УДК 519.46+517.43

И. В. Микитюк

Унитарные представления обобщенной токовой алгебры Вирасоро

Изучаются модули Верма V над обобщенной токовой алгеброй Вирасоро $\mathfrak{g}$, являющейся полупрямой суммой алгебры Вирасоро и центрального расширения коммутативной алгебры. Показано, что произвольное унитарное представление со старшим весом алгебры $\mathfrak{g}$ изоморфно тензорному произведению унитарного фоковского представления $\mathfrak{g}$ (либо одномерного представления $\mathfrak{g}$) и унитарного представления со старшим весом алгебры Вирасоро (рассматриваемого как представление алгебры $\mathfrak{g}$). Этот результат используется для получения формул определителей матриц, задающих форму Шаповалова на модуле Верма V.

Вивчаються модулі Верма V над узагальненою алгеброю струмів Вірасоро $\mathfrak{g}$, яка є півпрямою сумою алгебри Вірасоро і центрального разширення комутативної алгебри. Показано, що довільне унітарне представлення зі старшою вагою алгебри $\mathfrak{g}$ ізоморфне тензорному добутку унітарного фоківського представлення $\mathfrak{g}$ (або одновимірного представлення $\mathfrak{g}$) і унітарного представлення зі старшою вагою алгебри Вірасоро (яке розглядаємо як представлення алгебри $\mathfrak{g}$). Цей результат використовується для того, щоб отримати формули визначників матриць, які задають форму Шаповалова на модулі Верма V.

Обобщенная токовая алгебра Вирасоро $\mathfrak{g}$ имеет приложения в современной статистической и теоретической физике [1—3]. Она является центральным расширением на «швингеровский» коцикл алгебры Ли токов на окружности, т. е. алгебры Ли банаховой группы $\mathscr{C} \odot \operatorname{diff}(S^1)$, где $\mathscr{C} = \mathscr{C}(S^1, \mathbb{R}^1)$ — пространство гладких функций на S^1, $\operatorname{diff}(S^1)$ — топологическая группа диффеоморфизмов окружности. В настоящей статье изучены модули Верма $V(\lambda)$ над $\mathfrak{g}$, получены формулы определителей для матриц, задающих форму Шаповалова на $V(\lambda)$, описаны унитарные $\mathfrak{g}$-модули со старшим весом (следствия 2 и 3 к теореме 1). Для получения этих результатов использованы фоковские представления алгебры $\mathfrak{g}$ [4], с помощью которых установлена связь между унитарными модулями со старшим весом над обобщенной токовой алгеброй Вирасоро и алгеброй Вирасоро (теорема 1). Отметим также, что методы работ [5 — 8], в которых рассмотрены представления алгебр Вирасоро, Неве — Шварца, Рамона и для них получены аналогичные результаты, обобщаются на случай алгебры $\mathfrak{g}$, но более громоздки, чем метод, предложенный здесь.

1. Модули Верма над обобщенной токовой алгеброй Вирасоро. Обобщенная токовая алгебра Вирасоро $\mathfrak{g}$ описывается следующим образом. Базис в пространстве $\mathfrak{g}$ состоит из векторов L_m, G_n $(m, n \in \mathbb{Z})$, C и S, где C и S — центральные элементы в $\mathfrak{g}$: $[C, \mathfrak{g}] = [S, \mathfrak{g}] = 0$, а для остальных элементов выполняются коммутационные соотношения

$$[L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n} + (1/12)(m^3 - m)\,\delta_{m+n,0} C,$$

$$[L_m, G_n] = -nG_{m+n}, \tag{1}$$

$$[G_m, G_n] = m\delta_{m+n,0} S,$$

т. е. $\mathfrak{g}$ является полупрямой суммой алгебры Вирасоро и центрального расширения коммутативной алгебры, порожденной G_n, $n \in \mathbb{Z}$, S.

Пусть $\mathfrak{r}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$, порожденная векторами L_0, G_0, C и S. Определим ковектор $\delta \in \mathfrak{r}^*$ условием $\delta(L_0) = 1$ и $\delta(G_0) = \delta(C) = \delta(S) = 0$ Для $\eta \in \mathfrak{r}^*$ положим $\mathfrak{g}^\eta = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \eta(H) X$ для всех $H \in \mathfrak{r}\}$ и $Q = \mathbb{Z}\delta$. Тогда имеем $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{r}$, $\mathfrak{g}^{n\delta} = \mathbb{C}L_{-n} \oplus \mathbb{C}G_{-n}$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, а $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\eta \in Q} \mathfrak{g}^\eta$. Очевидно $[\mathfrak{g}^{\eta_1}, \mathfrak{g}^{\eta_2}] \subset \mathfrak{g}^{\eta_1+\eta_2}$ для любых $\eta_1, \eta_2 \in Q$. Пусть $\bar{\mathfrak{n}}$ и $\mathfrak{n}$ — подалгебры алгебры $\mathfrak{g}$, определенные следующим образом: $\bar{\mathfrak{n}} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{g}^{n\delta}$, $\mathfrak{n} = \bigoplus_{-n \in \mathbb{N}} \mathfrak{g}^{n\delta}$. Тогда $\mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{n}$. Всюду далее через $U(\mathfrak{a})$ будем обозначать универсальную обертывающую алгебру алгебры $\mathfrak{a}$.

Пусть $M(\lambda)$ — $\mathfrak{g}$-модуль, $\lambda \in \mathfrak{r}^*$, w — ненулевой вектор из $M(\lambda)$ такой, что $Hw = \lambda(H) w$ для всех $H \in \mathfrak{r}$, $\mathfrak{n}w = 0$ и $M(\lambda) = U(\mathfrak{g}) w$. Тогда будем говорить, что $M(\lambda)$ — $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом λ. Вектор w называют старшим вектором, соответствующим весу λ. Если для $\mathfrak{g}$-модуля N справедливо разложение $N \bigoplus_{\nu \in \mathfrak{r}^*} N^\nu$, где $N^\nu = \{u \in N \mid Hu = \nu(H) u,\ H \in \mathfrak{r}\}$ и $\dim N^\nu < \infty$ для всех $\nu \in \mathfrak{r}^*$, то модуль N называют весовым $\mathfrak{g}$-модулем, а N^ν — весовым подпространством, соответствующим весу ν. Нетрудно видеть, что любой $\mathfrak{g}$-модуль $M(\lambda)$ является весовым $\mathfrak{g}$-модулем: $M(\lambda) = \bigoplus_{n \geqslant 0, n \in \mathbb{Z}} M(\lambda)^{\lambda + n\delta}$, где каждое из пространств $M(\lambda)^{\lambda+n\delta}$ порождается векторами $X_{n_1} X_{n_2} \ldots X_{n_k} w$, $X_{n_i} \in \mathfrak{g}^{n_i\delta}$, $n_i > 0$, $i = \overline{1, k}$, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Модуль Верма $V(\lambda)$, $\lambda \in \mathfrak{r}^*$ над обобщенной токовой алгеброй Вирасоро $\mathfrak{g}$ по определению индуцирован одномерным представлением подалгебры $\mathfrak{b} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{n}$ алгебры $\mathfrak{g}$ в пространстве $\mathbb{C}v : Hv = \lambda(H) v$ для всех $H \in \mathfrak{r}$, $\mathfrak{n}v = 0$, т. е. $V(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}v/P$, где P — подпространство в $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}v$, порожденное векторами $XY \otimes v - X \otimes Yv$ для $X \in U(\mathfrak{g})$, $Y \in U(\mathfrak{b})$. Действие $U(\mathfrak{g})$ на $V(\lambda)$ задается равенством $X(Y \otimes v) = XY \otimes v$, $X, Y \in U(\mathfrak{g})$. Когда $\lambda(C) = c$, $\lambda(L_0) = h$, $\lambda(G_0) = g$, $\lambda(S) = s$, будем писать $\lambda = (c, h, g, s) \in \mathbb{C}^4$.

Пусть $\Lambda = \{I = (i_1, i_2, \ldots, i_k) \mid i_1 \geqslant i_2 \geqslant \ldots \geqslant i_k > 0,\ i_p \in \mathbb{Z},\ p = \overline{1, k}\}$, $\varnothing \in \Lambda$, и $|I| = i_1 + i_2 + \ldots + i_k$. Нетрудно проверить, что $U(\bar{\mathfrak{n}})$ действует на $V(\lambda)$ свободно и $V(\lambda)=U(\bar{\mathfrak{n}})v$, т. е. векторы

$$L_I G_J v := L_{-i_1} L_{-i_2} \ldots L_{-i_k} G_{-j_1} G_{-j_2} \ldots G_{-j_l} v, \qquad (\text{:}$$

где $I, J \in \Lambda$, $L_{\varnothing} G_{\varnothing} v := v$, образуют базис в пространстве $V(\lambda)$. Тог, имеет место разложение $V(\lambda)=\bigoplus\limits_{n\geqslant 0, n\in\mathbb{Z}} V^{\lambda+n\delta}$, где $V^{\lambda+n\delta}$ — пространств базис в котором составляют векторы $L_I G_J v$, $I, J\in\Lambda$, $|I|+|J|=n$. Есл $\mu(i)$ — число разбиений числа $i\in\mathbb{N}$, то нетрудно видеть, что $\varphi(i):=$ $=\dim V^{\lambda+n\delta}=\sum\limits_{i=0}^{n}\mu(n-i)\mu(i)$, $\mu(0)=1$. Очевидно, $V(\lambda)$ — модуль с старшим весом λ. Более того, он обладает следующим свойством униве сальности. Для любого $\mathfrak{g}$-модуля $M(\lambda)$ со старшим весом λ и старши вектором w существует единственный $\mathfrak{g}$-гомоморфизм $V(\lambda)\to M(\lambda)$, пер водящий v в w. Так как $V^{\lambda+n\delta}$, $n\geqslant 0$, — собственное подпространст оператора L_0 с собственным значением $h+n$, то произвольный собстве ный $\mathfrak{g}$-подмодуль V_1 в $V(\lambda)$ имеет вид $V_1=\bigoplus\limits_{n\geqslant 0} V_1^n$, где $V_1^n\subset V^{\lambda+n\delta}$. И того, что $V(\lambda)=U(\mathfrak{g})v$ следует, что $V_1=\bigoplus\limits_{n>0} V_1^n$, а значит, $V(\lambda)$ име единственный максимальный собственный подмодуль. Фактор-модуль модул $V(\lambda)$ по этому подмодулю обозначим через $L(\lambda)$.

На $\mathfrak{g}$-модуле $V(\lambda)$ существует замечательная билинейная форм $A_\lambda: V(\lambda)\times V(\lambda)\to\mathbb{C}$, называемая формой Шаповалова [8, 9]. Для ее опр деления рассмотрим универсальные обертывающие алгебры $U(\bar{\mathfrak{n}})$, $U(\mathfrak{x})$ $U(\mathfrak{n})$ алгебр $\bar{\mathfrak{n}}$, $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{n}$ соответственно, которые можно считать естествен вложенными в $U(\mathfrak{g})$, при этом из разложения $\mathfrak{g}=\bar{\mathfrak{n}}\oplus\mathfrak{x}\oplus\mathfrak{n}$ следует, чт $U(\mathfrak{g})$ можно представить в виде прямой суммы

$$U(\mathfrak{g})=U(\mathfrak{x})\oplus(\bar{\mathfrak{n}}U(\mathfrak{g})+U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}). \qquad (\text{:}$$

Обозначим через β проекцию $U(\mathfrak{g})$ на первое слагаемое в (3) параллельн второму. Рассмотрим отображение $\sigma:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, для которого $\sigma(L_m)=L_{-}$ $\sigma(G_m)=G_{-m}$, $m\in\mathbb{Z}$, $\sigma(C)=C$, $\sigma(S)=S$. Из соотношений (1) следуе что $\sigma[X, Y]=[\sigma(Y), \sigma(X)]$ для $X, Y\in\mathfrak{g}$. Поэтому σ однозначно продол жается до антиавтоморфизма универсальной обертывающей алгебры $U($ (обозначим его той же буквой σ) так, что $\sigma^2=\mathrm{id}$ и $\sigma(XY)=\sigma(Y)\sigma(X$ $X, Y\in U(\mathfrak{g})$.

Так как $U(\mathfrak{x})$ естественно отождествляется с кольцом полиномов на в силу коммутативности $\mathfrak{x}$, то каждому весу $\lambda\in\mathfrak{x}^*$ соответствует естес венный гоморфизм $\lambda: U(\mathfrak{x})\to\mathbb{C}$, при котором $H\mapsto\lambda(H)$, $H\in\mathfrak{x}$. Дл $X, Y\in U(\mathfrak{g})$ положим

$$A_\lambda(Xv, Yv)=(\lambda\circ\beta)(\sigma(X)Y). \qquad (\text{·}$$

Справедлив аналог предложения 3.14 из [8].

Предложение 1. *Пусть $M(\lambda)$ — модуль над обобщенной токов алгеброй Вирасоро $\mathfrak{g}$ со старшим весом λ и старшим вектором w. Тогд существует единственная билинейная симметричная форма $\bar{A}_\lambda$ на $M($ такая, что* 1) $\bar{A}_\lambda(Xu_1, u_2)=\bar{A}_\lambda(u_1, \sigma(X)u_2)$ *для всех* $X\in U(\mathfrak{g})$, $u_1, u_2\in M(\lambda$ 2) $M(\lambda)^{\nu_1}\perp M(\lambda)^{\nu_2}$ *относительно* $\bar{A}_\lambda$, *если* $\nu_1\neq\nu_2$, $\nu_1, \nu_2\in\mathfrak{x}$ 3) $\bar{A}_\lambda(w, w)=1$.

Более того, ядро $\operatorname{Ker}\bar{A}_\lambda$ *формы* $\bar{A}_\lambda$, *т. е. множество всех векторо* $u\in M(\lambda)$, *для которых* $\bar{A}_\lambda(u, U(\mathfrak{g})w)=0$, *является максимальным собст венным подмодулем* $\mathfrak{g}$-*модуля* $M(\lambda)$. *Если* $M(\lambda)=V(\lambda)$, *то* $\bar{A}_\lambda=A_\lambda$.

Доказательство предложения 1 рассмотрим для случая, когд $M(\lambda)=V(\lambda)$ и $\bar{A}_\lambda=A_\lambda$, $w=v$. Если $Xv=0$, где $X\in U(\mathfrak{g})$, то из опр деления модуля Верма $V(\lambda)$ следует, что X принадлежит левому идеалу в $U(\mathfrak{g})$, порожденному $\mathfrak{n}$ и $\{H - \lambda(H),\ H \in \mathfrak{r}\}$. Поэтому $A_\lambda(Xv, U(\mathfrak{g})v) = 0$, т. е. форма A_λ билинейна. Разложение (3) инвариантно, а элементы множества $U(\mathfrak{r})$ неподвижны относительно антиавтоморфизма σ, поэтому $\beta \circ \sigma = \beta$, и значит, форма A_λ симметрична. Свойство 1 предложения следует непосредственно из определения (4), свойство 2 — из свойства 1.

Если $u \in \operatorname{Ker} A_\lambda$, то $A_\lambda(Xu, U(\mathfrak{g})v) = A_\lambda(u, \sigma(X)U(\mathfrak{g})v) = 0$ для любых $X \in U(\mathfrak{g})$. Так как $A_\lambda(v, v) = 1$, то $\operatorname{Ker} A_\lambda$ — собственный подмодуль модуля $V(\lambda)$. В силу изложеного выше, максимальный собственный подмодуль модуля $V(\lambda)$ (и любой его элемент u) принадлежит пространству $\bigoplus_{n>0} V^{\lambda+n\delta}$, т. е. $A_\lambda(U(\mathfrak{g})u, v) = 0 = A_\lambda(u, U(\mathfrak{g})v)$ и, следовательно, подмодуль $\operatorname{Ker} A_\lambda$ максимален.

Из свойств 1 и 2 формы A_λ следует, что $A_\lambda(Xv, Yv) = A_\lambda(v, \beta(\sigma(X)Y)v)$ а из свойства 3 — $A_\lambda(Xv, Yv) = (\lambda \circ \beta)(\sigma(X)Y)$, т. е. форма A_λ единственна. Для завершения доказательства предложения достаточно заметить, что $M(\lambda)$ — фактор-модуль $\mathfrak{g}$-модуля $V(\lambda)$ по некоторому подмодулю $R \subset \operatorname{Ker} A_\lambda$.

Очевидно, форма A_λ полностью описывается набором конечномерных симметричных матриц $A_n(\lambda)$, получающихся ограничением A_λ на подпространство $V^{\lambda+n\delta} \subset V(\lambda)$ с фиксированным базисом $\{L_I G_J v\}$, причем $A_n(\lambda) = \| \overline{A}_\lambda(L_I G_J w, L_F G_K w) \|$, $I, J, F, K \in \Lambda$, $|I| + |J| = |F| + |K| = n$ в силу предложения 1.

2. Унитарные неприводимые модули со старшим весом. Для приложений важно изучение унитарных неприводимых представлений обобщенной токовой алгебры Вирасоро $\mathfrak{g}$ (со старшим весом) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, т. е. таких представлений, для которых выполнены условия эрмитовости $(Xu_1, u_2) = (u_1, \sigma(X)u_2)$ для произвольных $u_1, u_2 \in \mathcal{H}$, $X \in \{L_m, G_m (m \in \mathbb{Z}), C, S\}$ [6].

Пусть $M_{\mathbb{R}}(\lambda)$ — вещественное подпространство $\mathfrak{g}$-модуля $M(\lambda)$ (со старшим весом λ и старшим вектором w), порожденное векторами $L_I G_J w$, $I, J \in \Lambda$. Предположим, что на $M(\lambda)$ существует скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$, которое превращает $M(\lambda)$ в унитарный $\mathfrak{g}$-модуль и удовлетворяет условию $(w, w) = 1$. Тогда, учитывая самосопряженность оператора L_0, получаем, что $\mathfrak{g}$ — билинейная симметричная форма на $M(\lambda)$, являющаяся комплексификацией формы $(\cdot, \cdot)/_{M_{\mathbb{R}}(\lambda)}$, удовлетворяющая условиям 1—3 предложения 1, а значит, совпадает с формой $\overline{A}_\lambda$ на $M(\lambda)$.

Следовательно, $\mathfrak{g}$-модуль $M(\lambda)$ унитарен тогда и только тогда, когда $M(\lambda) = L(\lambda)$ и матрицы $A_n(\lambda)$ положительно полуопределены для всех $n \in \mathbb{N}$. Так как $(L_{-n}w, L_{-n}w) = (w, [L_n, L_{-n}]w) = (w, (2nL_0 + (n^3 - n)C/12(w)$, то $(2nh + (n^3 - n)c/12) \geqslant 0$ для всех $n > 0$, т. е. $h \geqslant 0$ и $c \geqslant 0$. Аналогично, из неравенства $(G_{-1}w, G_{-1}w) \geqslant 0$ получим, что $s \geqslant 0$, из равенства $(G_{-1}w, L_{-1}w) = g(w, w) = (L_{-1}w, G_{-1}w) - g = \overline{g}$.

Теорема 1. *Для унитарности $\mathfrak{g}$-модуля $L(c, h, g, s)$, где $(c, h, g, s) \in \mathbb{C}^4$ и $s \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы $s > 0$, $g \in \mathbb{R}$ и $\mathfrak{g}$-модуль $L(c - 1, h - g^2/2s, 0, 0)$ был унитарным. Для унитарности $\mathfrak{g}$-модуля $L(c, h, g, 0)$ необходимо, чтобы $g = 0$.*

Доказательство теоремы основано на существовании унитарного представления обобщенной токовой алгебры Вирасоро $\mathfrak{g}$ в пространстве $V = \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]$ полиномов от бесконечного числа переменных (см., например, [4]).

Пусть $a_j = \partial/\partial x_j$ и $a_{-j} = jx_j$ для целых положительных j — операторы на V, $a_0 = a \in \mathbb{C}$. Тогда, очевидно, $[a_i, a_j] = i s_{i+j,0}$. Положим для $s \neq 0$

$$g_m = g_m^{(a,s)} = \sqrt{s}\, a_m,\ l_m = l_m^{(a)} = (1/2) \sum_{i \in \mathbb{Z}} : a_{m-j} a_j :,\ m \in \mathbb{Z},$$

где: $a_i a_j$: равно $a_i a_j$, если $j \geqslant 0$, и равно $a_j a_i$, если $j < 0$. Нетрудно верить, что $[l_m, a_n] = -na_{m+n}$ и, следовательно, $[l_m, l_n] = (m-n) l_{m-}$ $+ (1/12)(m^3 - m)\delta_{m+n,0}$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Поэтому отображение $\pi_{a,s}: L_m \mapsto$ $G_m \mapsto g_m$, $C \mapsto 1$, $S \mapsto s$ определяет представление $\mathfrak{g}$ в V. Рассматрива как пространство представления для $\pi_{a,s}$ пространство V обозначим ч $V_{a,s}$. Нетрудно проверить, что $V_{a,s}$ является $\mathfrak{g}$-модулем со старшим в $(1, g^2/2s, g, s)$, где $g = a\sqrt{s}$, и старшим вектором $\overline{w} = 1 \in V_{a,s}$:

$$l_0 = (1/2)\,a^2 + \sum_{j=1}^{\infty} jx_j \partial/\partial x_j,\ \ l_1 = a\partial/\partial x_1 + \sum_{j=1}^{\infty} jx_j \partial/\partial x_{j+1}.$$

Векторы $g_J \overline{w} := g_{-j_1} g_{-j_2} \cdots g_{-j_f} \overline{w}$, $J = (j_1, j_2, \ldots, j_f) \in \Lambda$, образуют б в $V_{a,s}$. Введем невырожденную билинейную симметричную форму $\overline{A}=$ на $V_{a,s}$

$$\overline{A}(f(x), g(x)) = f(\tilde{\partial})\, g(x)\,|_{x=0},\quad f, g \in V,$$

где $\tilde{\partial} = (\partial/\partial x_1, \partial/2\partial x_2, \partial/3\partial x_3, \ldots)$. Можно проверить, что форма $\overline{A}$ на удовлетворяет условиям предложения 1, в частности, $\overline{A}(a_m f, g) = \overline{A}(f, a_{-}$ $\overline{A}(l_m f, g) = \overline{A}(f, l_{-m} g)$, и следовательно, для унитарности $\mathfrak{g}$-модуля необходимо и достаточно, чтобы $a \in \mathbb{R}$, $s > 0$ (тогда полуторалине форма $(f, g) = \overline{A}(f, \overline{g})$ задает скалярное произведение на $V_{a,s}$). Из н рожденности формы $\overline{A}$ следует неприводимость модуля $V_{a,s}$ над $\mathfrak{g}$.

Рассмотрим теперь неприводимый модуль $L(\mu)$, $\mu = (c-1, h-g^2/2s, ($ над обобщенной токовой алгеброй Вирасоро $\mathfrak{g}$ и соответствующее пред ление $L_m \mapsto L'_m$, $G_m \mapsto G'_m$, $C \mapsto C'$, $S \mapsto S'$ в пространстве $L(\mu)$. Соо шения $L_m = l_m \otimes 1 + 1 \otimes L'_m$, $G_m = g_m \otimes 1 + 1 \otimes G'_m$, $C \mapsto 1 \otimes (1 +$ $S \mapsto s(1 \otimes 1)$ задают представление алгебры $\mathfrak{g}$ в тензорном произвед $V_{a,s} \otimes L(\mu)$. Через M обозначим $\mathfrak{g}$-подмодуль модуля $V_{a,s} \otimes L(\mu)$, по денный вектором $\overline{w} \otimes w'$, где w' — старший вектор модуля $L(\mu)$. Очеви $M = M(\lambda)$ — $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом $\lambda = (c, h, g, s)$ и старшим ве ром $\overline{w} \otimes w'$.

Пусть $R(\mu)$ — подпространство в $L(\mu)$, порожденное векторами L $I \in \Lambda$. В силу коммутационных соотношений (1) $R(\mu)$ можно превра в $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом μ, если положить G_m, $m \in \mathbb{Z}$, S равн нулю на $R(\mu)$. Тогда из единственности неприводимого $\mathfrak{g}$-модуля следует, что $R(\mu) = L(\mu)$ и операторы G'_m, $m \in \mathbb{Z}$, S' равны нулю на L а значит, векторы

$$L_I G_J (\overline{w} \otimes w') = \sum_{I_1 \in [I]} l_{I \setminus I_1} g_J \overline{w} \otimes L'_{I_1} w',$$

где $[I]$ — множество всех конечных подпоследовательностей I_1 посл вательности $I \in \Lambda$ (смысл обозначения $I \setminus I_1$ очевиден), порождают M.

Пусть $\overline{A}_\lambda$, A_λ и $\overline{A}_\mu$ — билинейные формы из предложения 1 на $\mathfrak{g}$ дулях $M = M(\lambda)$, $V(\lambda)$ и $L(\mu)$ соответственно. Нетрудно проверить, форма B на M, определяемая условием $B(\overline{w}_1 \otimes w'_1, \overline{w}_2 \otimes w'_2) = \overline{A}(\overline{w}_1, \overline{w}$ $\times \overline{A}_\mu (w'_1, w'_2)$, где $\overline{w}_i \otimes w'_i \in V_{a,s} \otimes L(\mu)$, $i = 1, 2$, удовлетворяет услов предложения 1. Тогда $B = \overline{A}_\lambda$ и $A_n(\lambda) = \| B(L_I G_J(\overline{w} \otimes w'), L_F G_K (\overline{w} \otimes w$

Лемма. *Для произвольного вектора $L_I G_J (\overline{w} \otimes w') \in M$ при $a \in \mathbb{R}$, s существует набор чисел $a^K_{I_1} \in \mathbb{R}$ $(I, K \in \Lambda,\ I_1 \in [I],\ I_1 \neq I,\ |K| + |I_1$ $= |J| + |I|)$ такой, что* $e_{I,J}(\overline{w} \otimes w') := \Big(L_I G_J - \sum_{I_1 \in [I], I_1 \neq I} \sum_K a^K_{I_1} L_{I_1} G_K$ $\times (\overline{w} \otimes w') = g_J \overline{w} \otimes L'_I w'$.

Доказательство. Заметим 1) в правой части выражения (5) для $L_I G_J(\overline{w} \otimes w')$ лишь одно слагаемое $g_J\overline{w} \otimes L'_I w'$ имеет максимальную L'-степень, равную k, где $I = (i_1, i_2, \ldots, i_h)$; 2) векторы $g_K\overline{w}$, $K \in \Lambda$ образуют ортогональный (относительно формы $\overline{A}$) базис модуля $V_{a,s}$. Тогда в новом соответственно упорядоченном базисе $e_{I,J}v$ пространства $V^{\lambda + n\delta} \subset V(\lambda)$ (v — старший вектор модуля Верма $V(\lambda)$) матрица формы $A_\lambda|_{V^{\lambda+n\delta}}$ примет блочно-диагональный вид, причем на диагонали будут стоять матрицы $\overline{A}(g_J\overline{w}, g_J\overline{w}) \| \overline{A}_\mu(L'_I w', L'_F w') \|$, $I, F, J \in \Lambda$, $|I| + |J| = |F| + |J| = n$. Так как векторы $L'_I w'$, $I \in \Lambda$ порождают $\mathfrak{g}$-модуль $L(\mu)$, то первая часть теоремы доказана. Более того, из леммы получаем, что $M = V_{a,s} \otimes L(\mu)$, а из невырожденности формы $\overline{A}_\mu$ на $L(\mu)$ — что форма B невырожденна на $M = M(\lambda)$, а значит, $M = L(\lambda)$. Когда $s = 0$, тогда нетрудно вычислить $\det A_1(c, h, g, 0) = -g^2$, и следовательно, для унитарности $\mathfrak{g}$- модуля $L(c, h, g, 0)$ необходимо, чтобы $g = 0$.

Следствие 1. *Неприводимый модуль $L(c, h, g, s)$, $(c, h, g, s) \in \mathbb{C}^4$, $s \neq 0$ над обобщенной токовой алгеброй Вирасоро $\mathfrak{g}$ изоморфен $\mathfrak{g}$-модулю $V_{a,s} \otimes L(c-1, h - g^2/2s, 0, 0)$, где $a = g/\sqrt{s}$.*

Пусть $\mathfrak{g}'$ — подалгебра Вирасоро алгебры $\mathfrak{g}$, порожденная векторами L_m, $m \in \mathbb{Z}$, и C. Неприводимый модуль $L(\nu) = L(c, h, 0, 0)$ над обобщенной токовой алгеброй Вирасоро $\mathfrak{g}$ (со старшим весом $\nu \in \mathfrak{x}^*$ и старшим вектором w') является неприводимым модулем над подалгеброй Вирасоро $\mathfrak{g}'$, причем $L(\nu) = U(\mathfrak{g}')w'$. Тогда матрицы $A'_r(\nu) = A'_r(c, h) = \| \overline{A}_\nu(L'_I w', L'_F w') \|$, $|F| = |I| = r$, $r \in \mathbb{N}$, задают билинейную форму на $\mathfrak{g}$-модуле $L(\nu)$, которая удовлетворяет условиям предложения 1. Формула Каца для определителя матрицы $A'_r(c, h)$ доказана в [5] и с точностью до положительного множителя, независящего от c и h, имеет вид $\prod\limits_{pq \leqslant r,\, p, q \in \mathbb{N}} (h - h_{p,q}(c))^{\mu(r-pq)}$, где $h_{p,q}(c) = (1/48)(12(p-q)^2 + (1-c)(p^2+q^2-2) + (p^2-q^2)\sqrt{(1-c)(25-c)}$. Из того, что $\overline{A}(g_J\overline{w}, g_J\overline{w}) = K(J)s^f$, где $J = (j_1, j_2, \ldots, j_f) \in \Lambda$, $K(J) > 0$ получим

$$\det A_n(c, h, g, s) = C(n) \prod_{i=1}^{n} \prod_{f=1}^{i} [s^{f\mu(n-i)} \det A'_{n-i}(c-1, h - g^2/2s)]^{\mu(i,f)} \times$$

$$\times \det A'_n(c-1, h - g^2/2s),$$

где $\mu(i, f)$ — число разложений числа $i \in \mathbb{N}$ в сумму f положительных целых слагаемых, $C(n) > 0$.

Пусть $d(i)$ — число упорядоченных пар (p, q), $p, q \in \mathbb{N}$, для которых произведение pq равно i. Чтобы упростить выражение для определителя матрицы $A_n(c, h, g, s)$, покажем $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{f=1}^{i} f\mu(n-i)\mu(i, f) = \sum\limits_{i=1}^{n} d(i)\varphi(n-i)$. Для этого используем метод работы [7] и рассмотрим тождество

$$1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(n) z^n = \prod_{n \in \mathbb{N}} (1 + z^n + z^{2n} \ldots) = \prod_{n \in \mathbb{N}} (1 - z^n)^{-1} \text{ в } \mathbb{C}[[z]].$$

Сумму $\sum\limits_{i=f}^{n} \mu(n-i)\mu(i, f)$ обозначим через $\varphi(n, f)$ (полагаем, что $\varphi(n, 0) = \mu(n)$). Тогда, как нетрудно проверить,

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} (1 - xz^n)^{-1} \prod_{n \in \mathbb{N}} (1 - z^n)^{-1} = 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{f=0}^{n} \varphi(n, f) x^f z^n.$$

Продифференцировав обе части этого равенства по x в точке $x=1$, получим

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{1-z^n}\right) \prod_{n\in\mathbb{N}} (1-z^n)^{-2} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{f=1}^{n} \sum_{i=f}^{n} \mu(n-i)\,\mu(i,f)\right) z^n. \qquad (6)$$

В левой части (6) стоит необходимое выражение

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (z^n + z^{2n} + z^{3n} + \ldots)\right)\left(1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi(n)\, z^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} z^n \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi(n-i)\, d(i)\right).$$

Справедливо следствие.

Следствие 2.

$$\det A_n(c, h, g, s) = K(n) \prod_{pq\leqslant n,\, p,\, q\in\mathbb{N}} [s(h-(h_{p,q}(c-1)+g^2/2s))]^{\varphi(n-pq)},$$

где $K(n)>0$.

Матрицы $A_r'(c, h)$, задающие билинейную форму на $\mathfrak{g}'$-модуле $L(c, h, 0, 0)$, $c, h \in \mathbb{C}$, положительно полуопределены для всех $r\in\mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда либо $c\geqslant 1$ и $h\geqslant 0$, либо $c=c_m$ и $h=h_{p,q}\ (c_m)$, где $c_m = 1-6/m\,(m+1)$, $m\in\mathbb{N}$, $q\leqslant p<m$ [6, 7]. Отсюда и из доказательства теоремы вытекает следствие.

Следствие 3. *Для унитарности модуля* $L(c, h, g, s)$, $(c, h, g, s)\in\mathbb{C}^4$ *над обобщенной токовой алгеброй Вирасоро необходимо и достаточно выполнение одного из условий* 1) $s>0$, $g\in\mathbb{R}$, $c=c_m+1$, $h=h_{p,q}(c_m)+g^2/2s$, *где* $m\in\mathbb{N}$, $q\leqslant p<m$; 2) $s>0$, $g\in\mathbb{R}$, $c\geqslant 2$, $h\geqslant g^2/2s$; 3) $s=0$, $g=0$, $c\geqslant 1$, $h\geqslant 0$; 4) $s=0$, $g=0$, $c=c_m$, $h=h_{p,q}(c_m)$, *где* $m\in\mathbb{N}$, $q\leqslant p<m$.

Замечание. Если N — весовой модуль над обобщенной токовой алгеброй Вирасоро $\mathfrak{g}$, то его характер определяется выражением $\operatorname{ch} N = \sum_{v\in\mathfrak{x}^*} (\dim N^{v})\, z^{v}$. Из изложенного выше следует, что характер модуля Верма $V(\lambda)$, $\lambda\in\mathfrak{x}^*$, над $\mathfrak{g}$ равен $z^{\lambda}\prod_{n\in\mathbb{N}}(1-z^n)^{-2}$, характер $\mathfrak{g}$-модуля $V_{a,s}$, $s\neq 0$ — $z^{\gamma}\prod_{n\in\mathbb{N}}(1-z^n)^{-1}$, где $z^n := z^{n\delta}$, $\gamma=(1, a^2/2, a/\sqrt{s}, s)$. Характер неприводимого $\mathfrak{g}$-модуля $L(c, h, g, s)$, $s\neq 0$, в силу следствия 1 равен произведению $\operatorname{ch} V_{a,s}$, где $a=g\sqrt{s}$, на характер неприводимого модуля $L(c-1, h-g^2/2s, 0, 0)$ над алгеброй Вирасоро $\mathfrak{g}'$.

1. *Olive D. I.* Kac—Moody algebras for Physicists.— Cambridge, 1985.— 184 p.— (Preprint/ Imperial College; 85.14).
2. *Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К.* Квантовый метод производящих функционалов Боголюбова в статистической физике: алгебра Ли токов, ее представления и функциональные уравнения // Физика элементар. частиц и атом. ядра.— 1986.— **17**, № **4**.— С. 789—827.
3. *Интегрируемые* динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты / Ю. А. Митропольский, Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский, В. Г. Самойленко.— Киев : Наук. думка, 1987.— 296 с.
4. *Wakimoto M., Jamada H.* The Fock representations of the Virasoro algebra and the Hirota equations of the modied KP hierarchies // Math. J.— 1986.— **16**, N 2.— P. 427—441.
5. *Фейгин Б. Л., Фукс Д. Б.* Кососимметрические инвариантные дифференциальные операторы на прямой и модули Верма над алгеброй Вирасоро // Функцион. анализ.— 1982.— **16**, вып. 2.— С. 47—63.
6. *Goddard P., Kent A., Olive D.* Unitary representations of the Virasoro and Super-Virasoro Algebras // Commun. Math. Phys.— 1986.— **103**, N 1.— P. 105—119.
7. *Friedan D., Qiu Z., Shenker S.* Details of the non-unitarity proof for highest weight representations of the Virasoro Algebra // Ibid.— **107**, N 4.— P. 535—542.
8. *Meurman A., Rocha-Caridi A.* Highest Weight Representations of the Neven — Schwarz and Romond Algebras // Ibid, N 2.— P. 263—294.
9. *Шаповалов Н. Н.* Об одной билинейной форме на универсальной обертывающей алгебре комплексной полупростой алгебры Ли // Функцион. анализ.— 1972.— **6**, вып. 4.— С. 65—70.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики
АН УССР, Львов

Получено 02.08.88

Продифференцировав обе части этого равенства по x в точке $x=1$, получим

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{1-z^n}\right)\prod_{n\in\mathbb{N}}(1-z^n)^{-2} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{f=1}^{n}\sum_{i=f}^{n}\mu(n-i)\,\mu(i,f)\right)z^n. \qquad (6)$$

В левой части (6) стоит необходимое выражение

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}(z^n+z^{2n}+z^{3n}+\ldots)\right)\left(1+\sum_{n\in\mathbb{N}}\varphi(n)\,z^n\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}}z^n\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi(n-i)\,d(i)\right).$$

Справедливо следствие.

Следствие 2.

$$\det A_n(c,h,g,s) = K(n)\prod_{pq\leqslant n,\,p,\,q\in\mathbb{N}}[s(h-(h_{p,q}(c-1)+g^2/2s))]^{\varphi(n-pq)},$$

где $K(n)>0$.

Матрицы $A'_r(c, h)$, задающие билинейную форму на $\mathfrak{g}'$-модуле $L(c, h, 0, 0)$, $c, h\in\mathbb{C}$, положительно полуопределены для всех $r\in\mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда либо $c\geqslant 1$ и $h\geqslant 0$, либо $c=c_m$ и $h=h_{p,q}\ (c_m)$, где $c_m = 1-6/m\,(m+1)$, $m\in\mathbb{N}$, $q\leqslant p<m$ [6, 7]. Отсюда и из доказательства теоремы вытекает следствие.

Следствие 3. *Для унитарности модуля* $L(c,h,g,s)$, $(c,h,g,s)\in\mathbb{C}^4$ *над обобщенной токовой алгеброй Вирасоро необходимо и достаточно выполнение одного из условий* 1) $s>0$, $g\in\mathbb{R}$, $c=c_m+1$, $h=h_{p,q}(c_m)+$ $+g^2/2s$, *где* $m\in\mathbb{N}$, $q\leqslant p<m$; 2) $s>0$, $g\in\mathbb{R}$, $c\geqslant 2$, $h\geqslant g^2/2s$; 3) $s=0$, $g=0$, $c\geqslant 1$, $h\geqslant 0$; 4) $s=0$, $g=0$, $c=c_m$, $h=h_{p,q}(c_m)$, *где* $m\in\mathbb{N}$, $q\leqslant p<m$.

Замечание. Если N — весовой модуль над обобщенной токовой алгеброй Вирасоро $\mathfrak{g}$, то его характер определяется выражением $\operatorname{ch} N = \sum_{\nu\in\mathfrak{r}^*}(\dim N^\nu)\,z^\nu$. Из изложенного выше следует, что характер модуля Верма $V(\lambda)$, $\lambda\in\mathfrak{r}^*$, над $\mathfrak{g}$ равен $z^\lambda\prod_{n\in\mathbb{N}}(1-z^n)^{-2}$, характер $\mathfrak{g}$-модуля $V_{a,s}$, $s\neq 0$ — $z^\gamma\prod_{n\in\mathbb{N}}(1-z^n)^{-1}$, где $z^n := z^{n\delta}$, $\gamma=(1, a^2/2, a/\sqrt{s}, s)$. Характер неприводимого $\mathfrak{g}$-модуля $L(c,h,g,s)$, $s\neq 0$, в силу следствия 1 равен произведению $\operatorname{ch} V_{a,s}$, где $a=g\sqrt{s}$, на характер неприводимого модуля $L(c-1, h-g^2/2s, 0, 0)$ над алгеброй Вирасоро $\mathfrak{g}'$.

1. *Olive D. I.* Kac—Moody algebras for Physicists.— Cambridge, 1985.— 184 p.— (Preprint/ Imperial College; 85.14).
2. *Боголюбов Н. Н.* (мл.), *Прикарпатский А. К.* Квантовый метод производящих функционалов Боголюбова в статистической физике: алгебра Ли токов, ее представления и функциональные уравнения // Физика элементар. частиц и атом. ядра.— 1986.— **17, № 4.**— С. 789—827.
3. *Интегрируемые* динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты / Ю. А. Митропольский, Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский, В. Г. Самойленко.— Киев : Наук. думка, 1987.— 296 с.
4. *Wakimoto M., Jamada H.* The Fock representations of the Virasoro algebra and the Hirota equations of the modied KP hierarchies // Math. J.— 1986.— **16**, N 2.— P. 427—441.
5. *Фейгин Б. Л., Фукс Д. Б.* Кососимметрические инвариантные дифференциальные операторы на прямой и модули Верма над алгеброй Вирасоро // Функцион. анализ.— 1982.— **16**, вып. 2.— С. 47—63.
6. *Goddard P., Kent A., Olive D.* Unitary representations of the Virasoro and Super-Virasoro Algebras // Commun. Math. Phys.— 1986.— **103**, N 1.— P. 105—119.
7. *Friedan D., Qiu Z., Shenker S.* Details of the non-unitarity proof for highest weight representations of the Virasoro Algebra // Ibid.— **107**, N 4.— P. 535—542.
8. *Meurman A., Rocha-Caridi A.* Highest Weight Representations of the Neven — Schwarz and Romond Algebras // Ibid, N 2.— P. 263—294.
9. *Шаповалов Н. Н.* Об одной билинейной форме на универсальной обертывающей алгебре комплексной полупростой алгебры Ли // Функцион. анализ.— 1972.— **6**, вып. **4.**— С. 65—70.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики
АН УССР, Львов

Получено 02.08.88