значения главной константы связи* g *удовлетворяют неравенству*

$$g/m^2 > \frac{2}{N}\ln 4/\xi^2(1-\xi),$$

где

$$N = \int\limits_{R^2} [e^{\alpha^2 K_1(y)} - 1]\,dy, \quad K_1(y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{R^2} \frac{e^{i(k,y)}}{k^2+1}\,dk.$$

Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству, проведенному в [8]. Чтобы получить ЕФГ, необходимо рассмотреть функции $\mathrm{X}_n(\{t, X\}_n)$ согласно формулам (20) и (6), а затем воспользоваться формулой (5).

1. *Петрина Д. Я., Скрипник В. И.* Уравнения Кирквуга — Зальцбурга для коэффициентных функций матрицы рассеяния // Теорет. и мат. физика.— 1971.—**8**, № 3.—С. 369—380.
2. *Albeverio S., Höegh-Krohn R.* Uniqueness of the physical vacuum and the Wightman functions in the infinite volume limit for some non-polynomial interactions // Communs. Math. Phys.— 1973.— **30**, N 3.— P. 171—200.
3. *Fröhlich J., Park Y.* Remarks on exponential interactions and quantum Sine— Gordon equation in two space-time dimensions // Helv. phys. acta.— 1977.— **50**.— P. 315—329.
4. *Albeverio S., Gallavotti G., Höegh-Krohn R.* Some results for the exponential interaction in two or more dimensions // Communs Math. Phys.— 1979.— **70**, N 2.— P. 187—192.
5. *Osipov E. P.* On triviality of the $:\exp \lambda\varphi:_4$-quantum field theory in a finite volume.— Novosibirsk, 1979.— 10 p.— (Preprint / Inst. Math; 79.102).
6. *Гончар Н. С., Мацкив Р. С.* Евклидовские функции Грина экспоненциальной двумерной модели без обрезаний.— Киев.— 1982.— 24 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т теорет. физики; 82.137Р).
7. *Гончар Н. С., Мацкив Р. С.* Евклидова теория поля для экспоненциальной двумерной модели без ультрафиолетового обрезания // Докл.АН УССР. Сер. А.— 1985.— № 1.— С. 11—14.
8. *Гончар Н. С., Мацкив Р. С.* Евклидовские функции Грина экспоненциальной двумерной модели без ультрафиолетового и объемного обрезаний.— Киев.— 1986.— 12 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т теорет. физики; 86. 74).
9. *Fröhlich J.* On the triviality of $\lambda\varphi_d^4$ theories and the approach to the critical point in $d > 4$ dimensions // Nucl. Phys. A.— 1982.— B**200**, N 2.— P. 281—296.
10. *Tetsuva Hattori.* A generalisation of the proof of the triviality of scalar fields theories.— Tokio.— 1982.— 12 p.— (Preprint / Univ. Tokio; 82.396).

Ин-т теорет. физики АН УССР, Киев
Терноп. фин.-экон. ин-т

Получено 08.07.88