УДК 530.1

Ю. М. Березанский, М. Е. Шмойш

Неизоспектральные нелинейные разностные уравнения

Строится широкий класс эволюционных нелинейных дифференциально-разностных уравнений типа полубесконечной цепочки Тоды, для которых дается процедура нахождения решения методом обратной спектральной задачи, связанной с якобиевыми матрицами.

Будується широкий клас еволюційних нелінійних диференціально-різницевих рівнянь типу напівнескінченного ланцюжка Тоди, для яких дається процедура знаходження розв'язків методом оберненої спектральної задачі, пов'язаної з якобієвими матрицями.

В работах [1, 2] показано, что спектральная мера якобиевой матрицы, стандартно связанной с решением полубесконечной цепочки Тоды, эволюционирует весьма простым образом во времени, при этом спектр матрицы не меняется. Это вместе с классической обратной задачей для якобиевых матриц дало возможность проинтегрировать такие цепочки в классе ограниченных решений. В настоящей статье, развивающей результаты [3, 4], будет указан некоторый класс нелинейных разностных уравнений, для которых спектральная мера соответствующей решению якобиевой матрицы меняется более сложным, но обозримым образом (спектр при этом может изменяться). Такие уравнения интегрируются подобно [1, 2]. Переход от якобиевой матрицы, связанной с решением, к ее спектральной мере, можно воспринимать как «спектральное преобразование» рассматриваемого нелинейного уравнения, при котором оно упрощается. С этой точки зрения данная статья (как и работы [3, 4]) тесно связана с идеей спектральных преобразований, развитых в [5] и относящих решению не спектральную меру, а данные рассеяния. Разностный аналог таких спектральных преобразований и их применения изучены в [6].

1. Введем одно преобразование меры на оси. Пусть заданы две один раз непрерывно дифференцируемые по совокупности переменных функции $\mathbb{R}^1 \times [0, T) \ni (\lambda, t) \mapsto \Phi(\lambda, t), \Psi(\lambda, t) \in \mathbb{R}^1$ ($T \in (0, \infty)$ фиксировано). Рассмотрим дифференциальные уравнения относительно $\lambda(t)$ и $r(\lambda, t)$

$$(d\lambda/dt)(t) = \Phi(\lambda(t), t), \quad (\partial r/\partial t)(\lambda, t) = \Psi(\lambda, t)\, r(\lambda, t), \qquad t \in [0, T), \ \lambda \in \mathbb{R}^1. \quad (1)$$

Пусть $\lambda(t) = \lambda(t, \mu)$ — решение первого из этих уравнений, удовлетворяющее начальному условию $\lambda(0) = \mu \in \mathbb{R}^1$. При фиксированном $t > 0$ оно задает отображение $\mathbb{R}^1 \ni \mu \to \omega_t(\mu) = \lambda(t, \mu) \in \mathbb{R}^1$.

Пусть $\rho(\cdot, 0)$ — конечная мера, определенная на σ-алгебре $\mathscr{B}(\mathbb{R}^1)$ борелевских множеств на оси: $\mathscr{B}(\mathbb{R}^1) \ni \alpha \mapsto \rho(\alpha, 0) \in [0, \infty)$. Введенное отображение определяет отображение этой меры, именно: ее образ $\tilde{\rho}(\cdot, t)$ задается формулой $\tilde{\rho}(\alpha, t) = \rho(\omega_t^{-1}(\alpha), 0)$, $\alpha \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^1)$, где $\omega_t^{-1}(\alpha)$ — полный прообраз множества α при отображении ω_t.

Рассмотрим решение $r(\lambda, t)$ второго уравнения из (1), удовлетворяющего начальному условию $r(\lambda, 0) = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$ — параметр,

$$r(\lambda, t) = \exp\left(\int_0^t \Psi(\lambda, \tau)\, d\tau\right).$$

Введем меру $\rho(\cdot; t)$, положив

$$\rho(\alpha, t) = \int_{\alpha} r(\lambda, t)\, d\tilde{\rho}(\lambda, t) = \int_{\alpha} \exp\left(\int_0^t \Psi(\lambda, \tau)\, d\tau\right) d\tilde{\rho}(\lambda, t) =$$

$$= \int_{\omega_t^{-1}(\alpha)} \exp\left(\int_0^t \Psi(\lambda(t, \mu), \tau)\, d\tau\right) d\rho(\mu, 0),\ \alpha \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^1),\ t \in [0, T). \qquad (2)$$

Будем предполагать, что $\forall t > 0$ мера $\rho(\cdot, t)$ конечна (для этого, например, достаточно требовать ограниченность $\Psi(\lambda, t)$ при $\lambda \in \operatorname{supp} \tilde{\rho}(\cdot, t)$ и t, пробегающем любой конечный интервал из $[0, T)$).

Итак, уравнения (1) определяют некоторое преобразование меры $\rho(\cdot, 0) \mapsto \rho(\cdot, t)$ типа «отображение + умножение». Получим формулу дифференцирования по t интеграла по такой мере. Пусть $\mathbb{R}^1 \times [0, T) \ni (\lambda, t) \mapsto F(\lambda, t) \in \mathbb{C}^1$ — один раз непрерывно дифференцируемая функция. Тогда в предположении существования фигурирующих ниже интегралов

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}^1} F(\lambda, t)\, d\rho(\lambda, t)\right) = \int_{\mathbb{R}^1} ((\partial F/\partial \lambda)(\lambda, t)\, \Phi(\lambda, t) + (\partial F/\partial t)(\lambda, t) +$$
$$+ F(\lambda, t)\, \Theta(\lambda, t))\, d\rho(\lambda; t),\ \Theta(\lambda, t) = \Psi(\lambda, t) +$$
$$+ \Phi(\lambda, t) \int_0^t (\partial \Psi/\partial \lambda)(\lambda, \tau)\, d\tau,\ \lambda \in \mathbb{R}^1,\ t \in [0, T). \qquad (3)$$

2. Задание меры (2) упрощается в случае, когда исходная мера $\rho(\cdot, 0)$ сосредоточена в конечном числе точек (или на счетном множестве, не имеющем предельных точек). Так, рассмотрим прежние функции Φ и Ψ и вместо (1) уравнения

$$(d\lambda_j/dt)(t) = \Phi(\lambda_j(t), t),\ (d\rho_j/dt)(t) = \Psi(\lambda_j(t), t)\, \rho_j(t),$$
$$j = 0, \ldots, N,\ t \in [0, T). \qquad (4)$$

Будем считать, что $\forall t \in [0, T)$ $\rho_j(t) > 0$ — мера, сосредоточенная в точке $\lambda_j(t)$, $j = 0, \ldots, N$. Это частный случай схемы п. 1. Действительно, положим $\rho(\alpha, 0) = 1$, если $\alpha = \{\lambda_j(0)\}$ и $\forall t \in [0, T)$ $r(\lambda, t) = \rho_j(t)$ для λ в некоторой окрестности точки $\lambda_j(t)$, $j = 0, \ldots, N$; вне этих окрестностей продолжим $r(\lambda, t)$ гладким образом. Тогда согласно (2) $\rho(\alpha, t) = \rho_j(t)$, если $\alpha = \{\lambda_j(t)\}$, $j = 0, \ldots, N$, $t \in [0, T)$. В формуле (3) $\Theta = \Psi$.

3. Напомним хорошо известные факты теории якобиевых матриц. В пространстве l_2 последовательностей $u = (u_j)_{j=0}^{\infty}$ разностное выражение с ограниченными коэффициентами

$$(\mathscr{L}u)_j = a_{j-1}u_{j-1} + b_j u_j + a_j u_{j+1},\ a_j > 0,\ b_j \in \mathbb{R}^1,$$
$$j \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \ldots\};\ a_{-1} = 0 \qquad (5)$$

определяет ограниченный самосопряженный оператор (якобиеву матрицу) $(Lu)_j = (\mathscr{L}u)_j$, $u \in l_2$, $j \in \mathbb{Z}_+$; $u_{-1} = 0$. Пусть $\mathscr{B}(\mathbb{R}^1) \ni \alpha \mapsto \rho(\alpha) \in [0, \infty)$ — его спектральная мера. Такой мерой может служить произвольная ненулевая конечная мера на $\mathscr{B}(\mathbb{R}^1)$, носитель которой ограничен и содержит бесконечное число точек. Коэффициенты выражения (5) восстанавливаются по мере $\rho(\cdot)$ при помощи формул

$$a_j = \int_{\mathbb{R}^1} \lambda P_j(\lambda)\, P_{j+1}(\lambda)\, d\rho(\lambda),\ b_j = \int_{\mathbb{R}^1} \lambda P_j^2(\lambda)\, d\rho(\lambda),\ j \in \mathbb{Z}_+, \qquad (6)$$

где $P_0(\lambda) = (\rho(\mathbb{R}^1))^{-1/2}$, $P_1(\lambda)$, ... — последовательность ортонормированных полиномов, полученная ортогонализацией степеней $1, \lambda, \lambda^2, \ldots$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^1, d\rho(\lambda))$ (формулы (6) могут быть переписаны и в более явном виде через некоторые определители от моментов меры $\rho(\cdot)$).

Эти формулы показывают, что якобиева матрица L является матричной записью в базисе $(P_j(\lambda))_{j=0}^{\infty}$ оператора умножения на λ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^1, d\rho(\lambda))$. Обозначим через $D_L = (d_{jk})_{j,k=0}^{\infty}$ аналогичную матрицу для оператора дифференцирования $' = \partial/\partial\lambda$, т. е. $d_{jk} = \int\limits_{\mathbb{R}} P_j'(\lambda) P_k(\lambda)\, d\rho(\lambda)$, $j, k \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно, $d_{jk} = 0$ при $k \geqslant j$ и $P_j'(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{j-1} d_{jk} P_k(\lambda)$. Дифференцируя соотношение $(\mathcal{L}P_\cdot(\lambda))_j = \lambda P_j(\lambda)$, $j \in \mathbb{Z}_+$ по λ, легко получить рекуррентные формулы для вычисления d_{jk}. В результате, например, получим $d_{j,j-1} = j a_{j-1}^{-1}$, $d_{j,j-2} = a_{j-2}^{-1} a_{j-1}^{-1} \sum\limits_{l=1}^{j-1} l(b_{l-1} - b_l)$. Подчеркнем, что d_{jk} являются некоторыми нелинейными функциями переменных a_j, b_j, $j \in \mathbb{Z}_+$.

4. Будем считать, что элементы якобиевой матрицы L из п. 3 зависят гладким образом от времени t: $a_j = a_j(t)$, $b_j = b_j(t)$, $L = L(t)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, $t \in [0, T)$. Предположим, что функции Φ и Ψ являются полиномами относительно λ и поэтому $\Phi(L(t), t)$, $\Theta(L(t), t)$ — полиномы от якобиевой матрицы $L(t)$, коэффициенты которых зависят от t. Рассмотрим уравнение

$$\dot{L}(t) = \Phi(L(t), t) + [L(t), \langle D_{L(t)} \Phi(L(t), t) + 1/2\, \Theta(L(t), t)\rangle],$$
$$\cdot = d/dt, \quad t \in [0, T). \tag{7}$$

Здесь $[A, B] = AB - BA$ — коммутатор, $\langle (c_{jk})_{j,k=0}^{\infty} \rangle$ обозначает матрицу с элементами c_{jk} ниже главной диагонали, $-c_{jk}$ — выше главной диагонали и нулем на ней. Так как полином от якобиевой матрицы имеет лишь конечное число отличных от нуля диагоналей, параллельных главной, а $D_{L(t)}$ — нижняя треугольная матрица, то все произведения матриц, фигурирующие в (7), имеют смысл.

Расписывая (7) поэлементно, получим дифференциально-разностное нелинейное уравнение относительно переменных $(a_0(t), a_1(t), \ldots) = a(t)$ и $(b_0(t), b_1(t), \ldots) = b(t)$. В случае $\Phi = 0$, $\Psi = \lambda$ уравнение (7) примет вид обычного уравнения Лакса $\dot{L}(t) = [L(t), \frac{1}{2} \langle L(t) \rangle]$, являющегося другой записью полубесконечной цепочки Тоды.

Для (7) можно поставить задачу Коши: по заданному начальному значению $L(0)$ найти $L(t)$, $t \in [0, T)$, удовлетворяющее (7). Иными словами, по заданным начальным значениям $a(0)$, $b(0)$ необходимо найти $a(t)$, $b(t)$, причем решение ищется в классе ограниченных по $j \in \mathbb{Z}_+$ последовательностей $a_j(t) > 0$, $b_j(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T)$.

Теорема. *Решение приведенной задачи Коши существует, единственно и может быть найдено следующим образом. Пусть* $\rho(\cdot, 0)$ — *спектральная мера якобиевой матрицы* $L(0) = (a(0), b(0))$. *При помощи решений уравнений* (1) *построим согласно* (2) *по мере* $\rho(\cdot, 0)$ *меру* $\rho(\cdot, t)$, $t \in [0, T)$, *а затем посредством формул* (6), *примененных к мере* $\rho(\cdot, t)$, *найдем* $L(t) = (a(t), b(t))$.

Переход от якобиевой матрицы $L(t)$ к ее спектральной мере $\rho(\cdot, t)$ можно назвать спектральным преобразованием. Смысл сформулированной теоремы заключается в том, что сложное нелинейное уравнение (7) при спектральном преобразовании упрощается: если $L(t)$ эволюционирует согласно (7), то соответствующая спектральная мера $\rho(\cdot, t)$ эволюционирует согласно (2), а эту эволюцию можно подсчитать, если уметь решать первое из уравнений (1).

Отметим, что в случае общих функций Φ, Ψ сформулированная теорема сохраняется, если под решениями операторного уравнения (7) подразумевать слабые решения.

5. Уравнения (4) аналогично п. 4 связаны со следующей $N+1$-мерной системой, заменяющей (7):

$$\dot{L}(t)=\Phi(L(t),t)+[L(t),\ \langle D_{L(t)}\Phi(L(t),t)+\frac{1}{2}\Psi(L(t),t)\rangle],\quad t\in[0,T). \tag{8}$$

Здесь $L(t)$ — якобиева $N+1$-мерная матрица, $\lambda_0(t)<\ldots<\lambda_N(t)$; $\rho_0(t)=\rho(\{\lambda_0(t)\})>0,\ \ldots,\ \rho_N(t)=\rho(\{\lambda_N(t)\})>0$ — ее спектр и спектральная мера. Тогда теорема также верна, в формулах (6) для a_j, $j=0,\ldots,N-1$, b_j, $j=0,\ldots,N$, интегралы переходят в суммы.

6. От записи (7) дифференциально-разностного уравнения в форме Лакса можно перейти к обычной записи. Уравнение (7) примет вид

$$\begin{gathered}\dot{a}_n=(\Phi(L(t),t))_{n,n+1}+a_n/2\,((\Theta(L(t),t))_{n+1,n+1}-(\Theta(L(t),t))_{n,n})+\\ +a_{n+1}(D_{L(t)}\Phi(L(t),t))_{n,n+2}+a_{n-1}(D_{L(t)}\Phi(L(t),t))_{n-1,n+1}+\\ +(b_{n+1}-b_n)(D_{L(t)}\Phi(L(t),t))_{n,n+1},\quad \dot{b}_n=(\Phi(L(t),t))_{n,n}+\\ +a_n((\Theta(L(t),t))_{n,n+1}+2(D_{L(t)}\Phi(L(t),t))_{n,n+1})-\\ -a_{n-1}((\Theta(L(t),t))_{n-1,n}+2(D_{L(t)}\Phi(L(t),t))_{n-1,n}),\\ n\in\mathbb{Z}_+,\ a_{-1}=0,\ t\in[0,T).\end{gathered}\tag{9}$$

Здесь $(C_{jk})_{j,k=0}^{\infty}$ — матрица оператора C в стандартном базисе пространства l_2. Как и ранее, уравнение (9) имеет смысл, если Φ, Ψ — полиномы, в общем случае необходимо вводить слабые решения. Благодаря матрице $D_{L(t)}$, коэффициенты уравнения (9) могут зависеть от n, причем зависимость полиномиальная—см. п. 3 (отметим, что в [5, 6] зависимость линейная).

Система (8) также представима в форме (9), роль Θ играет Ψ.

7. Полученные результаты могут быть обобщены на дифференциальные уравнения; роль якобиевой матрицы $L(t)$ играет оператор Штурма—Лиувилля $-u''+q(x,t)u$ на полуоси $[0,\infty)$. Основная трудность, возникающая при этом, заключается в том, что спектральная мера $\rho(\cdot;t)$ такого оператора для каждого $t\in[0,T)$ имеет определенное поведение при $|\lambda|\to\infty$ и поэтому функции Φ, Ψ должны быть такими, чтобы соответствующее преобразование «отображение + умножение» это поведение сохраняло.

1. *Березанский Ю. М.* Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной спектральной задачи // Докл. АН СССР.— 1985.— **281**, № 1.— С. 16—19.
2. *Berezanski Yu. M.* The integration of semi-infinite Toda chain by means of inverse spectral problem // Repts. Math. Phys.— 1986.— **24**, N 1.— P. 21—47.
3. *Березанский Ю. М., Гехтман М. И., Шмойш М. Е.* Интегрирование методом обратной спектральной задачи некоторых цепочек нелинейных разностных уравнений // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 1.— С. 84—89.
4. *Шмойш М. Е.* Неизоспектральные деформации якобиевых матриц и нелинейные разностные уравнения // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 2.— С. 282—285.
5. *Калоджеро Ф., Дегасперис А.* Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений.— М. : Мир, 1985.— 472 с.
6. *Bruschi M., Ragnisco O., Levi D.* Evolution equations associated with the discrete analog of the matrix Schrödinger spectral problem solvable by the inverse spectral transform // J. Math. Phys.— 1981.— **22**, N 11.— P. 2463—2471.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 26.07.89

5. Уравнения (4) аналогично п. 4 связаны со следующей $N+1$-мерной системой, заменяющей (7):

$$\dot{L}(t) = \Phi(L(t), t) + [L(t), \langle D_{L(t)}\Phi(L(t), t) + \frac{1}{2}\Psi(L(t), t)\rangle], \quad t \in [0, T). \tag{8}$$

Здесь $L(t)$ — якобиева $N+1$-мерная матрица, $\lambda_0(t) < \ldots < \lambda_N(t)$; $\rho_0(t) = \rho(\{\lambda_0(t)\}) > 0, \ldots, \rho_N(t) = \rho(\{\lambda_N(t)\}) > 0$ — ее спектр и спектральная мера. Тогда теорема также верна, в формулах (6) для a_j, $j = 0, \ldots, N-1$, b_j, $j = 0, \ldots, N$, интегралы переходят в суммы.

6. От записи (7) дифференциально-разностного уравнения в форме Лакса можно перейти к обычной записи. Уравнение (7) примет вид

$$\dot{a}_n = (\Phi(L(t), t))_{n,n+1} + a_n/2\,((\Theta(L(t), t))_{n+1,n+1} - (\Theta(L(t), t))_{n,n}) +$$
$$+ a_{n+1}(D_{L(t)}\Phi(L(t), t))_{n,n+2} + a_{n-1}(D_{L(t)}\Phi(L(t), t))_{n-1,n+1} +$$
$$+ (b_{n+1} - b_n)(D_{L(t)}\Phi(L(t), t))_{n,n+1}, \quad \dot{b}_n = (\Phi(L(t), t))_{n,n} +$$
$$+ a_n((\Theta(L(t), t))_{n,n+1} + 2(D_{L(t)}\Phi(L(t), t))_{n,n+1}) -$$
$$- a_{n-1}((\Theta(L(t), t))_{n-1,n} + 2(D_{L(t)}\Phi(L(t), t))_{n-1,n}),$$
$$n \in \mathbb{Z}_+, \quad a_{-1} = 0, \quad t \in [0, T). \tag{9}$$

Здесь $(C_{jk})_{j,k=0}^{\infty}$ — матрица оператора C в стандартном базисе пространства l_2. Как и ранее, уравнение (9) имеет смысл, если Φ, Ψ — полиномы, в общем случае необходимо вводить слабые решения. Благодаря матрице $D_{L(t)}$, коэффициенты уравнения (9) могут зависеть от n, причем зависимость полиномиальная—см. п. 3 (отметим, что в [5, 6] зависимость линейная).

Система (8) также представима в форме (9), роль Θ играет Ψ.

7. Полученные результаты могут быть обобщены на дифференциальные уравнения; роль якобиевой матрицы $L(t)$ играет оператор Штурма—Лиувилля $-u'' + q(x, t)u$ на полуоси $[0, \infty)$. Основная трудность, возникающая при этом, заключается в том, что спектральная мера $\rho(\cdot; t)$ такого оператора для каждого $t \in [0, T)$ имеет определенное поведение при $|\lambda| \to \infty$ и поэтому функции Φ, Ψ должны быть такими, чтобы соответствующее преобразование «отображение + умножение» это поведение сохраняло.

1. *Березанский Ю. М.* Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной спектральной задачи // Докл. АН СССР.— 1985.— **281**, № 1.— С. 16—19.
2. *Berezanski Yu. M.* The integration of semi-infinite Toda chain by means of inverse spectral problem // Repts. Math. Phys.— 1986.— **24**, N 1.— P. 21—47.
3. *Березанский Ю. М., Гехтман М. И., Шмойш М. Е.* Интегрирование методом обратной спектральной задачи некоторых цепочек нелинейных разностных уравнений // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 1.— С. 84—89.
4. *Шмойш М. Е.* Неизоспектральные деформации якобиевых матриц и нелинейные разностные уравнения // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 2.— С. 282—285.
5. *Калоджеро Ф., Дегасперис А.* Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений.— М. : Мир, 1985.— 472 с.
6. *Bruschi M., Ragnisco O., Levi D.* Evolution equations associated with the discrete analog of the matrix Schrödinger spectral problem solvable by the inverse spectral transform // J. Math. Phys.— 1981.— **22**, N 11.— P. 2463—2471.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 26.07.89