УДК 519.41/47

О. Ю. Дашкова

Локально почти разрешимые группы конечного неабелева ранга

Доказано, что непериодическая локально почти разрешимая группа конечного неабелева 0-ранга имеет конечный (специальный) ранг.

Доведено, що неперіодична локально майже розв'язна група скінченного неабелева 0-рангу має скінченний (спеціальний) ранг.

1. В статьях [1, 2] введено понятие неабелева ранга группы и изучались группы, имеющие конечный неабелев ранг. Напомним, что *неабелев ранг группы* G — это такое наименьшее число r, для которого всякая неабелева конечно порожденная подгруппа группы G может быть порождена не более чем r элементами. Для неабелева ранга группы G использовалось обозначение $\overline{r}(G)$. Установлено [2], что разрешимые группы конечного неабелева ранга имеют конечный (специальный) ранг. Цель настоящей статьи — доказать подобное утверждение для произвольной локально разрешимой группы. Поскольку для периодических групп это утверждение доказано [1], задача сводится к исследованию непериодических локально разрешимых групп. Поэтому естественно модифицировать понятие неабелева ранга применительно к случаю непериодических групп.

Определение. *Неабелевым 0-рангом группы G назовем такое наименьшее число r, что всякая неабелева непериодическая конечно порожденная подгруппа группы G может быть порождена не более чем r элементами. В случае, когда такого числа r нет, неабелев 0-ранг группы G считается бесконечным.*

Неабелев 0-ранг группы G обозначим через $\overline{r}_0(G)$, что указывает на некоторую аналогию с понятием 0-ранга группы. Из приведенных определений вытекает неравенство $\overline{r}_0(G) \leqslant \overline{r}(G)$. В некоторых случаях оно превращается в равенство (например, когда группа G обладает такой нормальной подгруппой N, что одна из групп N, G/N без кручения, а другая — периодическая абелева).

© О. Ю. ДАШКОВА, 1990

Приведем определение 0-ранга разрешимой группы и некоторые связанные с ним результаты. *0-ранг абелевой группы* — это (специальный) ранг ее фактор-группы по периодической части. *0-ранг* $r_0(G)$ *разрешимой группы* G определяется как сумма 0-рангов всех факторов ее произвольного субнормального ряда с абелевыми факторами. Разрешимые группы конечного 0-ранга — это разрешимые A_1-группы в классификации А. И. Мальцева [3]. Как известно, фактор-группа $G/t(G)$ разрешимой группы G конечного 0-ранга по ее периодическому радикалу $t(G)$ (наибольшей нормальной периодической подгруппе) является разрешимой A_4-группой [3]. Это равносильно тому, что $G/t(G)$ является группой почти без кручения, и можно утверждать, что она имеет подгруппу $H/t(G)$ конечного индекса, обладающую конечным рациональным рядом, т. е. субнормальным рядом, факторы которого изоморфны подгруппам аддитивной группы рациональных чисел. Длина этого ряда равна $r_0(G)$. Ввиду сказанного и леммы 5 [4] следует утверждение.

Утверждение 1. *Разрешимая группа G конечного 0-ранга содержит такую нормальную периодическую подгруппу F, что $r(G/F)$ не превышает некоторого числа, зависящего от $r_0(G)$.*

Символом $r(G)$ обозначается (специальный) ранг группы G.

Минимаксной называется группа, обладающая конечным субнормальным рядом, факторы которого удовлетворяют условию минимальности или максимальности [5]. Разрешимые минимаксные группы можно определить как разрешимые группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности или максимальности для подгрупп [5]. Известно, что разрешимая минимаксная группа G содержит ряд нормальных подгрупп $Q \leqslant H \leqslant G$, где Q — делимая абелева черниковская подгруппа, H/Q обладает конечным рациональным рядом (его длина равна $r_0(G)$), G/H конечна [4]. Применяя лемму 5 [6] к фактор-группе H/Q, получаем, что в H/Q для любого достаточно большого простого числа p найдутся такие две характеристические подгруппы K/Q и L/Q конечного индекса, что K/L — элементарная абелева p-группа ранга $r_0(G)$. В силу изложенного выше вытекает утверждение.

Утверждение 2. *Разрешимая минимаксная группа G содержит такую нормальную подгруппу L конечного индекса, что $r_0(G) \leqslant r(G/L)$.*

2. Доказательству основных результатов статьи предпошлем несколько вспомогательных предложений.

Лемма 1. *Если K — непериодическая нормальная подгруппа группы G, то $\bar{r}(G/K) \leqslant \bar{r}_0(G)$. Если, кроме того, подгруппа K неабелева, то $r(G/K) \leqslant \bar{r}_0(G)$.*

Доказательство типичное и использует только определения рангов $\bar{r}(G)$ и $\bar{r}_0(G)$.

Лемма 2. *Для фактор-группы неабелевой группы G по ее коммутанту G' справедливо неравенство $r(G/G') \leqslant \bar{r}(G)$. Если, кроме того, группа G непериодическая, то $r(G/G') \leqslant \bar{r}_0(G)$.*

Доказательство. Докажем второе неравенство, первое доказывается аналогично. Если H/G' — произвольная конечно порожденная подгруппа группы G/G', то H можно включить в некоторую подгруппу $H_1 = G'K$, где K — неабелева непериодическая конечно порожденная подгруппа. Так как K порождается не более чем $\bar{r}_0(G)$ элементами, то то же самое можно сказать об абелевой группе H_1/G' и ее подгруппе H/G'.

Лемма 3. *Если G — конечно порожденная разрешимая группа и $\bar{r}_0(G)$ конечен, то группа G минимаксна.*

Доказательство. Ввиду теоремы Кропхоллера [7] достаточно установить, что группа G не имеет секций, изоморфных сплетению W группы простого порядка и бесконечной циклической. По лемме 3 [2] $\bar{r}(W) = \infty$ и, как было замечено выше, для W имеет место равенство рангов $\bar{r}(W) = \bar{r}_0(W)$. Следовательно, $\bar{r}_0(W) = \infty$, и поэтому группа G не может иметь секций, изоморфных группе W.

Лемма 4. *Если G — почти разрешимая непериодическая группа, то $r(Z(G)) \leqslant 3 + \bar{r}_0(G)$.*

Доказательство. Пусть H — некоторая конечно порожденная неабелева непериодическая подгруппа группы G. Из леммы 3 вытекает, что подгруппа H минимаксна, и поэтому обладает конечным субнормальным рядом $1 \leqslant D = S_0 \leqslant \ldots \leqslant S_n \leqslant H$, где D — делимая абелева черниковская подгруппа, фактор-группы S_{i+1}/S_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, изоморфны некоторым подгруппам аддитивной группы рациональных чисел, фактор-группа H/S_n конечна. Если среди подгрупп S_i есть неабелевы, то неабелева подгруппа S_i с наименьшим номером i является непериодической метабелевой подгруппой. Если же все подгруппы S_i абелевы, то подгруппа H почти абелева. Отсюда следует, что в H можно найти конечно порожденную непериодическую неабелеву подгруппу H_1, которая является либо конечным расширением абелевой группы, либо метабелевой.

Далее рассуждаем так же, как и при доказательстве леммы 2 [2]. Пусть Z — произвольная конечно порожденная подгруппа из центра $Z(G)$ и p — такое простое число, что

$$r(Z) = r(Z/Z^p). \tag{1}$$

Ввиду выбора подгруппы H_1 и теоремы Холла [8] фактор-группа H_1Z/Z^p финитно аппроксимируема. Поэтому в группе H_1Z/Z^p существует такая нормальная подгруппа N/Z^p конечного индекса, что $Z \cap N = Z^p$. Если фактор-группа H_1Z/N абелева, то по лемме 2 ее ранг не превышает $\bar{r}_0(G)$. Если же H_1Z/N неабелева, то по лемме 1 $\bar{r}(H_1Z/N) \leqslant \bar{r}_0(G)$, и тогда из леммы 2 [2] вытекает, что ранг центра конечной фактор-группы H_1Z/N не превышает $3 + \bar{r}_0(G)$. Следовательно, в силу изоморфизма $ZN/N \simeq Z/Z^p$ ранг фактора Z/Z^p также не превышает $3 + \bar{r}_0(G)$. Таким образом, с учетом условия (1), которому удовлетворяет число p, получаем соотношение $r(Z) \leqslant 3 + \bar{r}_0(G)$, которое, ввиду произвольности конечно порожденной подгруппы Z, влечет искомое в условии леммы неравенство. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть группа G представима в виде произведения $G = A\langle g\rangle$, где A — ее непериодическая абелева нормальная подгруппа, и $g^s \in C_G(A)$ для некоторого натурального числа s. Если группа G неабелева, то $r(A) \leqslant \bar{r}_0(G)s + 1$.*

Доказательство. Так как любая конечно порожденная подгруппа из A включается в некоторую непериодическую конечно порожденную подгруппу, содержащуюся в A и нормальную в G, то искомое неравенство будет установлено, если доказать, что ранг произвольной конечно порожденной непериодической подгруппы B, содержащейся в A и нормальной в G, не превышает $\bar{r}_0(G)s + 1$. Если подгруппа $B\langle g\rangle$ абелева, то $B \leqslant Z(G)$, и тогда по лемме 4 $r(B) \leqslant \bar{r}_0(G) + 3$, и тем самым $r(B) \leqslant \bar{r}_0(G)s + 1$. Если же подгруппа $B\langle g\rangle$ неабелева, то она порождается r элементами, где $r \leqslant \bar{r}_0(G)$, и поэтому в ней применимы те же рассуждения, что и в лемме 4 [2]. Эти рассуждения приводят к неравенству $r(B) \leqslant rs + 1$, и поэтому $r(B) \leqslant \bar{r}_0(G)s + 1$.

3. Теорема 1. *Непериодическая локально разрешимая группа конечного неабелева 0-ранга имеет конечный ранг.*

Доказательство. Пусть G — непериодическая неабелева локально разрешимая группа и $\bar{r}_0(G)$ конечен. Заметим сначала, что в соответствии с леммой 3 произвольная конечно порожденная подгруппа группы G минимаксна, т. е. группа G локально минимаксна.

Обозначим через P периодический радикал группы G и докажем конечность его ранга. С этой целью обозначим через V подгруппу группы G, порожденную всеми ее элементами бесконечного порядка. Заметим, что $C_G(V) \leqslant V$. Действительно, если $C_G(V) \nleqslant V$ и $x \in C_G(V) - V$, то порядок элемента x конечен, и, так как x перестановочен с произвольным элементом g бесконечного порядка из V, то xg — элемент бесконечного порядка, и значит, $xg \in V$. Отсюда вытекает, что $x \in V$ — противоречие выбору x. Итак, $C_G(V) \leqslant V$, и поэтому $C_G(V) = Z(V)$.

Если подгруппа V неабелева, то ранг ее центра $Z(V)$ конечен по лемме 4. Если же V — абелева подгруппа (т. е. $V = Z(V)$), то, применив лемму 5 к неабелевой подгруппе $V\langle x\rangle$, где x — произвольный элемент (конечного порядка), не входящий в V, получим конечность ранга подгруппы V. Этим доказано, что ранг центра $Z(V)$ подгруппы V конечен. Следовательно, чтобы установить конечность ранга подгруппы P, достаточно рассмотреть случай $P \not\leqslant Z(V) = C_G(V)$.

В силу этого предположения в V существует такой элемент g бесконечного порядка, что подгруппа $P\langle g\rangle$ неабелева. Если при этом подгруппа P абелева, то, очевидно, $\bar{r}_0(P\langle g\rangle) = \bar{r}(P\langle g\rangle)$, т. е. $P\langle g\rangle$ — подгруппа конечного неабелева ранга, и значит, по основному результату статьи [2] ранг P конечен.

Пусть теперь подгруппа P неабелева. Возьмем в ней произвольную конечную неабелеву подгруппу K и рассмотрим конечно порожденную подгруппу $\langle K, g\rangle$. Как отмечалось выше, эта подгруппа минимаксна, она является произведением своей периодической нормальной подгруппы $P_1 = \langle K, g\rangle \cap P$ и циклической подгруппы $\langle g\rangle$. Периодическая минимаксная подгруппа P_1 черниковская, поэтому $\langle K, g\rangle$ является конечным расширением метабелевой подгруппы, содержащейся в $D\langle g\rangle$, где D — делимая часть подгруппы P_1. По теореме Холла [8] подгруппа $\langle K, g\rangle$ финитно аппроксимируема, следовательно, $D = 1$, и черниковская подгруппа P_1 конечна. Пусть g^n — некоторая степень элемента g, централизующая подгруппу P_1, а значит, и подгруппу K. Применяя к группе $K \times \langle g^n\rangle$ и ее подгруппе $\langle g^n\rangle$ лемму 1, получаем соотношение $\bar{r}(K) \leqslant \bar{r_0}(K \times \langle g^n\rangle) \leqslant \bar{r}_0(G)$. Это позволяет сделать следующий вывод: неабелев ранг произвольной конечной неабелевой подгруппы K из P не превышает $\bar{r}_0(G)$. Тем самым $\bar{r}(P) \leqslant \bar{r}_0(G)$, и тогда ранг группы P конечен ввиду теоремы 1 из [1].

Итак, конечность ранга периодического радикала P группы G установлена, и задача сводится к доказательству конечности ранга фактор-группы G/P. Если она абелева, то ее ранг конечен ввиду леммы 2. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что G — неабелева группа, и ее периодический радикал равен единице.

Заметим, что произвольная конечно порожденная подгруппа группы G почти не имеет кручения, т. е. обладает подгруппой конечного индекса, не имеющей кручения. Действительно, если K_1, K_2 — некоторые две конечно порожденные и, следовательно, минимаксные подгруппы группы G, $K_1 < K_2$ и D_1, D_2 — делимые части подгрупп K_1, K_2, то, как вытекает из свойств минимаксных групп, $D_1 \leqslant D_2$. Отсюда следует, что объединение делимых частей всех конечно порожденных подгрупп группы G является ее периодической абелевой нормальной подгруппой. Эта подгруппа в силу предположения о тривиальности периодического радикала группы G равна единице, поэтому делимые части конечно порожденных подгрупп также равны единице, а это означает, что все такие подгруппы группы G почти не имеют кручения.

Докажем следующее утверждение: 0-ранги конечно порожденных подгрупп группы G ограничены в совокупности.

Пусть K — произвольная подгруппа такого рода. Предположим сначала, что G содержит некоторую конечно порожденную подгруппу H, не являющуюся почти абелевой. Тогда $\langle K, H\rangle = H_1$ — минимаксная подгруппа, и поэтому ввиду утверждения 2 H_1 обладает такой нормальной подгруппой K_1 конечного индекса, что $r_0(H_1) \leqslant r(H_1/K_1)$. Так как подгруппа H_1 не может быть почти абелевой, то K_1 — ее неабелева непериодическая подгруппа, и по лемме 1 $r(H_1/K_1) \leqslant \bar{r}_0(G)$. Следовательно, $r_0(H_1) \leqslant \bar{r}_0(G)$, откуда вытекает, что $r_0(K) \leqslant \bar{r_0}(G)$.

Рассмотрим второй случай: каждая конечно порожденная подгруппа группы G почти абелева, т. е. обладает абелевой подгруппой конечного индекса. Пусть H — некоторая конечно порожденная неабелева подгруппа из G, удовлетворяющая условию

$$r_0(H) > \bar{r}_0(G) + 3. \qquad (2)$$

Если такой подгруппы не существует, то 0-ранг любой конечно порожденной подгруппы из G ограничен величиной $\bar{r}_0(G)+3$. Пусть A —абелева нормальная подгруппа из H, имеющая в H конечный индекс. Из соотношения (2) и леммы 4 следует, что A нецентральна в H, поэтому найдется такой элемент $h\in H$, что подгруппа $A\langle h\rangle$ неабелева, причем $h^n\in A$ для некоторого $n>0$. Подгруппа $\langle K, H\rangle = H_1$ является конечным расширением некоторой своей абелевой подгруппы A_1. Покажем, что подгруппа $A_1\langle h^n\rangle$ абелева. Действительно, так как $h^n\in A$, то $A\cap A_1\leqslant Z(A_1\langle h^n\rangle)$, поэтому ввиду леммы 4 неабелевость подгруппы $A_1\langle h^n\rangle$ приводит к соотношению $r_0(A\cap A_1)\leqslant \bar{r}_0(G)+3$. Отсюда с учетом конечности индексов $|A:A\cap A_1|$, $|H:A|$ получаем соотношение $r_0(H)\leqslant \bar{r}_0(G)+3$, противоречащее условию (2). Таким образом, подгруппа $A_1\langle h^n\rangle$ абелева. Вместе с этим подгруппа $A_1\langle h\rangle$ неабелева, так как в противном случае $A\cap A_1\leqslant$ $\leqslant Z(A\langle h\rangle)$, причем по построению подгруппа $A\langle h\rangle$ неабелева. Отсюда в силу леммы 4 следует, что $r_0(A\cap A_1)\leqslant \bar{r}_0(G)+3$, а это, как отмечалось выше, невозможно.

Применим теперь к неабелевой подгруппе $A_1\langle h\rangle$ лемму 5, учитывая, что $A_1\langle h^n\rangle$ — абелева подгруппа. При этом получим неравенство $r(A_1)\leqslant$ $\leqslant \bar{r}_0(G)n+1$, которое влечет соотношение $r_0(K)\leqslant r_0(H_1)=r_0(A_1)\leqslant$ $\leqslant r(A_1)\leqslant \bar{r}_0(G)\,n+1$. Таким образом установлено, что 0-ранги конечно порожденных подгрупп группы G ограничены в совокупности некоторым числом, обозначим его через t.

По утверждению 1 произвольная конечно порожденная подгруппа K группы G содержит такую периодическую нормальную подгруппу F, что $r(K/F)$ не превышает некоторого числа $f(t)$, зависящего только от t. Заметим, что, так как K почти не имеет кручения, то подгруппа F конечна, причем множество конечных нормальных подгрупп из K конечно. Это дает возможность применить метод проекций [9, с. 351] и в результате найти в группе G такую периодическую нормальную подгруппу T, что $r(G/T)\leqslant f(t)$. По предположению о периодическом радикале группы G имеем $T=1$, следовательно, $r(G)\leqslant f(t)$, т. е. конечность ранга группы G доказана. Теорема доказана.

Теорема 2. *Локально разрешимая группа G конечного неабелева ранга имеет конечный ранг.*

Доказательство. Если G — периодическая группа, то конечность ранга $r(G)$ установлена в теореме 1 [1]. Если же группа G непериодическая, то из очевидного неравенства $\bar{r}_0(G)\leqslant \bar{r}(G)$ и конечности ранга $\bar{r}(G)$ вытекает конечность $\bar{r}_0(G)$, а поэтому по теореме 1 ранг $r(G)$ группы G конечен. Теорема доказана.

4. Следующая теорема обобщает основной результат работы [1] о периодических локально разрешимых группах на локально конечные группы.

Теорема 3. *Локально конечная группа конечного неабелева ранга имеет конечный ранг.*

Доказательство. Пусть G — неабелева локально конечная группа, и ее неабелев ранг $\bar{r}(G)$ конечен. Покажем, что силовские p-подгруппы группы G по любому простому числу p черниковские. Предположим, что группа G имеет нечерниковскую силовскую p-подгруппу по некоторому простому числу p. Тогда в группе G можно найти счетную неабелеву подгруппу K, имеющую нечерниковскую силовскую p-подгруппу. Представим подгруппу K в виде объединения возрастающей последовательности конечных подгрупп $K_1<K_2<\dots$, $\bigcup\limits_i K_i=K$, и построим в K проекционную силовскую p-подгруппу P [10]. Подгруппа P — объединение конечных подгрупп $P_i=P\cap K_i$, являющихся силовскими p-подгруппами в K_i. Так как K обладает нечерниковской силовской p-подгруппой, то ее проекционная силовская подгруппа P также должна быть нечерниковской. Заметим, что подгруппа P абелева ввиду теоремы о локально разрешимых периодических группах конечного неабелева ранга [1]. Ранг $r(P)$ подгруппы P бесконечен, поэтому ранги конечных подгрупп P_i неограниченно возрастают.

Найдется такой номер i, что подгруппа K_i неабелева и

$$r(P_i) > \bar{r}(G) + 3. \qquad (3)$$

Если подгруппа P_i содержится в центре нормализатора $N_{K_i}(P_i)$, то по теореме Бернсайда [11, с. 227] в K_i существует нормальная подгруппа M, для которой $K_i = M \rtimes P_i$. По лемме 2 с учетом изоморфизма $K_i/M \simeq P_i$ получаем неравенство $r(P_i) \leqslant \bar{r}(G)$, противоречащее (3). Следовательно, абелева подгруппа P_i нецентральна в $N_{K_i}(P_i)$, и поэтому найдется элемент $h \in N_{K_i}(P_i)$ такой, что подгруппа $P_i\langle h\rangle$ неабелева.

Выберем номер j, $j > i$, для которого

$$r(P_j) > \bar{r}(G)\, n + 1, \qquad (4)$$

где n — порядок элемента h. Если $P_j \neq P_j^h$, то подгруппа $\langle P_j, P_j^h\rangle$, порожденная двумя силовскими p-подгруппами группы K_j, неабелева. Поскольку подгруппы P_j, P_j^h абелевы и подгруппа $P_i = P_i^h$ содержится в их пересечении, то P_i центральна в $\langle P_j, P_j^h\rangle$, и поэтому по лемме 2 [2] $r(P_i) \leqslant \bar{r}(G) + 3$. Противоречие с (3). Следовательно, $P_j = P_j^h$, и элемент h принадлежит нормализатору $N_{K_j}(P_j)$. По лемме 4 [2], примененной к неабелевой группе $P_j\langle h\rangle$, имеет место соотношение $r(P_j) \leqslant \bar{r}(G)n + 1$, противоречащее (4). Таким образом доказано, что в группе G все силовские p-подгруппы по любому простому числу p черниковские. Ввиду результатов В. В. Беляева [12], группа G почти локально разрешима, и поэтому конечность ранга группы G нетрудно доказать, используя теорему 1 [1]. Теорема доказана.

Используя теорему 3 и способ доказательства теоремы 1, можно доказать следующую теорему, обобщающую теорему 1 на случай локально почти разрешимых групп.

Т е о р е м а 4. *Непериодическая локально почти разрешимая группа конечного неабелева* 0-*ранга имеет конечный ранг.*

1. *Дашкова О. Ю.* Группы конечного неабелева ранга // Материалы XXIV Всесоюз. науч. студ. конф.: Математика.— Новосибирск : Новосиб. ун-т, 1986.— С. 14—17.
2. *Дашкова О. Ю.* Разрешимые группы конечного неабелева ранга // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 2.— С. 159—164.
3. *Мальцев А. И.* О некоторых классах бесконечных разрешимых групп // Мат. сб.— 1951.— **28**, № 3.— С. 567—588.
4. *Зайцев Д. И.* К теории минимаксных групп // Укр. мат. журн.— 1971.— **23**, № 5.— С. 652—660.
5. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions and generalized soluble groups.— Berlin etc: Springer, 1972.— V. 2.— 254 p.
6. *Зайцев Д. И.* О разрешимых группах конечного ранга // Группы с ограничениями для подгрупп.— Киев : Наук. думка, 1971.— С. 115—130.
7. *Kropholler P. H.* On finitely generated soluble groups with no large wreath product sections // Proc. London Math. Soc.— 1984.— **49**, N 1.— P. 155—169.
8. *Холл Ф.* О конечности некоторых разрешимых групп // Разрешимые и простые бесконечные группы.— М. : Мир, 1981.— С. 171—206.
9. *Курош А. Г.* Теория групп.— М. : Наука, 1967.— 648 с.
10. *Шунков В. П.* О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика.— 1970.— **9**, № 5.— С. 579—615.
11. *Холл М.* Теория групп.— М. : Изд-во иностр. лит., 1968.— 468 с.
12. *Беляев В. В.* Локально конечные группы с черниковскими силовскими p-подгруппами // Алгебра и логика.— 1981.— **20**, № 6.— С. 605—619.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 31.05.88

Найдется такой номер i, что подгруппа K_i неабелева и

$$r(P_i) > \bar{r}(G) + 3. \tag{3}$$

Если подгруппа P_i содержится в центре нормализатора $N_{K_i}(P_i)$, то по теореме Бернсайда [11, с. 227] в K_i существует нормальная подгруппа M, для которой $K_i = M \leftthreetimes P_i$. По лемме 2 с учетом изоморфизма $K_i/M \simeq P_i$ получаем неравенство $r(P_i) \leqslant \bar{r}(G)$, противоречащее (3). Следовательно, абелева подгруппа P_i нецентральна в $N_{K_i}(P_i)$, и поэтому найдется элемент $h \in N_{K_i}(P_i)$ такой, что подгруппа $P_i \langle h \rangle$ неабелева.

Выберем номер j, $j > i$, для которого

$$r(P_j) > \bar{r}(G)\, n + 1, \tag{4}$$

где n — порядок элемента h. Если $P_j \neq P_j^h$, то подгруппа $\langle P_j, P_j^h \rangle$, порожденная двумя силовскими p-подгруппами группы K_j, неабелева. Поскольку подгруппы P_j, P_j^h абелевы и подгруппа $P_i = P_i^h$ содержится в их пересечении, то P_i центральна в $\langle P_j, P_j^h \rangle$, и поэтому по лемме 2 [2] $r(P_i) \leqslant \bar{r}(G) + 3$. Противоречие с (3). Следовательно, $P_j = P_j^h$, и элемент h принадлежит нормализатору $N_{K_j}(P_j)$. По лемме 4 [2], примененной к неабелевой группе $P_j \langle h \rangle$, имеет место соотношение $r(P_j) \leqslant \bar{r}(G)n + 1$, противоречащее (4). Таким образом доказано, что в группе G все силовские p-подгруппы по любому простому числу p черниковские. Ввиду результатов В. В. Беляева [12], группа G почти локально разрешима, и поэтому конечность ранга группы G нетрудно доказать, используя теорему 1 [1]. Теорема доказана.

Используя теорему 3 и способ доказательства теоремы 1, можно доказать следующую теорему, обобщающую теорему 1 на случай локально почти разрешимых групп.

Т е о р е м а 4. *Непериодическая локально почти разрешимая группа конечного неабелева 0-ранга имеет конечный ранг.*

1. *Дашкова О. Ю.* Группы конечного неабелева ранга // Материалы XXIV Всесоюз. науч. студ. конф.: Математика.— Новосибирск : Новосиб. ун-т, 1986.— С. 14—17.
2. *Дашкова О. Ю.* Разрешимые группы конечного неабелева ранга // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 2.— С. 159—164.
3. *Мальцев А. И.* О некоторых классах бесконечных разрешимых групп // Мат. сб.— 1951.— **28**, № 3.— С. 567—588.
4. *Зайцев Д. И.* К теории минимаксных групп // Укр. мат. журн.— 1971.— **23**, № 5.— С. 652—660.
5. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions and generalized soluble groups.— Berlin etc: Springer, 1972.— V. 2.— 254 p.
6. *Зайцев Д. И.* О разрешимых группах конечного ранга // Группы с ограничениями для подгрупп.— Киев : Наук. думка, 1971.— С. 115—130.
7. *Kropholler P. H.* On finitely generated soluble groups with no large wreath product sections // Proc. London Math. Soc.— 1984.— **49**, N 1.— P. 155—169.
8. *Холл Ф.* О конечности некоторых разрешимых групп // Разрешимые и простые бесконечные группы.— М. : Мир, 1981.— С. 171—206.
9. *Курош А. Г.* Теория групп.— М. : Наука, 1967.— 648 с.
10. *Шунков В. П.* О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика.— 1970.— **9**, № 5.— С. 579—615.
11. *Холл М.* Теория групп.— М. : Изд-во иностр. лит., 1968.— 468 с.
12. *Беляев В. В.* Локально конечные группы с черниковскими силовскими p-подгруппами // Алгебра и логика.— 1981.— **20**, № 6.— С. 605—619.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 31.05.88