УДК 517.5

Д. Н. Бушев, А. И. Степанец

О приближении слабо дифференцируемых периодических функций

Найдены асимптотические равенства для верхних граней наилучших приближений классов $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ при условии медленного убывания функций $\psi(\cdot)$.

Знайдені асимптотичні рівності для верхніх меж найкращих наближень класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ при умові повільного спадання функції $\psi(\cdot)$.

Пусть L, L_∞ и C — пространства 2π-периодических функций, соответственно суммируемых, существенно ограниченных и непрерывных с нормами

$$\|f\|_L = \int\limits_0^{2\pi} |f(t)|\,dt,\ \ \|f\|_\infty = \operatorname*{sup\,vrai}_x |f(x)|,\ \ \|f\|_C = \max_x |f(x)|;$$

$T_{n-1}(x)$ — тригонометрический полином степени не выше $(n-1)$; $E_n(f)_X = \inf\limits_{T_{n-1}} \|f(x) - T_{n-1}(x)\|_X$ и $E_n(\mathfrak{M})_X = \sup\limits_{f\in\mathfrak{M}} E_n(f)_X$ — наилучшее приближение соответственно функции $f(x)\in X$ и множества $\mathfrak{M}\subset X$ тригонометрическими полиномами $T_{n-1}(x)$ в метрике пространства X ($X=L$ или $X=C$); $a_k(f) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos kx dx$, $b_k(f) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx$ — коэффициенты Фурье функции $f(x)$; $S_n(f;x) = \dfrac{a_0(f)}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) = \dfrac{a_0(f)}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} A_k(f;x)$, $Z_n(f;x) = \dfrac{a_0(f)}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\left(1 - \left(\dfrac{k}{n}\right)^s\right) A_k(f;x)$, $s>0$, — суммы Фурье и Зигмунда функции $f(x)$; $\mathcal{E}(\mathfrak{M}, S_n)_C = \sup\limits_{f\in\mathfrak{M}} \|f(x) - S_n(f;x)\|_C$, $\mathcal{E}(\mathfrak{M}, Z_n)_C = \sup\limits_{f\in\mathfrak{M}} \|f(x) - Z_n(f;x)\|_C$.

Пусть далее $\psi(k)$ — произвольная фиксированная функция натурального аргумента, $\psi(k)\neq 0$, β — фиксированное действительное число. Предположим, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\psi(k)} (a_k(f)\cos(kx + (\beta\pi/2)) + b_k(f)\sin(kx + (\beta\pi/2)))$ является рядом Фурье суммируемой функции, которую обозначим через $f^{\psi}_{\beta}(x)$, а классы непрерывных и суммируемых функций $f(x)$, для которых соответственно $\|f^{\psi}_{\beta}\|_\infty \leqslant 1$ и $\|f^{\psi}_{\beta}\|_L \leqslant 1$, обозначим через $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ и $L^{\psi}_{\beta,1}$. Такие классы функций были впервые введены в работе [1].

Если

$$\psi(k) \geqslant \psi(k+1),\ \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} < \infty, \tag{1}$$

или при $\beta = 2m$, $m\in Z$

$$\psi(k+2) - 2\psi(k+1) + \psi(k) \geqslant 0, \quad \lim_{k\to\infty}\psi(k) = 0, \tag{2}$$

то (см., например, [2, с. 30]) классы $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ совпадают с классами функций, представимых в виде

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(x+t) D_{\psi,\beta}(t)\,dt, \tag{3}$$

где $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$, $\int\limits_0^{2\pi} \varphi(u)\,du = 0$ и $D_{\psi,\beta}(t)$ — суммируемая функция, имеющая ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos(kt + (\beta\pi/2))$.

Если $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, то классы $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ совпададают с хорошо известными классами $W^r_{\beta,\infty}$ дифференцируемых функций в смысле Вейля — Надя.

Полученные к настоящему времени результаты по приближениям классов $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ охватывают известные утверждения для классов $W^r_{\beta,\infty}$ и, как и следовало ожидать, обнаруживают новые факты. Один из таких фактов рассматривается в данной работе. Он состоит в том, что величины $\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, S_n)_C$, $\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, Z_n)_C$ и $E_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C$ асимптотически равны, если последовательность $\psi(k)$ достаточно медленно убывает к нулю.

Асимптотическое равенство величин $\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, S_n)_C$ и $E_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C$ для классов аналитических функций, представимых в виде свертки (3) с четным или нечетным ядром, было ранее установлено А. И. Степанцом (см., например, [2, с. 260]).

Задача о нахождении асимптотических равенств для величины $\mathcal{E}(\mathfrak{M}, S_n)_C$ имеет обширную историю, с которой можно познакомиться по книге [2]. Асимптотические равенства для величины $\mathcal{E}(W^r_{\beta,\infty}, Z_n)_C$ получены С. А. Теляковским [3], а для величины $\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, Z_n)_C$ — в [4].

Пусть последовательность $\psi(k)$ выпукла вниз при $k \geqslant 1$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \psi(k) = 0$. Тогда последовательность $\psi(k)$ при $k \geqslant 1$ не возрастает. Поэтому, если $\psi(k+2) - 2\psi(k+1) + \psi(k) \geqslant 0$ при $k \geqslant 1$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} < \infty, \tag{4}$$

то выполняются условия (1), (2) и классы $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ совпадают с классами функций, представимых в виде (3).

Отметим, что вместо последовательности $\psi(k)$ удобно рассматривать непрерывную функцию $\psi(u)$ такую, что $\psi(u) = \psi(k)$ при $u = k$. Тогда условия (1), (2), (4) равносильны соответственно условиям:

а) функция $\psi(u)$ не возрастает и $\int\limits_1^{\infty} \frac{\psi(u)}{u}\,du < \infty$,

б) функция $\psi(u)$ выпукла вниз и $\lim\limits_{u\to\infty} \psi(u) = 0$,

в) функция $\psi(u)$ выпукла вниз и $\int\limits_1^{\infty} \frac{\psi(u)}{u}\,du < \infty$, а производную функции $\psi(u)$ можно определить так: $\psi'(u) = \psi'(u+0)$.

Условимся через K_i, $i = 1, 2, \ldots$, обозначать положительные константы, вообще говоря, различные.

Установим асимптотические равенства для величин $\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, S_n)_C$ и $\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, Z_n)_C$, если функция достаточно медленно убывает к нулю.

Теорема 1. *Если функция $\psi(u)$ удовлетворяет условиям* (4) *и*

$$\lim_{u\to\infty} \frac{u\psi'(u)\ln u}{\psi(u)} = -1, \tag{5}$$

то при $n \to \infty$ справедливы равенства

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, S_n)_C = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} + \frac{4}{\pi^2}\psi(n)\ln n + O(\psi(n)), \tag{6}$$

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, Z_n)_E = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\psi(k)}{k} + O(\psi(n)\ln n). \tag{7}$$

Отметим, что условиям (5), (4) удовлетворяет, например, функция $\psi(u) = \dfrac{1}{\ln u \ln^{\alpha}(\ln u)}$, где $\alpha > 1$, и при их выполнении первые члены в асимптотических равенствах (6), (7) являются главными.

Доказательство. В работе [5, с. 72] установлено, что если функция $\psi(u)$ удовлетворяет условиям (4), то при $n \to \infty$ справедливо равенство

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, S_n)_C = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\psi(n+k)}{k} + \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\psi(k)}{k} + O(\psi(n)). \tag{8}$$

Так как последовательность $-\psi'(k)$ не возрастает, то

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\psi(n)-\psi(n+k)}{k} < -n\psi'(n). \tag{9}$$

Из соотношений (9) и (5) следует, что при $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\psi(n+k)}{k} = \psi(n)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\psi(n)-\psi(n+k)}{k} =$$

$$= \psi(n)\ln n + O(\psi(n)). \tag{10}$$

Поскольку последовательность $\psi(k)$ не возрастает и

$$\ln n < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} < \ln n + 1, \tag{11}$$

то

$$\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{\psi(k)}{k} < \psi(n)\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right) < \psi(n)\left(\ln\frac{2n-1}{n-1} + 1\right). \tag{12}$$

Используя неравенство (12), получаем

$$\sum_{k=2n}^{\infty}\frac{\psi(k)}{k} = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{\psi(k)}{k} + O(\psi(n)). \tag{13}$$

Из равенств (8), (10) и (13) следует (6).

Для каждой функции $f(x)$ из класса $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ следует

$$Z_n(f; x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x+t)\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\left(\frac{k}{n}\right)^s\right)\psi(k)\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right)dt.$$

Поэтому используя обобщенное неравенство Минковского, имеем

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, Z_n)_C \leqslant \mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, S_{n-1})_C + \gamma_n(\psi, s) \tag{14}$$

и

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, Z_n)_C \geqslant \mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, S_{n-1})_C - \gamma_n(\psi, s), \tag{15}$$

где $\gamma_n(\psi, s) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^s\psi(k)\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right|dt.$

В работе [6, с. 254] доказано неравенство

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| dx - \right.$$

$$\left. - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \xi \left(b_k, \sqrt{a_{n-k}^2 + b_{n-k}^2}\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant K_1 \left(| a_0 | + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{n} (| \Delta^2 a_{k-1} | + | \Delta^2 b_{k-1} |) \right), \tag{16}$$

где $\Delta^2 u_k = u_k - 2u_{k+1} + u_{k+2}$,

$$\xi(t, u) \leqslant \frac{\pi}{2} | t | + u. \tag{17}$$

Из неравенства (16) следует

$$\gamma_n(\psi, s) \leqslant \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \xi \left(-\psi(k) \left(\frac{k}{n}\right)^s \sin \frac{\beta\pi}{2}, \left(\frac{n-k}{n}\right)^s \psi(n-k) \right) +$$

$$+ K_2 \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{n} | \Delta^2 a_{k-1} | \right), \tag{18}$$

где $a_k = \left(\frac{k}{n}\right)^s \psi(k)$.

Используя неравенство (17), имеем

$$\xi \left(-\left(\frac{k}{n}\right)^s \psi(k) \sin \frac{\beta\pi}{2}, \left(\frac{n-k}{n}\right)^s \psi(n-k) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n^s} \left(\frac{\pi}{2} \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| k^s \psi(k) + (n-k)^s \psi(n-k) \right). \tag{19}$$

На основании (19) находим

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \xi \left(-\left(\frac{k}{n}\right)^s \psi(k) \sin \frac{\beta\pi}{2}, \left(\frac{n-k}{n}\right)^s \psi(n-k) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n^s} \left(\frac{\pi}{2} \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^s \psi(k)}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k)^s \psi(n-k)}{k} \right). \tag{20}$$

В силу условия (5) последовательность $u_k = k^s \psi(k)$ не убывает. Поэтому, используя неравенство (11), получаем

$$\frac{1}{n^s} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^s \psi(k)}{k} = \frac{1}{n^s} \left(\sum_{k=1}^{n_0} \frac{k^s \psi(k)}{k} + \sum_{k=n_0+1}^{n-1} \frac{k^s \psi(k)}{k} \right) < \frac{K_3}{n^s} +$$

$$+ \psi(n) \ln n + \psi(n) \leqslant \psi(n) \ln n + K_4 \psi(n). \tag{21}$$

Аналогично установим, что

$$\frac{1}{n^s} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} (n-k)^s \psi(n-k) < \psi(n) \ln n + K_5 \psi(n). \tag{22}$$

Так как последовательность $a_k = \frac{1}{n^s} k^s \psi(k)$ не убывает, то производя элементарные преобразования, находим

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{n} |\Delta^2 a_{k-1}| \leqslant \frac{K_6}{n^s} + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^{n-1} k(n-k)(a_{k+1} - a_{k-1}) \leqslant K_7 \psi(n) +$$

$$+ \frac{1}{n} \Big(2 \sum_{k=n_0+1}^{n-3} (2k+2-n) a_{k+1} + 2(n-2) a_n + (n-1) a_{n+1} -$$

$$- (n_0+1)(n-n_0-1) a_{n_0} - a_{n_0+1} (n_0+2)(n-n_0-2) \leqslant$$

$$\leqslant K_7 \psi(n) + \frac{1}{n} (2n_0 n \psi(n) + 4n\psi(n)) < K_8 \psi(n). \tag{23}$$

Из соотношений (18), (20) — (23) имеем

$$\gamma_n(\psi, s) < K_9 \psi(n). \tag{24}$$

Используя правило Лопиталя и соотношение (5), получаем

$$\lim_{x \to \infty} (\psi(x) \ln x) / \int_x^\infty \frac{\psi(u)}{u} du = \lim_{x \to \infty} \left(-1 - \frac{x\psi'(x) \ln x}{\psi(x)} \right) = 0. \tag{25}$$

Из соотношений (14), (15), (24), (26) и (6) следует (7). Теорема доказана.

Замечание. Если функция $\psi(u)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то можно доказать, что $\psi \in \mathfrak{M}_0'$, где множество $\mathfrak{M}_0'$ определено в [7].

Пусть последовательность $\psi(k)$ удовлетворяет условиям (4). Тогда (см., например, [2, с. 245])

$$E_n (C^\psi_{\beta,\infty})_C = E_n (L^\psi_{1,1})_L = \frac{1}{\pi} E_n (D_{\psi,1})_L = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi((2k-1)n)}{2k-1}, \tag{26}$$

где $D_{\psi,1}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt + \frac{\pi}{2}\right)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Если выполняются условия* (5) *и*

$$\psi(n) \ln n = o\left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} \right), \tag{27}$$

то

$$\frac{4}{\pi} \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi((2k-1)n)}{2k-1} \leqslant E_n (C^\psi_{\beta,\infty})_C \leqslant \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} + K_{10} \psi(n), \tag{28}$$

и при $n \to \infty$

$$E_n (C^\psi_{\beta,\infty})_C = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} + O(\psi(n)). \tag{29}$$

Доказательство. Если функция $f(x)$ принадлежит классу $C^\psi_{\beta,\infty}$, то $f(x) = f_0(x) \cos \frac{\beta\pi}{2} + f_1(x) \sin \frac{\beta\pi}{2}$, где $f_0(x) = a_0(f)/2 \cos \frac{\beta\pi}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+$

$+ t) \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos ktdt$ — функция из класса $C_{0,\infty}^{\psi}$, а $f_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (-\varphi(x + + t)) \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \sin ktdt$ — функция из $C_{1,\infty}^{\psi}$.

Так как (см., например, [8, с. 17])

$$E_n(f)_X = E_n\left(f_0 \cos\frac{\beta\pi}{2} + f_1 \sin\frac{\beta\pi}{2}\right)_X \leqslant E_n\left(f_0 \cos\frac{\beta\pi}{2}\right)_X + $$
$$+ E_n\left(f_1 \sin\frac{\beta\pi}{2}\right)_X = \left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right| E_n(f_0)_X + \left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| E_n(f_1)_X,$$

то

$$E_n(C_{\beta,\infty}^{\psi})_C = \sup_{f \in C_{\beta,\infty}^{\psi}} E_n(f)_C \leqslant \left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right| \sup_{f_0 \in C_{0,\infty}^{\psi}} E_n(f_0)_C +$$
$$+ \left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \sup_{f_1 \in C_{1,\infty}^{\psi}} E_n(f_1)_C = \left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right| E_n(C_{0,\infty}^{\psi})_C + \left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| E_n(C_{1,\infty}^{\psi})_C. \quad (30)$$

Поскольку (см., например, [2, с. 250]), $E_n(C_{0,\infty}^{\psi})_C \leqslant K_{11}\psi(n)$, то из соотношений (30) и (26) получим

$$E_n(C_{\beta,\infty}^{\psi})_C \leqslant \frac{4}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi((2k-1)n)}{2k-1} + K_{12}\psi(n). \quad (31)$$

В работе [2, с. 248, 249] доказано, что функция

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sign}\sin n(x+t) D_{\psi,\beta}(t)\,dt =$$
$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi((2k-1)n)}{2k-1} \sin\left((2k-1)nx - \frac{\beta\pi}{2}\right)$$

принадлежит классу $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ и

$$E_n(\Phi_1)_C \geqslant \max\left\{\frac{4}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi((2k-1)n)}{2k-1};\right.$$
$$\left.\frac{4}{\pi}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\psi(n) - \frac{\psi(3k)}{3}\right)\right\}.$$

Поэтому

$$E_n(C_{\beta,\infty}^{\psi})_C \geqslant E_n(\Phi_1)_C \geqslant \frac{4}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi((2k-1)n)}{2k-1}. \quad (32)$$

Учитывая, что последовательность $\psi(k)$ не возрастает, имеем

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi((2k-1)n)}{2k-1} \geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(kn)}{k}. \quad (33)$$

Так как $\frac{\psi(kn)}{kn} \geqslant \frac{\psi(kn+1)}{kn+1} \geqslant \ldots \geqslant \frac{\psi(kn+n-1)}{kn+n-1}$, то

$$\frac{\psi(kn)}{k} \geqslant \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\psi(kn+i)}{kn+i}. \quad (34)$$