УДК 512.64

*В. В. Сергейчук*

# Классификация пар подпространств в пространствах со скалярным произведением

С точностью до классификации эрмитовых форм получена классификация наборов $\mathscr{P} = (V_F; U_1, U_2)$, состоящих из конечномерного векторного пространства $V$ над полем характеристики $\neq 2$ с симметрической, или кососимметрической, или эрмитовой формой $F$ и двух его подпространств $U_1$, $U_2$. Два набора $\mathscr{P}$ и $\mathscr{P}'$ отождествляются, если существует изометрия $\varphi : V_F \to V'_{F'}$, для которой $\varphi(U_i) = U'_i$, $i = 1, 2$.

З точністю до класифікації ермітових форм одержана класифікація наборів $\mathscr{P} = (V_F; U_1, U_2)$, складених із скінченновимірного векторного простору $V$ над полем характеристики $\neq 2$ з симетричною, або кососиметричною, або ермітовою формою $F$ та двох його підпросторів $U_1$, $U_2$. Два набори $\mathscr{P}$ і $\mathscr{P}'$ ототожнюються, якщо існує ізометрія $\varphi : V_F \to V'_{F'}$, для якої $\varphi(U_i) = U'_i$, $i = 1, 2$.

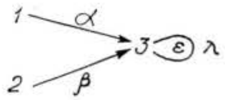
Задача о классификации четверок подпространств в конечномерных векторных пространствах была решена Л. А. Назаровой [1, 2] и независимо И. М. Гельфандом, В. А. Пономаревым [3, 4]. В настоящей статье рассмотрим задачу о классификации пар подпространств в пространствах со скалярным произведением. Решим ее над полем характеристики $\neq 2$ с точностью до классификации эрмитовых форм над полем. Результат частично анонсирован в [5].

Уточним формулировку задачи. Обозначим через $\mathcal{P} = (V_F;\ U_1,\ U_2)$ набор, состоящий из конечномерного векторного пространства $V$ с симметрической, или кососимметрической, или эрмитовой формой $F$ и двух его подпространств $U_1$, $U_2$. Два набора $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$ назовем изоморфными, если существует невырожденное линейное отображение $\varphi : V \to V'$, сохраняющее скалярное произведение и подпространства $U_1$, $U_2$, т. е. $F(x, y) = F'(\varphi(x), \varphi(y))$, $\varphi(U_1) = U_1'$, $\varphi(U_2) = U_2'$. Цель статьи — классифицировать наборы $\mathcal{P}$ с точностью до изоморфизма.

**1.** Основной результат. Для классификации наборов $\mathcal{P} = (V_F;\ U_1, U_2)$ воспользуемся методом, предложенным в [6, 5, 7].

Пусть $K$ — поле характеристики $\neq 2$ с инволюцией $a \to \bar{a}$ (возможно, тривиальной). Зафиксируем число $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, равное 1 при нетривиальной инволюции на поле $K$.

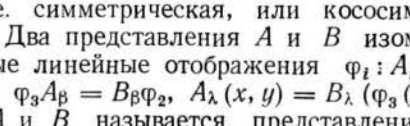
Согласно [5, 7], задано представление $A$ частично ориентированного графа

$G$:



если его вершинам 1, 2, 3 сопоставлены конечномерные векторные пространства $A_1$, $A_2$, $A_3$; его стрелкам $\alpha$, $\beta$ — линейные отображения $A_\alpha : A_1 \to A_3$, $A_\beta : A_2 \to A_3$, его петле $\lambda$ — $\varepsilon$-эрмитова форма $A_\lambda(x, y) = \varepsilon\overline{A_\lambda(y, x)}$ на пространстве $A_3$ (т. е. симметрическая, или кососимметрическая, или эрмитова форма на $A_3$). Два представления $A$ и $B$ изоморфны, если существуют невырожденные линейные отображения $\varphi_i : A_i \to B_i$, $i = 1, 2, 3$, такие, что $\varphi_3 A_\alpha = B_\alpha \varphi_1$, $\varphi_3 A_\beta = B_\beta \varphi_2$, $A_\lambda(x, y) = B_\lambda(\varphi_3(x), \varphi_3(y))$. Прямой суммой представлений $A$ и $B$ называется представление $C = A \oplus B$, где $C_i = A_i \oplus B_i$, $i \in \{1, 2, 3, \alpha, \beta, \lambda\}$.

Очевидно, каждое представление $A$ задает набор $\mathcal{P} = ((A_3)_{A_\lambda};\ \mathrm{Im}(A_\alpha), \mathrm{Im}(A_\beta))$, причем изоморфным представлениям соответствуют изоморфные наборы (для взаимной однозначности можно потребовать $\mathrm{Ker}(A_\alpha) = \mathrm{Ker}(A_\beta) = 0$).

Как показано в [5, 7], классификация представлений графа $G$ может быть получена из классификации представлений колчана

$Q$:



Напомним, что представление колчана $Q$ сопоставляет вершине конечномерное векторное пространство, стрелке — линейное отображение. Гомоморфизмом $\varphi : M \to N$ представлений называется набор линейных отображений $\varphi_i : M_i \to N_i$, $1 \leqslant i \leqslant 6$, удовлетворяющих условиям $\varphi_3 M_\alpha = N_\alpha \varphi_1$, $\varphi_3 M_\beta = N_\beta \varphi_2$, $\varphi_4 M_\lambda = N_\lambda \varphi_3$, $\varphi_5 M_\gamma = N_\gamma \varphi_4$, $\varphi_6 M_\delta = N_\delta \varphi_4$. Размерностью представления $M$ называется вектор $(m_1, \ldots, m_6)$, где $m_i = \dim(M_i)$.

Представления колчана $Q$ классифицированы в [2] (смотри также п. 2). Если есть только одно, с точностью до изоморфизма, неразложимое в прямую сумму представление размерности $(m_1, \ldots, m_6)$, то будем обозначать его через $[m_1, \ldots, m_6]$.

Представления графа $G$ и колчана $Q$ будем задавать наборами матриц $A = [A_\alpha, A_\beta, A_\lambda]$ и $M = [M_\alpha, M_\beta, M_\lambda, M_\gamma, M_\delta]$, подразумевая, что в пространствах представлений выбраны базисы.

По представлению $M$ колчана $Q$ определим представление $M^+$ графа $G$: $M^+ = [M_\alpha \oplus M_\gamma^*, M_\beta \oplus M_\delta^*, M_\lambda \setminus \varepsilon M_\lambda^*]$, где $P^* = \overline{P}^{\mathrm{T}} = (\overline{a}_{ji})$ — сопряженная матрица для матрицы $P = (a_{ij})$,

$$P \oplus R = \begin{pmatrix} P & O \\ O & R \end{pmatrix}, \quad P \setminus R = \begin{pmatrix} O & R \\ P & O \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения: если $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \in K[x]$, то $\overline{f}(x) = \overline{a}_0x^n + \overline{a}_1x^{n-1} + \ldots + \overline{a}_n$, $O_{mn}$ — нулевая матрица размера $m \times n$, $O_n = O_{nn}$, $E_n$ — единичная матрица размера $n \times n$, $F_n$ — матрица, получаемая из $E_n$ обратным расположением столбцов (т. е. единицы расположены на побочной диагонали), $\Phi_n$ — клетка Фробениуса с единицами под главной диагональю и характеристическим многочленом $x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \ldots + \lambda_n \in K[x]$, являющимся степенью неприводимого многочлена $p_{\Phi_n}(x)$. Как и в [7, теорема 8], в случае $\Phi_n = \overline{\Phi}_n$ определим матрицу $\Phi_n'$ размера $n \times n$: $\Phi_n' = F_n$ при вырожденной $\Phi_n$, $\Phi_n' = (a_{i+j})$ при невырожденной $\Phi_n$, где $a_2 = 1$, $a_3 = \ldots = a_{n+1} = 0$, $a_{l+n} = -\lambda_1 a_{l+n-1} - \ldots - \lambda_n a_l$, $l \geqslant 2$.

Следующая теорема является основным результатом статьи.

Теорема 1. *Над полем $K$ характеристики $\neq 2$ для каждого представления $A$ графа $G$ в пространствах $A_1$, $A_2$, $A_3$ можно выбрать базисы так, чтобы набор $(A_\alpha, A_\beta, A_\lambda)$ задавался прямой суммой наборов матриц следующих видов:*

1) $[n, n, 2n; 2n, n, n \pm 1]^+$, $[n, n, 2n; 2n, n \pm 1, n]^+$, $[n, n, 2n+1; 2n+1, n+1, n+1]^+$, $[n, n+1, 2n+1; 2n+1, n+1, n]^+$, $[n, n+1, 2n+1; 2n+1, n+i, n+i]^+$, $[n+1, n, 2n+1; 2n+1, n+i, n+i]^+$, *где* $i \in \{0, 1\}$;

2) $[n+i, n+j, 2n+1; 2n, n, n]^+$, $[n-i, n-j, 2n-1; 2n, n, n]^+$, *где* $i, j \in \{0, 1\}$;

3) $\left[\begin{pmatrix} E_n \\ \Phi_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_n \\ E_n \end{pmatrix}, \ E_{2n}, \ (E_n O_n), \ (O_n E_n)\right]^+$, *где* $p_{\Phi_n}(x)$ *равен* $x$ *или* $x - 1$;

4) $\left[\begin{pmatrix} E_n \\ O_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O_n \\ E_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_n & E_n \\ E_n & \Phi_n \end{pmatrix}, \ (E_n O_n), \ (O_n E_n)\right]^+$, *если* $\varepsilon = -1$ *или* $\Phi_n \neq \overline{\Phi}_n$;

4′) $\mathcal{P}(\Phi_n, f) = \left[\begin{pmatrix} E_n \\ O_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O_n \\ E_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\Phi_n')^{-1} & E_n \\ E_n & (\Phi_n' \Phi_n) \end{pmatrix} f(\Phi_n^* \oplus \Phi_n)\right]$, *если* $\varepsilon = 1$ *и* $\Phi_n = \overline{\Phi}_n$, *где* $0 \neq f(x) = \overline{f}(x) \in K[x]$, $\deg f(x) < \deg p_{\Phi_n}(x)$;

5) $\left[\begin{pmatrix} E_n \\ O_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O_n \\ E_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Phi_n & E_n \\ E_n & E_n \end{pmatrix}, \ (E_n O_n), \ (O_n E_n)\right]^+$ *при* $\varepsilon = -1$ *и вырожденной* $\Phi_n$;

5′) $\mathcal{Q}(n, a) = \left[\begin{pmatrix} E_n \\ O_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O_n \\ E_n \end{pmatrix}, a \begin{pmatrix} F_{n-1} \oplus O_1 & E_n \\ E_n & F_n \end{pmatrix}\right]$ *при* $\varepsilon = 1$, *где* $0 \neq a = \overline{a} \in K$;

6) $[A_i, B_j, C, A_i^{\mathrm{T}}, B_j^{\mathrm{T}}]^+$ *при* $\varepsilon = -1$, *где* $i, j \in \{0, 1\}$, $A_0 = \begin{pmatrix} E_n \\ O_{n+1,n} \end{pmatrix}$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} O_{n,n+1} \\ E_{n+1} \end{pmatrix}, \ B_0 = \begin{pmatrix} E_n \\ E_n \\ O_{1n} \end{pmatrix}, \ B_1 = \begin{pmatrix} E_n O_{n1} \\ E_{n+1} \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} F_n & O_{n,n+1} \\ O_{n+1,n} & F_{n+1} \end{pmatrix};$$

6′) $\mathcal{R}(n, a) = [A_i, B_j, aC]$ *при* $\varepsilon = 1$, *где* $i, j \in \{0, 1\}$, $0 \neq a = \overline{a} \in K$, *матрицы* $A_i$, $B_j$, $C$ *из п.* 6).

*Слагаемые по исходному представлению $A$ определяются со следующей точностью: видов* 1, 2, 3, 5, 6 — *однозначно; вида* 4 — *с точностью* *до замены* $\Phi_n$ *клеткой* $\overline{\Phi}_n$; *вида* $4'$ — *с точностью до замены всей группы слагаемых* $\bigoplus_i \mathcal{P}(\Phi_n, f_i)$ *с одинаковой клеткой* $\Phi_n$ *на* $\bigoplus_i \mathcal{P}(\Phi_n, g_i)$, *где* $\sum_i f_i(\omega)\, x_i^0 x_i$ *и* $\sum_i g_i(\omega)\, x_i^0 x_i$ — *эквивалентные эрмитовы формы над полем* $K(\omega) = K[x]/p_{\Phi_n}(x)$ *с инволюцией* $f(\omega)^0 = \bar{f}(\omega)$; *видов* $5'$, $6'$ — *с точностью до замены всей группы слагаемых* $\bigoplus_i \mathcal{L}(n, a_i)$ (*соответственно* $\bigoplus_i \mathcal{R}(n, a_i)$) *с одинаковым числом* $n$ *на* $\bigoplus_i \mathcal{L}(n, b_i)$ (*соответственно, на* $\bigoplus_i \mathcal{R}(n, b_i)$), *где* $\sum_i a_i \bar{x}_i x_i$ *и* $\sum_i b_i \bar{x}_i x_j$ — *эквивалентные эрмитовы формы над полем* $K$.

2. Классификация представлений колчана $Q$. Теорема 1 предполагает известной классификацию представлений колчана $Q$. Эта классификация получена в [2]. Приведем ее в виде, подсказанном работой [4].

Введем обозначения: $\Phi_n(\lambda)$ — клетка Фробениуса с характеристическим многочленом $(x - \lambda)^n$; $E^{\uparrow}_{n+1,n}$, $E^{\downarrow}_{n+1,n}$, $E^{\leftarrow}_{n,n+1}$, $E^{\rightarrow}_{n,n+1}$ — матрицы, получаемые из $E_n$ приписыванием нулевой строки или нулевого столбца, соответственно, сверху, снизу, слева, справа.

2.1. Полная система $\mathrm{ind}\,(Q')$ неизоморфных неразложимых в прямую сумму представлений колчана

$$Q':\quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, "\alpha"] & & 4 \\ & 3 \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[dr, "\delta"'] & \\ 2 \arrow[ur, "\beta"'] & & 5 \end{tikzcd}$$

содержит по одному представлению размерностей $(n, n, 2n, n, n \pm 1)$, $(n, n, 2n, n \pm 1, n)$, $(n, n \pm 1, 2n, n, n)$, $(n \pm 1, n, 2n, n, n)$, $(x_1, x_2, 2n+1, x_4, x_5)$, где $x_1, x_2, x_4, x_5 \in \{n, n+1\}$. Эти представления можно получить из следующих неразложимых представлений $M = [M_\alpha, M_\beta, M_\gamma, M_\delta]$:

$$1)\ \begin{pmatrix} E_n \\ O_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O_n \\ E_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_n \\ E_n \end{pmatrix}^{\mathrm{т}}, \begin{pmatrix} E^{\uparrow}_{n,n-1} \\ E^{\downarrow}_{n,n-1} \end{pmatrix}^{\mathrm{т}} \text{ или } \begin{pmatrix} E^{\leftarrow}_{n,n+1} \\ E^{\rightarrow}_{n,n+1} \end{pmatrix}^{\mathrm{т}};$$

$$2)\ \begin{pmatrix} E_{n+1} \\ O_{n,n+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O_{n+1,n} \\ E_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E^{\uparrow}_{n+1,n} \\ E_n \end{pmatrix}^{\mathrm{т}}, \begin{pmatrix} E^{\downarrow}_{n+1,n} \\ E_n \end{pmatrix}^{\mathrm{т}} \text{ или } \begin{pmatrix} E_{n+1} \\ E^{\rightarrow}_{n,n+1} \end{pmatrix}^{\mathrm{т}};$$

$$3)\ \begin{pmatrix} E_{n+1} \\ O_{n,n+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O_{n+1,n} \\ E_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_{n+1} \\ E^{\leftarrow}_{n,n+1} \end{pmatrix}^{\mathrm{т}}, \begin{pmatrix} E_{n+1} \\ E^{\rightarrow}_{n,n+1} \end{pmatrix}^{\mathrm{т}};$$

$$4)\ \begin{pmatrix} E_n \\ O_{n+1,n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O_{n+1,n} \\ E_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_{n+1} \\ E^{\leftarrow}_{n,n+1} \end{pmatrix}^{\mathrm{т}}, \begin{pmatrix} E^{\leftarrow}_{n-1,n} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ E^{\rightarrow}_{n,n+1} \end{pmatrix}^{\mathrm{т}};$$

$$5)\ \begin{pmatrix} E^{\downarrow}_{n+1,n} \\ E_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O_{n+1,n} \\ E_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O_{n+1,n} \\ E_n \end{pmatrix}^{\mathrm{т}}, \begin{pmatrix} E^{\uparrow}_{n+1,n} \\ E_n \end{pmatrix}^{\mathrm{т}};$$

$$6)\ \begin{pmatrix} E_{n+1} \\ O_{n,n+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_{n+1} \\ E^{\leftarrow}_{n,n+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_{n+1} \\ O_{n,n+1} \end{pmatrix}^{\mathrm{т}}, \begin{pmatrix} E_{n+1} \\ E^{\rightarrow}_{n,n+1} \end{pmatrix}^{\mathrm{т}},$$

используя перестановки матриц $M_\alpha$, $M_\beta$, перестановки матриц $M_\gamma$, $M_\delta$, переход к сопряженному неразложимому представлению $M^0 = [M^*_\gamma, M^*_\delta, M^*_\alpha, M^*_\beta]$ размерности $(m_4, m_5, m_3, m_1, m_2)$.

Множество $\mathrm{ind}\,(Q')$ содержит также следующие представления размерности $(n, n, 2n, n, n)$:

$$\mathcal{M}_1(\Phi_n) = \left[\begin{pmatrix} E_n \\ O_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O_n \\ E_n \end{pmatrix}, (E_n E_n), (E_n \Phi_n)\right],$$

$$\mathcal{M}_2 = \left[\begin{pmatrix} E_n \\ O_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O_n \\ E_n \end{pmatrix}, (\Phi_n(0) E_n), (E_n E_n)\right],$$

$$\mathcal{M}_3(\lambda) = \left[\begin{pmatrix} E_n \\ \Phi_n(\lambda) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_n \\ E_n \end{pmatrix}, (E_n O_n), (O_n E_n)\right], \lambda \in \{0, 1\},$$

$$\mathcal{M}_4 = \mathcal{M}_3(0)^0.$$

Множество $\mathrm{ind}(Q')$ не содержит других представлений.

2.2. Полная система $\mathrm{ind}(Q)$ неизоморфных неразложимых в прямую сумму представлений колчана $Q$ состоит из представлений

а) $\mathcal{N}_1(A) = [A_\alpha, A_\beta, E, A_\gamma, A_\delta]$, где $A = [A_\alpha, A_\beta, A_\gamma, A_\delta] \in \mathrm{ind}(Q')$ — представление размерности $\neq (n, n, 2n, n, n)$;

б) $\mathcal{N}_2(A) = \left[A_\alpha, A_\beta, \begin{pmatrix} A_\gamma \\ A_\delta \end{pmatrix}, (E_n O_n), (O_n E_n)\right]$, где $A \in \mathrm{ind}(Q')$ — представление размерности $(n, n, 2n, n, n)$, или $(n+i, n+j, 2n+1, n, n)$, или $(n-i, n-j, 2n-1, n, n)$, $i, j \in \{0, 1\}$;

в) $\mathcal{N}_3(A) = \left[\begin{pmatrix} E_n \\ O_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O_n \\ E_n \end{pmatrix}, (A_\gamma^* A_\delta^*), A_\alpha^*, A_\beta^*\right]$, где $A = \mathcal{M}_3(1)$, либо $A \in \mathrm{ind}(Q')$ — представление размерности $(n+i, n+j, 2n+1, n, n)$ или $(n-i, n-j, 2n-1, n, n)$, $i, j \in \{0, 1\}$.

3. Доказательство теоремы 1. Сопряженным представлению $M = [M_\alpha, M_\beta, M_\lambda, M_\gamma, M_\delta]$ колчана $Q$ назовем представление $M^0 = [M_\gamma^*, M_\delta^*, \varepsilon M_\lambda^*, M_\alpha^*, M_\beta^*]$ ($\varepsilon$ — то же, что и в колчане $Q$). Сопряженным гомоморфизму $\psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_6): M \to N$ назовем гомоморфизм $\psi^0 = (\Psi_5^*, \Psi_6^*, \Psi_4^*, \Psi_3^*, \Psi_1^*, \Psi_2^*): N^0 \to M^0$.

Каждое представление из $\mathrm{ind}(Q)$, изоморфное самосопряженному, заменим самосопряженным, их множество обозначим $\mathrm{ind}_0(Q)$. В множество $\mathrm{ind}_1(Q)$ включим все представления из $\mathrm{ind}(Q)$, изоморфные сопряженному, но не самосопряженному, и по одному из каждой пары $\{M, N\} \subset \mathrm{ind}(Q)$, где $M \simeq N \simeq M^0$.

Кольцо эндоморфизмов $\Lambda = \mathrm{End}(N)$ неразложимого представления $N \in \mathrm{ind}_0(Q)$ локально, множество $R$ его необратимых элементов является радикалом, поэтому $T(N) = \Lambda/R$ — тело. По представлению $N \in \mathrm{ind}_0(Q)$ и его самосопряженному автоморфизму $\psi = \psi^0$ определим представление графа $G$: $N^\psi = [N_\alpha, N_\beta, N_\lambda \Psi_3]$.

Следующая теорема — частный случай теоремы 1 [7].

Теорема 2. *Каждое представление графа $G$ над полем $K$ характеристики $\neq 2$ разложимо в прямую сумму представлений видов*

*а) $M^+$, где $M \in \mathrm{ind}_1(Q)$;*

*б) $N^\psi$, где $N \in \mathrm{ind}_0(Q)$, $\psi = \psi^0 \in \mathrm{Aut}(N)$.*

*Слагаемые определяются с такой точностью: вида а) — однозначно; вида б) — с точностью до замены всей группы слагаемых $\bigoplus_i N^{\psi_i}$ с одинаковым $N$ на $\bigoplus_i N^{\varphi_i}$, где $\sum_i (\psi_i + R) x_i^0 x_i$ и $\sum_i (\varphi_i + R) x_i^0 x_i$ — эквивалентные эрмитовы формы над телом $T(N) = \Lambda/R$ с инволюцией $(\psi + R)^0 = \psi^0 + R$.*

Воспользуемся теоремой 2 для доказательства теоремы 1. Множество $\mathrm{ind}(Q)$ приведено в п. 2.2. Если $z = (z_1, \ldots, z_6)$ — размерность представления $M$, то $z^0 = (z_5, z_6, z_4, z_3, z_1, z_2)$ — размерность сопряженного представления $M^0$.

Представления размерностей $z \neq z^0$ из $\mathrm{ind}(Q)$ полностью определяются своими размерностями и неизоморфны самосопряженным. Разобьем их на пары представлений взаимно сопряженных размерностей $z$, $z^0$ и из каждой пары возьмем по одному представлению. Получим все представления $M$ из $\operatorname{ind}_1(Q)$ несамосопряженных размерностей. Перейдя к представлениям $M^+$, получим все представления 1—2 теоремы 1.

Представления $\mathcal{N}_2(\mathcal{M}_3(\lambda))$, $\lambda \in \{0, 1\}$, (см. п. 2.2) неизоморфны самосопряженным, поскольку $\mathcal{N}_2(\mathcal{M}_3(0))^0 \simeq \mathcal{N}_2(\mathcal{M}_4)$, $\mathcal{N}_2(\mathcal{M}_3(1))^0 \simeq \mathcal{N}_3(\mathcal{M}_3(1))$. Получаем представления 3 теоремы 1.

Рассмотрим представление

$$\mathcal{N}_2(\mathcal{M}_1(\Phi_n)) = \left[\begin{pmatrix} E_n \\ O_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O_n \\ E_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_n & E_n \\ E_n & \Phi_n \end{pmatrix}, (E_n O_n), (O_n E_n)\right].$$

Очевидно, $\mathcal{N}_2(\mathcal{M}_1(\Phi_n))^0 \simeq \mathcal{N}_2(\mathcal{M}_1(\overline{\Phi}_n))$.

Пусть $\varphi: \mathcal{N}_2(\mathcal{M}_1(\Phi_n)) \to B = B^0$ — изоморфизм в самосопряженное представление. Заменив $B$ изоморфным самосопряженным представлением, можно записать

$$B = \left[\begin{pmatrix} E_n \\ O_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O_n \\ E_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} M & E_n \\ \varepsilon E_n & N \end{pmatrix}, (E_n O_n), (O_n E_n)\right],$$

$M = \varepsilon M^*$, $N = \varepsilon N^*$. Тогда изоморфизм примет вид

$$\varphi = (S_1, S_2, S_1 \oplus S_2, S_2 \oplus \varepsilon S_1, S_2, \varepsilon S_1). \tag{1}$$

Заменив $M$, $N$, $S_1$, $S_2$ на $S_2^{-1} M S_2^{*-1}$, $S_2^* N S_2$, $S_2^* S_1$, $E_n$, получим изоморфизм $\varphi$ вида (1), в котором $S_2 = E_n$ и ввиду определения изоморфизма $MS_1 = E_n$, $N = \varepsilon S_1 \Phi_n$. Поскольку $M = \varepsilon M^*$, $N = \varepsilon N^*$, то $S_1 = \varepsilon S_1^*$, $S_1\Phi_n = \varepsilon(S_1\Phi_n)^*$. В силу [7, лемма 8, теорема 8] $\varepsilon = 1$, $\Phi_n = \overline{\Phi}_n$, поэтому можно положить $S_1 = \Phi_n'$, $M = (\Phi_n')^{-1}$, $N = \Phi_n'\Phi_n$ ($\Phi_n'$ определена в п. 1).

Пусть $\psi: B \to B$ — эндоморфизм. Тогда $\eta = \varphi^{-1}\psi\varphi$ — эндоморфизм представления $\mathcal{N}_2(\mathcal{M}_1(\Phi_n))$. По определению гомоморфизма, $\eta = (H, H, H \oplus H, H \oplus H, H, H)$. Перестановочная с клеткой Фробениуса матрица является многочленом от этой клетки, поэтому $H = f(\Phi_n)$, $f \in K[x]$. Поскольку $\Phi_n' H (\Phi_n')^{-1} = f(\Phi_n'\Phi_n(\Phi_n')^{-1}) = f(\Phi_n^*)$, то $\psi = \varphi\eta\varphi^{-1} = (f(\Phi_n^*), f(\Phi_n), f(\Phi_n^* \oplus \Phi_n), f(\Phi_n \oplus \Phi_n^*), f(\Phi_n), f(\Phi_n^*))$, $\psi^0 = (\bar{f}(\Phi_n^*), \bar{f}(\Phi_n), \ldots)$, поле $T(B) = \operatorname{End}(B)/R$ можно отождествить с полем $K(\omega) = K[x]/p_{\Phi_n}(x)$ с инволюцией $f(\omega)^0 = \bar{f}(\omega)$. В силу теоремы 2 получаем слагаемые 4, 4′ теоремы 1. По представлению $\mathcal{N}_2(\mathcal{M}_2)$ получаем слагаемые 5, 5′.

Во множестве $\operatorname{ind}(Q)$ остались нерассмотренными представления размерностей $(n+i, n+j, 2n+1; 2n+1, n+i, n+j)$, где $i, j \in \{0, 1\}$. Нетрудно проверить, что эти представления изоморфны представлениям $[A_i, B_j, C, A_i^{\mathrm{T}}, B_j^{\mathrm{T}}]$ (см. п. 6 теоремы 1), самосопряженным при $\varepsilon = 1$. Получаем слагаемые 6, 6′ теоремы 1. Применение теоремы 2 завершает доказательство теоремы 1.


1. *Назарова Л. А.* Представления четвериады // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1967.— **31**, № 6.— С. 1361—1378.
2. *Назарова Л. А.* Представления колчанов бесконечного типа // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1973.— **37**, № 4.— С. 752—791.
3. *Гельфанд И. М., Пономарев В. А.* Задачи линейной алгебры и классификация четверок подпространств конечномерного векторного пространства.— М., 1971.— 99 с.— (Препринт / АН СССР. Ин-т прикл. математики; 71.06).
4. *Гельфанд И. М., Пономарев В. А.* Четверки подпространств конечномерного векторного пространства // Докл. АН СССР.— 1971.— **197**, № 4.— С. 762—765.
5. *Сергейчук В. В.* Классификационные задачи для систем линейных отображений и полуторалинейных форм.— Киев, 1983.— 59 с.— Деп. в УкрНИИНТИ, № 196Ук-Д84.
6. *Ройтер А. В.* Боксы с инволюцией // Представления и квадратичные формы.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1979.— С. 124—126.
7. *Сергейчук В. В.* Классификационные задачи для систем форм и линейных отображений // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1987.— **51**, № 6.— С. 1170—1190.


Киев. ун-т

Получено 13.09.88

каждой пары возьмем по одному представлению. Получим все представления $M$ из $\mathrm{ind}_1(Q)$ несамосопряженных размерностей. Перейдя к представлениям $M^+$, получим все представления 1—2 теоремы 1.

Представления $\mathcal{N}_2(\mathcal{M}_3(\lambda))$, $\lambda \in \{0, 1\}$, (см. п. 2.2) неизоморфны самосопряженным, поскольку $\mathcal{N}_2(\mathcal{M}_3(0))^0 \simeq \mathcal{N}_2(\mathcal{M}_4)$, $\mathcal{N}_2(\mathcal{M}_3(1))^0 \simeq \mathcal{N}_3(\mathcal{M}_3(1))$. Получаем представления 3 теоремы 1.

Рассмотрим представление

$$\mathcal{N}_2(\mathcal{M}_1(\Phi_n)) = \left[\begin{pmatrix} E_n \\ O_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O_n \\ E_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_n & E_n \\ E_n & \Phi_n \end{pmatrix}, (E_n O_n), (O_n E_n)\right].$$

Очевидно, $\mathcal{N}_2(\mathcal{M}_1(\Phi_n))^0 \simeq \mathcal{N}_2(\mathcal{M}_1(\overline{\Phi}_n))$.

Пусть $\varphi : \mathcal{N}_2(\mathcal{M}_1(\Phi_n)) \to B = B^0$ — изоморфизм в самосопряженное представление. Заменив $B$ изоморфным самосопряженным представлением, можно записать

$$B = \left[\begin{pmatrix} E_n \\ O_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O_n \\ E_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} M & E_n \\ \varepsilon E_n & N \end{pmatrix}, (E_n O_n), (O_n E_n)\right],$$

$M = \varepsilon M^*$, $N = \varepsilon N^*$. Тогда изоморфизм примет вид

$$\varphi = (S_1, S_2, S_1 \oplus S_2, S_2 \oplus \varepsilon S_1, S_2, \varepsilon S_1). \tag{1}$$

Заменив $M$, $N$, $S_1$, $S_2$ на $S_2^{-1} M S_2^{*-1}$, $S_2^* N S_2$, $S_2^* S_1$, $E_n$, получим изоморфизм $\varphi$ вида (1), в котором $S_2 = E_n$ и ввиду определения изоморфизма $MS_1 = E_n$, $N = \varepsilon S_1 \Phi_n$. Поскольку $M = \varepsilon M^*$, $N = \varepsilon N^*$, то $S_1 = \varepsilon S_1^*$, $S_1 \Phi_n = \varepsilon (S_1 \Phi_n)^*$. В силу [7, лемма 8, теорема 8] $\varepsilon = 1$, $\Phi_n = \overline{\Phi}_n$, поэтому можно положить $S_1 = \Phi_n'$, $M = (\Phi_n')^{-1}$, $N = \Phi_n' \Phi_n$ ($\Phi_n'$ определена в п. 1).

Пусть $\psi : B \to B$ — эндоморфизм. Тогда $\eta = \varphi^{-1}\psi\varphi$ — эндоморфизм представления $\mathcal{N}_2(\mathcal{M}_1(\Phi_n))$. По определению гомоморфизма, $\eta = (H, H, H \oplus H, H \oplus H, H, H)$. Перестановочная с клеткой Фробениуса матрица является многочленом от этой клетки, поэтому $H = f(\Phi_n)$, $f \in K[x]$. Поскольку $\Phi_n' H (\Phi_n')^{-1} = f(\Phi_n' \Phi_n (\Phi_n')^{-1}) = f(\Phi_n^*)$, то $\psi = \varphi\eta\varphi^{-1} = (f(\Phi_n^*), f(\Phi_n), f(\Phi_n^* \oplus \Phi_n), f(\Phi_n \oplus \Phi_n^*), f(\Phi_n), f(\Phi_n^*))$, $\psi^0 = (\bar{f}(\Phi_n^*), \bar{f}(\Phi_n), \ldots)$, поле $T(B) = \mathrm{End}(B)/R$ можно отождествить с полем $K(\omega) = K[x]/p_{\Phi_n}(x)$ с инволюцией $f(\omega)^0 = \bar{f}(\omega)$. В силу теоремы 2 получаем слагаемые 4, 4′ теоремы 1. По представлению $\mathcal{N}_2(\mathcal{M}_2)$ получаем слагаемые 5, 5′.

Во множестве $\mathrm{ind}(Q)$ остались нерассмотренными представления размерностей $(n+i,\ n+j,\ 2n+1;\ 2n+1,\ n+i,\ n+j)$, где $i, j \in \{0, 1\}$. Нетрудно проверить, что эти представления изоморфны представлениям $[A_i, B_j, C, A_i^{\mathrm{T}}, B_j^{\mathrm{T}}]$ (см. п. 6 теоремы 1), самосопряженным при $\varepsilon = 1$. Получаем слагаемые 6, 6′ теоремы 1. Применение теоремы 2 завершает доказательство теоремы 1.


1. *Назарова Л. А.* Представления четвериады // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1967.— **31**, № 6.— С. 1361—1378.
2. *Назарова Л. А.* Представления колчанов бесконечного типа // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1973.— **37**, № 4.— С. 752—791.
3. *Гельфанд И. М., Пономарев В. А.* Задачи линейной алгебры и классификация четверок подпространств конечномерного векторного пространства.— М., 1971.— 99 с.— (Препринт / АН СССР. Ин-т прикл. математики; 71.06).
4. *Гельфанд И. М., Пономарев В. А.* Четверки подпространств конечномерного векторного пространства // Докл. АН СССР.— 1971.— **197**, № 4.— С. 762—765.
5. *Сергейчук В. В.* Классификационные задачи для систем линейных отображений и полуторалинейных форм.— Киев, 1983.— 59 с.— Деп. в УкрНИИНТИ, № 196Ук-Д84.
6. *Ройтер А. В.* Боксы с инволюцией // Представления и квадратичные формы.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1979.— С. 124—126.
7. *Сергейчук В. В.* Классификационные задачи для систем форм и линейных отображений // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1987.— **51**, № 6.— С. 1170—1190.


Киев. ун-т
Получено 13.09.88