УДК 517.5

Н. В. Зорий

Одна вариационная задача теории гринова потенциала. I

Для конденсатора E в открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^p$, $p \geqslant 3$, решена задача о минимуме гриновой энергии в одном классе зарядов, ассоциированных с E.

Для конденсатора E з відкритої множини $D \subset \mathbb{R}^p$, $p \geqslant 3$, розв'язана задача про мінімум грінової енергії в одному класі зарядів, асоційованих з E.

Для конденсатора E в открытом множестве D из евклидова пространства $\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 3$, рассмотрена задача о минимуме гриновой энергии в одном классе зарядов, ассоциированных с E. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости указанной экстремальной задачи при самых общих предположениях на топологию E и D. Конденсаторы понимаются в некотором обобщенном смысле.

Аналогичная задача для конденсатора в $\mathbb{R}^p$ и робэнова ядра $|x-y|^{\alpha-p}$, $\alpha \in (0, 2]$, исследована в [1].

В качестве вспомогательного результата найдены необходимые и достаточные условия на открытое множество $G \subset \mathbb{R}^p$, $p \geqslant 3$, при которых бесконечно удаленная точка имеет в G ненулевую гармоническую меру.

Упомянутые результаты анонсированы в [2].

1. Постановка задачи. Потенциал и энергию борелевского заряда ν в $\mathbb{R}^p$ относительно ядра $K(x, y)$ [3] обозначим соответственно через $\mathcal{U}_K^\nu(x)$ и $\mathcal{I}_K(\nu)$. Если $K(x, y) = k_2(x-y) := |x-y|^{2-p}$ (ньютоново ядро), то положим $\mathcal{U}_{k_2}^\nu(x) =: \mathcal{U}_2^\nu(x)$, $\mathcal{I}_{k_2}(\nu) =: \mathcal{I}_2(\nu)$.

Для замкнутого множества $F \subset \mathbb{R}^p$ и конечного заряда ν обозначим через $\beta_F^2 \nu$ решение классической (ньютоновой) задачи выметания ν на F в классе зарядов, тождественно равных нулю на множестве I_F иррегулярных точек F. Такое решение существует и единственно [3].

Пусть $D \subset \mathbb{R}^p$ — открытое множество, которое, в частности, может совпасть со всем пространством $\mathbb{R}^p$, $CD := \mathbb{R}^p \setminus D$, ε_y — мера Дирака в

© Н. В. ЗОРИЙ, 1990

точке y. Функция

$$g(x, y) \equiv g_D(x, y) := \mathcal{U}_2^{\varepsilon_y}(x) - \mathcal{U}_2^{\beta^2_{\complement D}\varepsilon_y}(x), \ y \in D, \ x \in \mathbb{R}^p,$$

называется (обобщенной) функцией Грина множества D [3].

Пусть $E^+, E^- \subset D$ — непустые замкнутые в D множества, удовлетворяющие условию

$$\sup_{x \in E^+, \ y \in E^-} g(x, y) < +\infty. \tag{1}$$

Тройку $E = (E^+, E^-; D)$ назовем конденсатором (в D). Заметим, что при таком определении конденсатора замыкания в $\overline{\mathbb{R}^p} := \mathbb{R}^p \cup \{\infty\}$ «пластин» E^+ и E^- могут пересекаться по непустому множеству (не обязательно одноточечному).

Для конденсатора E определим экстремальную характеристику

$$V_g(E) \equiv V_g(E^+, E^-, D) := \inf_{\nu \in \mathfrak{N}^1(E)} \mathcal{I}_{g_D}(\nu), \tag{2}$$

где $\mathfrak{N}^1(E)$ — класс всех тех зарядов $\nu = \nu^+ = \nu^-$, у которых ν^+ и ν^- — единичные меры, сосредоточенные соответственно на E^+ и E^-.

Заряд $\varkappa \equiv \varkappa_E$, удовлетворяющий условиям

$$\varkappa \in \mathfrak{N}^1(E), \quad \mathcal{I}_g(\varkappa) = V_g(E), \tag{3}$$

назовем минимизирующим зарядом для конденсатора E (если такой заряд $\varkappa$ существует).

В [1, 4] найдены необходимые и достаточные условия существования минимизирующих зарядов в случае $D = \mathbb{R}^p$ — тогда $g(x, y) = k_2(x - y)$ и $V_g(E) = \inf_{\nu \in \mathfrak{N}^1(E)} \mathcal{I}_2(\nu) =: V_2(E) \equiv V_2(E^+, E^-; \mathbb{R}^p)$ (см. также [5,6], в которых дополнительно предполагалось, что одно из множеств E^+, E^- компактно в $\mathbb{R}^p$). Существование конденсаторов $E = (E^+, E^-; \mathbb{R}^p)$, для которых экстремальная задача (2), (3) оказывается неразрешимой, является чисто пространственным эффектом (сравни с [7, 8]) и обусловлено неинвариантностью характеристики $V_2(E)$ относительно мебиусовых преобразований $\mathbb{R}^p$ при $p > 2$.

В настоящей статье найдены необходимые и достаточные условия существования минимизирующих зарядов для конденсаторов в произвольном открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^p$. Чтобы экстремальная задача (2), (3) была содержательна, всюду далее будем полагать

$$V_g(E) < +\infty. \tag{4}$$

Тогда $V_g(E) = \inf_{\nu \in \mathfrak{N}^1_g(E)} \mathcal{I}_g(\nu)$, где $\mathfrak{N}^1_g(E) := \{\nu \in \mathfrak{N}^1(E) : \mathcal{I}_g(\nu) < +\infty\}$.

В силу условия (1) соотношение (4) эквивалентно условию $C_g(E^+) \times C_g(E^-) > 0$, где символом $C_g(\cdot)$ обозначена гринова емкость C-измеримого множества [3, 9]. Очевидно, в случае $D = \mathbb{R}^p$ под гриновой емкостью множества следует понимать его ньютонову емкость $C_2(\cdot)$.

Всюду далее будем предполагать выполненным условие $\min\{C_g(E^+), C_g(E^-)\} < +\infty$*, ибо в противном случае было бы $V_g(E) = 0$, и (в силу строгой позитивности гринова ядра [3]) задача (2), (3) была бы заведомо неразрешима. Пусть, для определенности,

$$C_g(E^+) < +\infty. \tag{5}$$

Для множества $Q \subset D$ обозначим через $\check{Q}$ его приведенное ядро [3], т. е. множество всех тех $x \in Q$, для каждой из которых всякая ее окрестность в

* Из дальнейшего изложения будет ясно, что это условие не только необходимо, но и достаточно для выполнения соотношения $V_g(E) > 0$.

D пересекается с Q по множеству ненулевой гриновой (или, что то же самое, ненулевой ньютоновой) емкости.

Множества $\check{E}^+$ и $\check{E}^-$ образуют конденсатор $\check{E} := (\check{E}^+, \check{E}^-; D)$ в D. Верны равенства $\mathfrak{N}_g^1(E) = \mathfrak{N}_g^1(\check{E})$, $V_g(E) = V_g(\check{E})$, из которых заключаем, что если $\varkappa$—минимизирующий заряд для конденсатора E, то он минимизирующий и для конденсатора $\check{E}$, и наоборот. На основании изложенного выше, не умаляя общности рассуждений, всюду далее будем полагать

$$E^+ = \check{E}^+, \ E^- = \check{E}^-. \tag{6}$$

2. Критерий разрешимости экстремальной задачи (2), (3). В линейном пространстве $\mathcal{E}_g$ всех зарядов ν в D с конечной гриновой энергией $\mathcal{J}_g(\nu)$ введем скалярное произведение

$$(\nu_1, \nu_2) = \iint\limits_{D\times D} g(x, y)\, d\nu_1(x)\, d\nu_2(y)$$

и норму $\|\nu\| = \sqrt{(\nu, \nu)}$. Известно, что предгильбертово пространство $\mathcal{E}_g$ неполно. Пользуясь свойствами предгильбертова пространства и выпуклостью множества $\mathfrak{N}_g^1(E)$, нетрудно получить следующее утверждение.

Лемма 1. *Если $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — решения экстремальной задачи* (2), (3), *то $\varkappa_1 = \varkappa_2$.*

Чтобы сформулировать основной результат статьи о разрешимости экстремальной задачи (2), (3), введем следующие определения и обозначения.

Множество $e \subset \overline{\mathbb{R}^p}$ назовем борелевским, если таковым является множество $e \cap \mathbb{R}^p$.

Для множества $B \subset \mathbb{R}^p$ через ∂B и $\overline{\partial B}$ обозначим границу B соответственно в $\mathbb{R}^p$ и $\overline{\mathbb{R}^p}$.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^p$ — открытое множество с границей ∂G положительной ньютоновой емкости, $e_0 \subset \partial G$ — борелевское множество, $\omega(x, e_0; G)$, $x \in G$,— гармоническая мера множества e_0 в точке x. Гармоническую меру будем считать определенной на всех борелевских множествах $e \subset \overline{\mathbb{R}^p}$, приняв за определение следующие равенства:

$$\omega(x, \{\infty\}; G) = 1 - \omega(x, \partial G; G), \tag{7}$$

$$\omega(x, e; G) = \begin{cases} \omega(x, e \cap \partial G; G), \text{ если } e \not\supset \{\infty\}, \\ \omega(x, e \cap \partial G; G) + \omega(x, \{\infty\}; G), \text{ если } e \supset \{\infty\}. \end{cases} \tag{8}$$

Тогда $\omega(x, \overline{\mathbb{R}^p}; G) = \omega(x, \overline{\partial G}; G) = 1 \quad \forall x \in G$.

Открытое множество $D \setminus E^-$ состоит из не более чем счетного числа компонент Z_i, $i \in I \subset \mathbb{N}$. Пусть I_+ — совокупность всех тех $i \in I$, для которых множества $Z_i \cap E^+$ непусты. Положим $Z_+ := \bigcup\limits_{i \in I_+} Z_i$. В силу предположений (4) — (6) справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Для разрешимости экстремальной задачи* (2), (3) *необходимо и достаточно выполнение хотя бы одного из следующих двух условий:*

$$\begin{aligned} &i)\ C_g(E^-) < +\infty; \\ &ii)\ \omega(x, \overline{\mathbb{R}^p} \setminus D; D \setminus E^-) = 0 \quad \forall x \in Z_+. \end{aligned} \tag{9}$$

Замечание 1. Можно показать, что справедливость теоремы 1 не нарушится, если условие *i*) заменить на более слабое условие *i'*) $C_g(\partial Z_+ \cap D) < +\infty$.

Множество $Q \subset \mathbb{R}^p$ называется разреженным на бесконечности [10], если множество Q^*, полученное из Q преобразованием инверсии относительно сферы $|x| = 1$, разрежено в точке $x = 0$ [3, 9].

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^p$ — замкнутое множество с $C_2(Q) > 0$. Его разреженность на бесконечности равносильна каждому из следующих эквивалентных условий [5, 11]:

а) существует ньютонова равновесная мера Q (не обязательно конечная) [3, с. 344—349];

б) либо Q ограничено, либо существует конечная мера μ такая, что

$$\varliminf_{x\to\infty,\, x\in Q} |x|^{p-2}\mathcal{U}_2^{\mu}(x) > \mu(\mathbb{R}^p);$$

в) $\sum_{n=1}^{+\infty} [C_2(Q^{(n)})/q^{n(p-2)}] < +\infty$, где $q \in (1, +\infty)$, $Q^{(n)} := Q \cap \{x : q^n \leqslant \leqslant |x - x_0| < q^{n+1}\}$, $x_0 \in \mathbb{R}^p$;

г) среди конечных мер, тождественно равных нулю на множестве иррегулярных точек из Q, найдется мера ν, для которой $(\beta_Q^2\nu)(\mathbb{R}^p) < < \nu(\mathbb{R}^p)$.

Из критерия а) (либо в)) следует, что если множество Q имеет конечную ньютонову емкость, то оно разрежено на бесконечности. Примеры множеств, разреженных на бесконечности и имеющих бесконечную ньютонову емкость, построены в [5, 6].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^p$ — открытое множество с границей ∂G положительной ньютоновой емкости, $G^0 \subset G$ — его подмножество, являющееся объединением некоторых компонент связности $G_i \subset G$. Для того чтобы выполнялось равенство*

$$\omega(x, \{\infty\}; G) = 0, \quad \forall\, x \in G^0, \tag{10}$$

необходимо и достаточно, чтобы множество CG^0 было не разреженным на бесконечности.

Замечание 2. Из теоремы 2 с учетом известного необходимого условия разреженности множества в конечной точке [9, с. 92] получаем известное утверждение [12, с. 267]: если $\omega(x, \{\infty\}; G) > 0$ в некоторой связной компоненте G_i множества G, то $\Theta(r) = o(r^{p-i})$, где $\Theta(r)$ — $(p-1)$-мерная площадь пересечения CG_i со сферой $|x| = r$.

Учитывая теорему 2, результат о разрешимости задачи (2), (3) сформулируем в следующем виде.

Теорема 1′. *Для того чтобы экстремальная задача* (2), (3) *была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось либо* (9), *либо следующее условие:*

ii′) для всякого $i \in I_+$ множество $(\partial D) \cap \partial Z_i$ имеет в Z_i нулевую гармоническую меру, а множество CZ_+ не разрежено на бесконечности.

Замечание 3. Положив в теореме 1′ $D = \mathbb{R}^p$ (тогда множества $(\partial D) \cap \partial Z_i$ пусты), получим с точностью до обозначений соответствующее утверждение из [1, 4].

3. Доказательство теоремы 2. Пусть множества G и G^0 такие, как и в условиях теоремы 2, e — борелевское множество из $\mathbb{R}^p$. Верно равенство

$$\omega(x, e; G) = (\beta_{CG}^2\varepsilon_x)(e) \quad \forall\, x \in G. \tag{11}$$

Для $e \subset \partial G$ соотношение (11) известно [3, 9, 12]. В общем случае $e \subset \subset \mathbb{R}^p$ его легко получить, исходя из определения (8) и учитывая характер распределения выметенных мер. Также нетрудно видеть

$$\omega(x, e; G) = \omega(x, e; G^0) \quad \forall x \in G^0. \tag{12}$$

Как видно из соотношений (7), (11) и (12), равенство (10) выполняется в том и только в том случае, когда $(\beta_{CG^0}^2\varepsilon_x)(\mathbb{R}^p) = 1$, $\forall\, x \in G^0$. Поскольку ε_x — единичная мера, последнее соотношение запишем в виде

$$(\beta_{CG^0}^2\varepsilon_x)(\mathbb{R}^p) = \varepsilon_x(\mathbb{R}^p) \quad \forall x \in G^0. \tag{13}$$

Как следует из леммы 13 [5] (см. также критерий г) разреженности множеств на бесконечности), достаточным условием для выполнения равенства (13) есть условие неразреженности на бесконечности множества CG^0. Покажем, что это же условие и необходимо.

Пусть, от противного, равенство (13) справедливо, а множество CG^0 разрежено на бесконечности. Из последнего предположения следует, что среди связных компонент множества G^0 (дополняющего CG^0 до $\mathbb{R}^p$) найдется (единственная) компонента G_1, дополнение которой до $\mathbb{R}^p$ разрежено на бесконечности. На основании леммы 12 из [5] находим $(\beta^2_{CG^0}\varepsilon_x)(\mathbb{R}^p) < \varepsilon_x(\mathbb{R}^p)$ $\forall\, x \in G_1$. Противоречие с предположением (13) доказывает теорему 2.

4. Гриново выметание мер. Теорема 1 будет доказана во второй части этой работы. Здесь же приведем лишь ряд вспомогательных результатов о гриновом выметании мер.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^p$ — открытое множество, L — его дополнение до $\mathbb{R}^p$, γ — конечная мера, сосредоточенная в G. Обозначим через G_γ множество (может быть, пустое), являющееся объединением всех тех связных компонент $G_i \subset \subset G$, для которых $\gamma\,(G_i) > 0$.

На алгебре борелевских множеств $e \subset \overline{\mathbb{R}}^p$ определим неотрицательную аддитивную функцию $f_{G,\gamma}(e)$, положив

$$f_{G,\gamma}(\{\infty\}) := \gamma\,(\mathbb{R}^p) - (\beta^2_L\gamma)\,(\mathbb{R}^p), \tag{14}$$

$$f_{G,\gamma}(e) := \begin{cases} (\beta^2_L\gamma)\,(e), & \text{если } \{\infty\} \not\subset e, \\ f_{G,\gamma}(e \cap \mathbb{R}^p) + f_{G,\gamma}(\{\infty\}), & \text{если } \{\infty\} \subset e. \end{cases} \tag{15}$$

Если ньютонова емкость множества L равна нулю, то $f_{G,\gamma}(e) = \gamma\,(\mathbb{R}^p)$ для $e \supset \{\infty\}$, и $f_{G,\gamma}(e) = 0$ для всех других e. Пусть $C_2(L) > 0$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Для того чтобы для некоторого борелевского множества $e \subset \mathbb{R}^p$ выполнялось равенство $f_{G,\gamma}(e) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\omega\,(x, e;\ G) = 0$ $\forall\, x \in G_\gamma$.*

Доказательство. Для всякого борелевского множества $e_0 \subset \mathbb{R}^p$ верно соотношение [3] $(\beta^2_L\gamma)\,(e_0) = \int\limits_G (\beta^2_L\varepsilon_x)\,(e_0)\,d\gamma\,(x)$, откуда с учетом равенства (11) и определений (14), (15) находим

$$f_{G,\gamma}(e_0) = \int\limits_G \omega\,(x, e_0;\ G)\,d\gamma\,(x),$$

$$f_{G,\gamma}(\{\infty\}) = \gamma\,(\mathbb{R}^p) - f_{G,\gamma}(\mathbb{R}^p) = \int\limits_G [1 - \omega\,(x, \mathbb{R}^p;\ G)]\,d\gamma\,(x) =$$

$$= \int\limits_G \omega\,(x, \{\infty\};\ G)\,d\gamma\,(x).$$

Следовательно, для всякого борелевского множества $e \subset \overline{\mathbb{R}}^p$ верно равенство

$$f_{G,\gamma}(e) = \int\limits_G \omega\,(x, e;\ G)\,d\gamma\,(x). \tag{16}$$

Пользуясь соотношением (16) и известными свойствами гармонической меры, убеждаемся в справедливости леммы 2.

Пусть, как и ранее, $D \subset \mathbb{R}^p$ — открытое множество, $g\,(x, y) \equiv g_D\,(x, y)$ — его (обобщенная) функция Грина. Если некоторое утверждение R верно для всех точек $x \in M \subset D$, за исключением подмножества гриновой емкости нуль, то будем говорить, что R верно квазивсюду на M и писать R $\forall^q x \in M$.

Заряд ν, определенный на σ-алгебре борелевских множеств из D, называется C-абсолютно непрерывным [3], если $|\,\nu\,|\,(K) = 0$ для всякого компакта $K \subset D$ нулевой гриновой емкости. Носитель (в D) заряда ν обозначим через $S(\nu)$.

Пусть $F \subset D$ — замкнутое в D множество, не совпадающее со всем D, μ — конечная мера, сосредоточенная в $\Theta := D \setminus F$. В классе C-абсолютно непрерывных зарядов ν с $S(\nu) \subset F$ существует и единствен заряд (обозначим его $\beta_F^g \mu$), удовлетворяющий равенству

$$\mathcal{U}_g^{\beta_F^g \mu}(x) = \mathcal{U}_g^{\mu}(x) \quad \forall_q x \in F.$$

Заряд $\beta_F^g \mu$ называется решением гриновой задачи выметания μ на F [9, 13]. Известно, что этот заряд знакоположителен, т. е. является мерой.

Лемма 3. *Пусть $C_2(F \cup CD) > 0$. Условие $\omega(x, \overline{\mathbb{R}^p} \setminus D; \Theta) = 0 \quad \forall x \in \Theta_\mu$ необходимо и достаточно для того, чтобы выполнялось соотношение*

$$(\beta_F^g \mu)(D) = \mu(D). \tag{17}$$

Здесь, как и ранее, Θ_μ — совокупность всех тех связных компонент множества Θ, на которых мера μ строго положительна.

Доказательство. В [13] показано, что мера $\beta_F^g \mu$ может быть получена как сужение $\beta_{F \cup CD}^2 \mu$ на F. В силу этого нетрудно видеть, что соотношение (17) выполняется в том и только в том случае, когда

$$[\mu(\mathbb{R}^p) - (\beta_{F \cup CD}^2 \mu)(\mathbb{R}^p)] + (\beta_{F \cup CD}^2 \mu)(CD) = 0,$$

или, что равносильно, когда $f_{\Theta,\mu}(\overline{\mathbb{R}^p} \setminus D) = 0$. Используя лемму 2, убеждаемся в справедливости леммы 3.

Пусть $C_g(F) \in (0, +\infty)$. Через γ_F будем обозначать гринову равновесную меру множества F (нормированную условием $\gamma_F(D) = C_g(F)$) [3,9, 14].

Лемма 4. *Справедливо равенство*

$$(\beta_F^g \mu)(D) = (\mu, \gamma_F). \tag{18}$$

Доказательство. Из определений мер γ_F и $\beta_F^g \mu$ и свойства их C-абсолютной непрерывности получаем соотношения

$$(\beta_F^g \mu)(D) = \int_D \mathcal{U}_g^{\gamma_F}(x)\, d(\beta_F^g \mu)(x) = \int_D \mathcal{U}_g^{\beta_F^g \mu}(x)\, d\gamma_F(x) = \int_D \mathcal{U}_g^{\mu}(x)\, d\gamma_F(x),$$

доказывающие (18).

1. *Зорий Н. В.* Задача о минимуме энергии для пространственных конденсаторов и ядер Риса // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 1.— С. 34—41.
2. *Зорий Н. В.* Задача о минимуме гриновой энергии для пространственных конденсаторов // Докл. АН СССР.— 1989.— **307**, № 2.— С. 265—269.
3. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала.— М. : Наука, 1966.— 515 с.
4. *Зорий Н. В.* Одно обобщение понятия конденсатора и связанные с ним экстремальные задачи // Теория приближений и смеж. вопр. анализа и топологии.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1987.— С. 36—46.
5. *Зорий Н. В.* Задача о минимуме энергии для пространственных конденсаторов.— Киев, 1985.— 43 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.06).
6. *Зорий Н. В.* Экстремальная задача о минимуме энергии для пространственных конденсаторов // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 4.— С. 431—437.
7. *Bagby T.* The modulus of a plane condenser // J. Math. and Mech.— 1967.— **17**, N 4.— P. 315—329.
8. *Тамразов П. М.* О вариационных задачах теории логарифмического потенциала // Исследования по теории потенциала.— Киев, 1980.— С. 3—13.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 80.25).
9. *Брело М.* Основы классической теории потенциала.— М. : Мир, 1964.— 212 с.
10. *Fuglede B.* Asymptotic paths for subharmonic functions and polygonal connectedness of fine domains // Lect. Notes Math.— 1980.— **814**.— P. 97—115.

11. *Зорий Н. В.* О существовании зарядов с минимальной гриновой энергией для пространственных конденсаторов.— Киев, 1987.— 23 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.52).
12. *Хейман У, Кеннеди П.* Субгармонические функции.— М. : Мир.— 1980.— 304 с.
13. *Frostman O.* Sur les fonctions surharmoniques d'ordre fractionnaire // Ark. mat.— 1939.— **26**A, N 16.
14. *Fuglede B.* On the theory of potentials in locally compact spaces // Acta math.— 1960.— **103**, N 3—4.— P. 139—215.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 16.01.89