УДК 517.9

До Конг Хань

Факторизация передаточных функций. II. Минимальность пассивных систем рассеяния при каскадном соединении

Методом функциональных моделей операторов и систем доказываются необходимое и достаточное условия для того, чтобы каскадное соединение n минимальных пассивных систем рассеяния было минимальной системой.

Методом функціональних моделей операторів і систем доведені необхідна та достатня умови для того, щоб каскадне сполучення n мінімальних пасивних систем розсіювання було мінімальною системою.

Настоящая статья является продолжением [1]. Известно [2, 3], что критерий сохранения минимальности при соединении двух линейных стационарных минимальных конечномерных систем выражается в терминах степеней Мак-Миллана рациональных матричных передаточных функций (п. ф.). В данной статье методом теории моделей операторов [4—6] определяются необходимое и достаточное условия сохранения минимальности при каскадном соединении n минимальных пассивных систем рассеяния (п. с. р.) в гильбертовых пространствах, что существенно развивает полученные в [7, 8] результаты.

1. Предварительные результаты. 1. Известно, что линейная минимальная стационарная система определяется своей п. ф. с точностью до слабого подобия. Это означает, что если п. ф. систем $\alpha_k = (X_k, U_k, V_k; A_k, B_k, C_k, D_k)$, $k = 1, 2$, равны, то существует обратимый оператор $T : X_1 \to X_2$ с плотной областью определения $\mathcal{D}(T)$ и плотной областью значений $\mathcal{R}(T)$ такой, что

$$A_1\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T), \quad A_2\mathcal{R}(T) \subset \mathcal{R}(T), \quad B_1U_1 \subset \mathcal{D}(T), \tag{1}$$

$$TA_1 \mid \mathcal{D}(T) = A_2T, \quad B_2 = TB_1, \quad C_1 \mid \mathcal{D}(T) = C_2T. \tag{2}$$

Если при этом оператор T ограничен, то будем говорить, что система α_1 является квазиаффинным преобразованием системы α_2. При выполнении (1), (2) имеем

$$TA_1^nB_1u = A_2^nB_2u, \quad T^*A_2^{*n}C_2^*v = A_1^{*n}C_1^*v. \tag{3}$$

Лемма 1. *Пусть система α_1 является квазиаффинным преобразованием системы α_2. Тогда а) сопряженная система α_2^* является квазиаффинным преобразованием сопряженной системы α_1^*; б) из управляемости системы α_1 следует управляемость α_2; в) из наблюдаемости системы α_2 следует наблюдаемость α_1.*

Доказательство леммы следует из (3) с учетом ограниченности T.

Лемма 2. *Если системы α_1, α_2 соответственно слабо подобны системам α_1', α_2', то система $\alpha_2\alpha_1$ слабо подобна системе $\alpha_2'\alpha_1'$.*

Доказательство. Пусть T_k — оператор, осуществляющий слабое подобие между α_k и α_k'. Непосредственно проверяется, что оператор $T_1 \oplus T_2$ будет осуществлять слабое подобие между $\alpha_2\alpha_1$ и $\alpha_2'\alpha_1'$.

2. Напомним, что система $\alpha = (X, U, V; A, B, C, D)$ называется п. с. р., если оператор

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : X \oplus U \to X \oplus V$$

является сжимающим. Передаточная функция п. с. р. также принадлежит классу $B(U, V)$ [9]. П. с. р. α с п. ф. $\Theta(z)$ называется оптимальной, если для любой другой п. с. р. $\alpha' = (X', U, V; A', B', C', D')$ с той же п. ф. $\Theta_{\alpha'}(z) = \Theta_\alpha(z)$ имеем

$$\Big\| \sum_{k=0}^{n} A^k B u_k \Big\| \leqslant \Big\| \sum_{k=0}^{n} A'^k B' u_k \Big\|, \quad \forall u_k, n.$$

Оптимальная минимальная п. с. р. определяется своей п. ф. с точностью до унитарной эквивалентности [9]. В дальнейшем будем использовать следующую абстрактную модель оптимальной минимальной п. с. р. с заданной п. ф. [9].

Пусть $\alpha = (X, U, V; A, B, C, D)$ — какая-нибудь простая консервативная система рассеяния с п. ф. $\Theta(z)$. Тогда пространство X представляется в виде $X = G_* \oplus X^{yH} \oplus G$, где

$$X^{yH} = P_{X^H} X^y, G = X \ominus X^H, G_* = X^H \ominus X^{yH} = X^H \cap (X \ominus X^y).$$

Тогда система $\alpha^{yH} = (X^{yH}, U, V; A^{yH}, B^{yH}, C^{yH}, D)$, где $A^{yH} = P_{X^{yH}} A \mid X^{yH}$, $B^{yH} = P_{X^{yH}} B$, $C^{yH} = C \mid X^{yH}$, представляет собой оптимальную минимальную п. с. р. с п. ф. $\Theta(z)$. При этом имеют место следующие формулы:

$$\begin{gathered} (I - zA^{yH})^{-1} B^{yH} = P_{X^{yH}} (I - zA)^{-1} B, \\ (I - z(A^{yH})^*)^{-1} (C^{yH})^* = P_{X^{yH}} (I - zA^*)^{-1} C^*. \end{gathered} \tag{4}$$

Пусть $\alpha_k = (X_k, U_k, V_k; A_k, B_k, C_k, D_k)$, $k = 1, 2$, —простые консервативные системы рассеяния и α_k^{yH} — соответствующие оптимальные минимальные п. с. р.

Лемма 3. *Система $\tilde{\alpha} = \alpha_2^{yH} \alpha_1^{yH}$ управляема (соответственно наблюдаема) тогда и только тогда, когда при $x \in X_1^{yH} \oplus X_2^{yH}$, $x \perp X^y$ (соответственно $x \perp X^H$) $x = 0$. Здесь через X^y, X^H обозначаются управляемое и наблюдаемое подпространства системы $\alpha_2 \alpha_1$.*

Доказательство. Из (4) следует

$$\begin{aligned} (I - z\tilde{A})^{-1} \tilde{B} u &= (I - zA_1^{yH})^{-1} B_1^{yH} u + (I - zA_2^{yH})^{-1} B_2^{yH} \Theta_1(z) u = \\ &= P_{X_1^{yH}} (I - zA_1)^{-1} B_1 u + P_{X_2^{yH}} (I - zA_2)^{-1} B_2 \Theta_1(z) u. \end{aligned}$$

Пусть $x = x_1 + x_2 \in X_1^{yH} \oplus X_2^{yH}$, тогда

$$\begin{aligned} (x, (I - z\tilde{A})^{-1} \tilde{B} u) &= (x_1, P_{X_1^{yH}} (I - zA_1)^{-1} B_1 u) + \\ &+ (x_2, P_{X_2^{yH}} (I - zA_2)^{-1} B_2 \Theta_1(z) u) = (x_1, (I - zA_1)^{-1} B_1 u) + \\ &+ (x_2, (I - zA_2)^{-1} B_2 \Theta_1(z) u) = (x, (I - zA)^{-1} B u). \end{aligned}$$

В силу изложенного выше система $\tilde{\alpha}$ управляема (наблюдаемость доказывается аналогично). Лемма доказана.

2. Соединение оптимальных минимальных п. с. р. 1. Пусть $\alpha = (X, U, V; A, B, C, D)$ — модельная простая консервативная сис-

тема рассеяния с п. ф. $\Theta(z)$, т. е.

$$X=[L_2^+(V\oplus\overline{\Delta L_2)U})]\ominus\{(\Theta w,\Delta w):w\in L_2^+(U)\},\tag{5}$$

$$A(\varphi,\psi)=\bar\zeta(\varphi(\zeta)-\varphi(0),\psi(\zeta)),\ Bu=\bar\zeta((\Theta(\zeta)-\Theta(0))u,\Delta(\zeta)u),\tag{6}$$

$$C(\varphi,\psi)=\varphi(0),\quad D=\Theta(0),\quad \Delta=(I-\Theta^*(\zeta)\Theta(\zeta))^{1/2},\quad |\zeta|=1.\tag{6'}$$

Нетрудно показать, что для этой системы имеем [1,5]

$$X\ominus X^H=\{(0,\psi)\in X\},$$

$$X\ominus X^y=\{(\varphi,\psi)\in X:\Theta^*\varphi+\Delta\psi=0\}.$$

Более того,

$$X^H=[L_2^+(V)\oplus\overline{\Delta L_2^+(U)}]\ominus\{(\Theta w,\Delta w):w\in L_2^+(U)\}=$$

$$=\{(\varphi,\psi):\varphi\in L_2^+(V),\psi\in\overline{\Delta L_2^+(U)},\Theta^*\varphi+\Delta\psi\in L_2^-(U)\}.$$

Отсюда получаем

$$G_*=X^H\cap(X\ominus X^y)=\{(\varphi,\psi)\in X^H;\theta^*\varphi+\Delta\psi=0\}=$$

$$=\{(\varphi,\psi):\varphi\in L_2^+(V),\psi\in\overline{\Delta L_2^+(U)},\Theta^*\varphi+\Delta\psi=0\}.$$

Лемма 4. $(\varphi,\psi)\in X^{yH}\Leftrightarrow[(\varphi,\psi)\in X^H,\Delta_*\varphi-\Theta\psi\perp N]$, $N=\{\Delta_*\varphi'-$
$-\Theta\psi':(\varphi',\psi')\in G_*\}$.

Доказательство. Пусть $(\varphi,\psi)\in X^H$. Обозначим $\xi=\Theta^*\varphi+\Delta\psi$, $\eta=\Delta_*\varphi-\Theta\psi$; тогда $\varphi=\Theta\xi+\Delta_*\eta$, $\psi=\Delta\xi-\Theta^*\eta$. Поскольку $X^{yH}=X^H\ominus G_*$, то $(\varphi,\psi)\in X^{yH}$ тогда и только тогда, когда для любого $(\varphi',\psi')\in G_*$ имеем

$$0=\langle(\varphi,\psi),(\varphi',\psi')\rangle=(\Theta\xi+\Delta_*\eta,\varphi')+(\Delta\xi-\Theta^*\eta,\psi')=(\xi,\Theta^*\varphi'+\Delta\psi')+$$
$$+(\eta,\Delta_*\varphi'-\Theta\psi')=(\Delta_*\varphi-\Theta\psi,\Delta_*\varphi'-\Theta\psi'),$$

что и доказывает лемму.

2. Рассмотрим каскадное соединение n оптимальных минимальных п. с. р. Аналогично лемме 3 в случае n множителей справедлива лемма.

Лемма 5. *Система* $\alpha_n^{yH}\alpha_{n-1}^{yH}\dots\alpha_1^{yH}$ *управляема (соответственно наблюдаема) тогда и только тогда, когда при* $x\in X_1^{yH}\oplus X_2^{yH}\oplus\dots\oplus X_n^{yH}$, $x\perp X^y$ *(соответственно* $x\perp X^H$*)* $x=0$.

Теорема 1. *Пусть* α_k $k=1,2,\dots,n,$ *— отимальные минимальные п. с. р. с п. ф.* $\Theta_k(z)\in B(U_k,U_{k+1})$. *Для того чтобы система* $\alpha=\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1$ *была наблюдаемой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее свойство* $(\mathcal{H}^+)$: *если* $f_k\in\overline{\Delta_kL_2^+(U_k)}$,

$$\Delta_1f_1+\Theta_1^*\Delta_2f_2+\Theta_1^*\Theta_2^*\Delta_3f_3+\dots+\Theta_1^*\Theta_2^*\dots\Theta_{n-1}^*\Delta_nf_n\in L_2^-(U_1),\tag{7}$$

$$\Theta_kf_k-\Delta_{k*}[\Delta_{k+1}f_{k+1}+\Theta_{k+1}^*\Delta_{k+2}f_{k+2}+\Theta_{k+1}^*\Theta_{k+2}^*\Delta_{k+3}f_{k+3}+\dots$$
$$\dots+\Theta_{k+1}^*\Theta_{k+2}^*\dots\Theta_{n-1}^*\Delta_nf_n]\perp N_k,\quad k=1,2,\dots,n,\tag{8}$$

то $f_k=0$, $k=1,2,\dots,n$.

Замечание. Здесь N_k — множество, построенное по п. ф. $\Theta_k(z)$ так же, как и в лемме 4. Положим, что все элементы с индексами, отличными от $1,2,\dots,n$, равны 0.

Доказательство теоремы 1. Достаточно доказать теорему для модельных систем α_k^{yH}.

Необходимость. Пусть $\alpha_n^{yH}\alpha_{n-1}^{yH}\dots\alpha_1^{yH}$ наблюдаема, и имеются элементы f_k, удовлетворяющие (7), (8). По этим элементам строятся элементы φ_k, ψ_k, как и в доказательстве достаточности теоремы 1 [1], а именно, для $k = 1, 2, \ldots, n$ имеем

$$g_k = \Delta_k f_k + \Theta_k^* \Delta_{k+1} f_{k+1} + \Theta_k^* \Theta_{k+1}^* \Delta_{k+2} f_{k+2} + \ldots + \Theta_k^* \Theta_{k+1}^* \ldots \Theta_{n-1}^* \Delta_n f_n, \quad (9)$$

$$\varphi_1 = g_2 - g_2^-, \quad g_k^- = P_{L_2^-(U_k)} g_k, \quad (10)$$

$$s_k = \Theta_k \varphi_{k-1} + \Theta_k \Theta_{k-1} \varphi_{k-2} + \ldots + \Theta_k \Theta_{k-1} \ldots \Theta_2 \varphi_1, \quad (11)$$

$$\varphi_k = g_{k+1} - g_{k+1}^- - s_k, \quad (12)$$

$$\psi_k = f_k - \Delta_k (\varphi_{k-1} + s_{k-1}). \quad (13)$$

Доказано [1], что $(\varphi_k, \psi_k) \in X_k^H$. Покажем, что $(\varphi_k, \psi_k) \in X_k^{yH}$. Для этого необходимо показать $(\varphi_k, \psi_k) \perp G_{k*}$, или

$$\Delta_{k*} \varphi_k - \Theta_k \psi_k \perp N_k. \quad (14)$$

Из (9) — (13) имеем

$$\Delta_{k*} \varphi_k - \Theta_k \psi_k = \Delta_{k*} g_{k+1} - \Theta_k f_k - \Delta_{k*} g_{k+1}^-.$$

Условие (8) означает $\Delta_{k*} g_{k+1} - \Theta_k f_k \perp N_k$. С другой стороны для $(\varphi_k', \psi)_k' \in \in G_{k*}$ имеем

$$(\Delta_{k*} g_{k+1}^-, \Delta_{k*} \varphi_k' - \Theta_k \psi_k') = (g_{k+1}^-, \varphi_k') = 0.$$

Соотношение (14) доказано. Более того, соотношение (12) при $k = n$ означает (в силу леммы 2 [1])

$$x = (\varphi_1, \psi_1) \oplus (\varphi_2, \psi_2) \oplus \ldots \oplus (\varphi_n, \psi_n) \in X_1^{yH} \oplus X_2^{yH} \oplus \ldots \oplus x_n^{yH}, x \perp X^H.$$

Отсюда в силу леммы 5 $x = 0$, т. е. $\varphi_k = 0$, $\psi_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и значит, $f_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Достаточность. Пусть

$$x = (\varphi_1, \psi_1) \oplus (\varphi_2, \psi_2) \oplus \ldots \oplus (\varphi_n, \psi_n) \in X_1^{yH} \oplus X_2^{yH} \oplus \ldots \oplus X_n^{yH}, \quad x \perp X^H,$$

$$(\varphi_k, \psi_k) \in X_k^{yH}, \ \varphi_n + \Theta_n \varphi_{n-1} + \ldots + \Theta_n \Theta_{n-1} \ldots \Theta_2 \varphi_1 = 0. \quad (15)$$

Положим

$$f_k = \psi_k + \Delta_k h_{k-1}, \quad (16)$$

$$h_k = \varphi_k + \Theta_k \varphi_{k-1} + \ldots + \Theta_k \Theta_{k-1} \ldots \Theta_2 \varphi_1. \quad (17)$$

Как и в доказательстве необходимости теоремы 1 [1] показывается, что элементы f_k удовлетворяют (7). Тогда из [1] имеем

$$g_k = h_{k-1} + \xi_k + \Theta_k^* \xi_{k+1} + \ldots + \Theta_k^* \Theta_{k+1}^* \xi_{k+2} + \ldots + \Theta_k^* \Theta_{k+1}^* \ldots \Theta_{n-1}^* \xi_n,$$

$$\xi_k = \Theta_k^* \varphi_k + \Delta_k \psi_k \in L_2^- (U_k). \quad (18)$$

Обозначим

$$t_k = \xi_k + \Theta_k^* \xi_{k+1} + \Theta_k^* \Theta_{k+1}^* \xi_{k+2} + \ldots + \Theta_k^* \Theta_{k+1}^* \ldots \Theta_{n-1}^* \xi_n. \quad (19)$$

Из соотношений (15) — (19) и (9) вытекает

$$\Theta_k f_k - \Delta_{k*} [\Delta_{k+1} f_{k+1} + \Theta_{k+1}^* \Delta_{k+2} f_{k+2} + \Theta_{k+1}^* \Theta_{k+2}^* \Delta_{k+3} f_{k+3} + \ldots$$
$$\ldots + \Theta_{k+1}^* \Theta_{k+2}^* \ldots \Theta_{n-1}^* \Delta_n f_n] = \Theta_k (\psi_k + \Delta_k h_{k-1}) - \Delta_{k*} (h_k + t_{k+1}) =$$
$$= \Theta_k \psi_k + \Theta_k \Delta_k h_{k-1} - \Delta_{k*} (\varphi_k + \Theta_k h_{k-1} + t_{k+1}) = \Theta_k \psi_k - \Delta_{k*} \varphi_k - \Delta_{k*} t_{k+1}.$$

С другой стороны, из того, что $(\varphi_k, \psi_k) \in X_k^{yH}$ в силу леммы 4 получаем $\Theta_k \psi_k - \Delta_{k*} \varphi_k \perp N_k$. Из (19) видно, что если $t_k \in L_2^-(U_k)$, то $\Delta_{k*} t_{k+1} \perp N_k$. Таким образом, условие (8) выполняется, что влечет

$$f_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \quad (20)$$

Покажем теперь, что $x=0$. Учитывая (15) — (17) и (20), имеем

$$0=\Delta_n f_n=\Delta_n\psi_n+\Theta_n^*\varphi_n+h_{n-1}. \tag{21}$$

Поскольку $\Delta_n\psi_n+\Theta_n^*\varphi_n\in L_2^-(U_n)$, $h_{n-1}\in L_2^+(U_n)$, то $h_{n-1}=0$. Далее, учитывая последнее, $0=\Delta_{n-1}f_{n-1}=\Delta_{n-1}\psi_{n-1}+\Theta_{n-1}^*\varphi_{n-1}+h_{n-2}$, и по той же причине получаем $h_{n-2}=0$. Продолжая этот процесс, получаем $h_k=0$, $k=1,2,\ldots,n$, откуда $x=0$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть α_k, $k=1, 2, \ldots, n$,— оптимальные минимальные п. с. р. с п. ф. $\Theta_k(z)$. Для того чтобы система $\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1$ была управляемой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее свойство* ($\mathcal{Y}^+$): *если*

$$f_k\perp N_k,\quad f_k\in\overline{\Delta_{k*}L_2(U_{k+1})}, \tag{22}$$

$$\Theta_n\Theta_{n-1}\ldots\Theta_2\Delta_{1*}f_1+\Theta_n\Theta_{n-1}\ldots\Theta_3\Delta_{2*}f_2+\ldots+\Delta_{n*}f_n\in L_2^+(U_{n+1}), \tag{23}$$

$$\Theta_k^*f_k-\Delta_k[\Delta_{k-1*}f_{k-1}+\Theta_{k-1}\Delta_{k-2*}f_{k-2}+\ldots+\Theta_{k-1}\Theta_{k-2}\ldots\ \Theta_2\Delta_{1*}f_1]\in$$
$$\in\overline{\Delta_kL_2^+(U_k)},\quad k=1,2,\ldots,n, \tag{24}$$

то $f_k=0$, $k=1,2,\ldots,n$.

Доказательство теоремы подобно доказательству теоремы 1, поэтому лишь приведем соответствующие построения, опуская детали.

Достаточность. Для $x=(\varphi_1,\psi_1)\oplus(\varphi_2,\psi_2)\oplus\ldots\oplus(\varphi_n,\psi_n)\in X_1^{yH}\oplus\oplus X_2^{yH}\oplus\ldots\oplus X_n^{yH}$ и $x\perp X^y$ положим

$$f_k=\eta_k+\Delta_{k*}h_{k+1},$$
$$h_k=\xi_k+\Theta_k^*\xi_{k+1}+\Theta_k^*\Theta_{k+1}^*\xi_{k+2}+\ldots+\Theta_k^*\Theta_{k+1}^*\ldots\Theta_{n-1}^*\xi_n, \tag{25}$$
$$\eta_k=\Delta_{k*}\varphi_k-\Theta_k\psi_k,\quad \xi_k=\Theta_k^*\varphi_k+\Delta_k\psi_k.$$

Доказывается, что f_k удовлетворяют (22) — (24), откуда $f_k=0$, и затем проверятся справедливость $x=0$.

Необходимость. Для f_k, удовлетворяющих (22)—(24), полагаем

$$g_k=\Delta_{k*}f_k+\Theta_k\Delta_{k-1*}f_{k-1}+\ldots+\Theta_k\Theta_{k-1}\ldots\Theta_2\Delta_{1*}f_1,\quad k=1,2,\ldots,n,$$
$$\xi_n=P_{L_2^-(U_n)}g_{n-1}.$$

Далее положим

$$\xi_k=P_{L_2^-(U_k)}g_{k-1}-[\Theta_k^*\xi_{k+1}+\Theta_k^*\Theta_{k+1}^*\xi_{k+2}+\ldots+\Theta_k^*\Theta_{k+1}^*\ldots\Theta_{n-1}^*\xi_n],$$

$$\eta_k=f_k-\Delta_{k*}h_{k+1},\quad k=1,2,\ldots,n,$$

где h_{k+1} вычисляется по (25). Затем для $\varphi_k=\Theta_k\xi_k+\Delta_{k*}\eta_k$, $\psi_k=\Delta_k\xi_k-\Theta_k^*\eta_k$ проверяется справедливость

$$x=(\varphi_1,\psi_1)\oplus(\varphi_2,\psi_2)\oplus\ldots\oplus(\varphi_n,\psi_n)\in X_1^{yH}\oplus X_2^{yH}\oplus\ldots\oplus X_n^{yH},\quad x\perp X^y.$$

3. Соединение $*$-оптимальных минимальных п. с. р. Напомним, что наблюдаемая п. с. р. $\alpha=(X, U, V; A, B, C, D)$ называется $*$-оптимальной, если для любой другой наблюдаемой п. с. р. $\alpha'=(X', U, V; A', B', C', D')$ с п. ф. $\Theta_{\alpha'}(z)=\Theta_\alpha(z)$ имеем

$$\left\|\sum_{k=0}^{n}A^kBu_k\right\|\geqslant\left\|\sum_{k=0}^{n}A'^kB'u_k\right\|,\quad\forall u_k, n.$$

Минимальная $*$-оптимальная п. с. р. определяется своей п. ф. с точностью до унитарной эквивалентности.

Пусть α — модельная консервативная система рассеяния (5) — (6'). Перейдем от α к унитарно эквивалентной системе α^* с помощью следующего унитарного оператора: $W:(\varphi,\psi)\to(\Theta^*\varphi+\Delta\psi,\Delta_*\varphi-\Theta\psi)$, отображающего пространство вида (6) в

$$X_* = [L_2^-(U)\oplus\overline{\Delta_* L_2(V)}]\ominus\{(\Theta^* w,\Delta_* w):w):w\in L_2^-(V)\},$$

при этом операторы системы α переходят в операторы

$$A_*(\xi,\eta)=\bar\xi(\xi(\zeta)-\Theta^*(\zeta)\varphi(0),\quad \eta(\zeta)-\Delta_*(\zeta)\varphi(0)),\quad C(\xi,\eta)=\varphi(0),$$

$$B_* u=\bar\zeta((I-\Theta^*(\zeta)\Theta(0))u,\quad -\Delta_*(\zeta)\Theta(0)u),\quad D_*=D,\varphi=\Theta\xi+\Delta_*\eta.$$

На основе системы α_* строим модельную $*$-оптимальную минимальную п. с. р. $\alpha_*^{Hy}=(X_*^{Hy},U,V;A_*^{Hy},B_*^{Hy},C_*^{Hy},D_*^{Hy})$, где

$$X_*^{Hy}=P_{X_*^y}X_*^H,\quad A_*^{Hy}=P_{X_*^{Hy}}A_*\mid X_*^{Hy}, B_*^{Hy}=P_{X_*^{Hy}}B_*,$$

$$C_*^{Hy}=C_*\mid X_*^{Hy},\quad D_*^{Hy}=D_*.$$

С помощью этой модели доказываются следующие результаты. Ограничимся лишь их формулировкой.

Теорема 3. *Пусть α_k, $k=1,2,\dots,n_1$ — $*$-оптимальные минимальные п. с. р. с п. ф. $\Theta_k(z)$. Для того чтобы $\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1$ была управляемой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее свойство ($\mathcal{H}^-$): если*

$$f_k\in\overline{\Delta_{k*}L_2^-(U_{k+1})},$$

$$\Theta_n\Theta_{n-1}\dots\Theta_2\Delta_{1*}f_1+\Theta_n\Theta_{n-1}\dots\Theta_3\Delta_{2*}f_2+\dots+\Delta_{n*}f_n\in L_2^+(U_{n+1}),$$

$$\Theta_k^* f_k-\Delta_k[\Delta_{k-1*}f_{k-1}+\Theta_{k-1}\Delta_{k-2*}f_{k-2}+\dots+\Theta_{k-1}\Theta_{k-2}\dots\Theta_2\Delta_{1*}f_1]\perp M_{k*},$$

$$k=1,2,\dots,n,$$

где

$$M_{k*}=\{\Delta_k\xi_k-\Theta_k^*\eta_k:\xi_k\in L_2^-(U_k),\eta_k\in\overline{\Delta_{k*}L_2^-(U_{k+1})},\quad \Theta_k\xi_k+\Delta_{k*}\eta_k=0\},$$

то $f_k=0$, $k=1,2,\dots,n$.

Теорема 4. *Пусть α_k, $k=1,2,\dots,n$, — $*$-оптимальные минимальные п. с. р. с п. ф. $\Theta_k(z)$. Для того чтобы $\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1$ была наблюдаемой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее свойство ($\mathcal{Y}^-$): если*

$$f_k\in\overline{\Delta_k L_2(U_k)},\quad f_k\perp M_{k*},$$

$$\Delta_1 f_1+\Theta_1^*\Delta_2 f_2+\Theta_1^*\Theta_2^*\Delta_3 f_3+\dots+\Theta_1^*\Theta_2^*\dots\Theta_{n-1}^*\Delta_n f_n\in L_2^-(U_1),$$

$$\Theta_k f_k-\Delta_{k*}[\Delta_{k+1}f_{k+1}+\Theta_{k+1}^*\Delta_{k+2}f_{k+2}+\Theta_{k+1}^*Q_{k+2}^*\Delta_{k+3}f_{k+3}+\dots$$

$$\dots+\Theta_{k+1}^*\Theta_{k+2}^*\dots\Theta_{n-1}^*\Delta_n f_n]\in\overline{\Delta_{k*}L_2^-(U_{k+1})},\quad k=1,2,\dots,n,$$

то $f_k=0$, $k=1,2,\dots,n$.

4. Соединение минимальных п. с. р.

Лемма 6. *Пусть α_1,α_2 оптимальные (соответственно $*$-оптимальные) минимальные п. с. р., α_1',α_2' — минимальные п. с. р. с п. ф. $\Theta_{\alpha_1'}=\Theta_{\alpha_1},\Theta_{\alpha_2'}=\Theta_{\alpha_2}$. Если система $\alpha_2\alpha_1$ наблюдаема (соответственно управляема), то $\alpha_2'\alpha_1'$ наблюдаема (соответственно управляема).*

Доказательство следует из того, что если система α_k оптимальна минимальна, то α_k является квазиаффинным преобразованием α_k'. Затем используются леммы 1 и 2.

Теорема 5. *Пусть α_k, $k=1,2,\dots,n$, — минимальные п. с. р. с п. ф. $\Theta_k(z)$. Для того чтобы система $\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1$ была минимальной, необходимо, чтобы выполнялись условия ($\mathcal{Y}^+$)($\mathcal{Y}^-$) и достаточно, чтобы выполнялись условия ($\mathcal{H}^+$)($\mathcal{H}^-$).*

Теорема 6. *Пусть* α_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, *- минимальные п. с. р. с п. ф.* $\Theta_k(z)$. *Если факторизация* $\Theta(z) = \Theta_n(z)\Theta_{n-1}(z)\ldots\Theta_1(z)$ *одновременно* $(+)$. *регулярна и* $(-)$. *регулярна, то система* $\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1$ *минимальна.*

1. *До Конг Хань.* Факторизация передаточных функций. I. (±) Регулярная факторизация // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**.— № 3.— С. 312—317.
2. *Bart H., Gohberg I., Kaashoek M. A.* Minimal factorization of matrix and operator functions.— Birkhäuser Verlag, 1977.— 277 p.
3. *Ball J. A., Gohberg I., Rodman L.* Minimal factorization of mercmorphic matrix fanctions in terms of local data // Int. Equat. Oper. Theory.— 1987.— **10**.— P. 309—348.
4. *Секефальви — Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве.— М. : Мир, 1970.— 431 с.
5. *Бродский М. С.* Унитарные операторные узлы и их характеристические функции // Успехи мат. наук.— 1978.— **33**.— Вып. 4.— С. 146—168.
6. *Аров Д. З.* Пассивные линейные стационарные динамические системы // Сиб. мат журн.— 1979.— **20**, № 2.— С. 211—228.
7. *До Конг Хань.* О регулярной факторизации // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1988.— № 12.— С. 14—16.
8. *До Конг Хань.* О вполне неунитарности // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1979.— Вып. 31.— С. 49—55.
9. *Аров Д. З.* Устойчивые диссипативные линейные стационарные динамические системы рассеяния // J. Oper. Theory.— 1979.— **2**.— P. 95—126.

Вьетнам

Получено 17.03.89