УДК 519.21

В. Л. Гирко, И. В. Степахно

Оценка преобразования Стилтьеса спектральных функций сингулярных собственных чисел

Основная задача состоит в получении G-оценок для сингулярных собственных чисел действительных матриц $A = (a_{ij})$, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$, если известны только X_i, $i = \overline{1, s}$,— независимые наблюдения над матрицей $A + \Xi$, где Ξ — случайная матрица. Результаты статьи получены при некоторых условиях на Ξ, A, n, m, s для преобразования Стилтьеса спектральных функций сингулярных собственных чисел матрицы A.

Головна задача полягає в знаходженні G-оцінок для сингулярних випадкових чисел дійсних матриць $A = (a_{ij})$, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$, при умовах, що відомі незалежні спостереження X_i, $i = \overline{1, s}$, над матрицею $A + \Xi$, де Ξ — випадкова матриця. Результати статті одержані при деяких умовах на Ξ, A, n, m, s для перетворення Стілтьєса спектральних функцій сингулярних власних чисел матриці A.

В настоящей статье с помощью наблюдений над матрицей $Q = A + \Xi$, где $A = (a_{ij})$, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$,— прямоугольная вещественная матрица, а Ξ— случайная матрица, и методов общего статистического анализа (ОСА) [1] решается задача нахождения G-оценок преобразований Стилтьеса спектральных функций матрицы A. К такой постановке приводят многие практические задачи, связанные с вычислением сингулярных собственных чисел матриц A, элементы которых определяют в результате экспериментов над реальными системами, в большинстве случаев они известны с некоторыми случайными ошибками.

Таким образом, вместо матрицы A имеем наблюдения X_i, $i = \overline{1, s}$ — независимые, над матрицей $A + \Xi$. Если числа m и n небольшие, то можно оценить сингулярные собственные числа λ_i матрицы A, например, так: в качестве состоятельных оценок λ_i берем сингулярные собственные числа матрицы $\widehat{A} = s^{-1} \sum_{i=1}^{s} X_i$. Очевидно, такие оценки будут состоятельными при $s \to \infty$, но смещенными, и смещение будет тем больше, чем больше числа m/s и n/s. Показано, как с помощью методов ОСА это смещение можно уменьшить.

Заметим, что необходимость нахождения сингулярных собственных чисел возникает в численном анализе при решении систем линейных алгебраических уравнений при определении корректности задачи решения таких систем; для этого находят минимальное сингулярное собственное число, и если оно отделено от нуля на какую-то достаточно большую величину, то задача корректна и ее можно решать на ЭВМ.

Даже если матрица A задана точно, то при нахождении собственных чисел на ЭВМ элементы матрицы будут округлены, поэтому получим собственные числа некоторой матрицы, элементы которой заданы с некоторыми ошибками (во многих случаях их можно считать случайными).

К решению такой же задачи приходят в теории планирования экспериментов. В этой теории в качестве одного из критериев оптимальности планирования эксперимента выбирается план, максимизирующий минимальное собственное число информационной матрицы. При проведении экспериментов трудно добиться, чтобы наблюдения над системой были проведены в заданных точках евклидового пространства, во многих случаях их можно считать случайными, поэтому снова приходим к задаче наилучшего оценивания сингулярных собственных чисел. Сингулярные собственные числа необходимо также находить в методе главных компонент, так как они равны дисперсиям главных компонент. Ковариационные матрицы в практических задачах неизвестны, их приходится заменять эмпирическими, т. е. получаем задачу поиска сингулярных собственных чисел — наилучших оценок собственных чисел.

Собственные числа часто приходится находить при решении задач теоретической механики и теории управления механическими системами. Например, частоты колебаний мостов, балок, механических конструкций равны соответствующим собственным числам некоторых дифференциальных операторов. В силу приближенного задания этих операторов необходимо находить оценки собственных чисел.

В квантовой механике энергетические уровни атомных ядер интерпретируются как собственные числа некоторого гамильтониана, действующего в некотором гильбертовом пространстве. Выбором базиса в этом пространстве гамильтониан можно заменить матрицей большого порядка. Однако, элементы такой матрицы, как правило, заданы приближенно. Следовательно, и в квантовой механике представляет интерес нахождение оценок для собственных чисел.

Если элементы матрицы Ξ независимы и имеют одинаковые дисперсии σ^2, то элементы матрицы A будут также независимыми и будут иметь дисперсии $\sigma^2 s^{-1}$. Будем считать, что числа m, σ^2 и s зависят от n.

Рассмотрим сингулярные спектральные функции

$$\mu_n(x) = m^{-1} \sum_{k=1}^{m} \chi(\widehat{\lambda}_k < x),$$

где $\widehat{\lambda}_k$ — сингулярные собственные числа матрицы $\widehat{A}$.

Теорема 1. *Пусть случайные элементы $\xi_{ij}^{(n)}$ матрицы Ξ для каждого значения n независимы, $\mathbf{M}\xi_{ij}^{(n)}=0$, $\mathbf{D}\xi_{ij}^{(n)}=\sigma^2$ и выполняется G-условие*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sigma^2 s^{-1} n < \infty, \quad \varlimsup_{n\to\infty} \sigma^2 s^{-1} m < \infty, \quad \varlimsup_{n\to\infty} mn^{-1} < 1, \tag{1}$$

$$\lambda_k (A'A) \leqslant c < \infty, \tag{2}$$

для некоторого $\delta > 0$

$$\sup_n \sup_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}} \mathbf{M} |\xi_{ij} s^{-1/2} \sqrt{n}|^{2+\delta} < \infty, \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{i=\overline{1,m}} \sum_{j=1}^{n} a_{ji}^2 \sigma^2 s^{-1} = 0. \tag{4}$$

Тогда почти для любого значения x $p\lim_{n\to\infty} [\mu_n(x) - G_n(x)] = 0$, *где* $G_n(x)$ — *функция распределения, преобразование Стилтьеса которой* $b(z) = \int (x-z)^{-1} dG_n(x)$, $z = t + i\varepsilon$, $\varepsilon \neq 0$, *удовлетворяет уравнению*

$$b(z) = m^{-1} \sum_{k=1}^{m} b_k, \tag{5}$$

$$b_k = [-z(1+\delta_2 b(z)) + \delta_1 - \delta_2 + \lambda_k (1+\delta_2 b(z))^{-1}]^{-1},$$

где $\delta_2 = \sigma^2 s^{-1} m$, $\delta_1 = \sigma^2 s^{-1} n$. *Решение уравнения* (5) *существует, единственно и может быть найдено с помощью метода последовательных приближений при* $\operatorname{Im} z > 0$ *в классе аналитических функций* $b(z)$.

Доказательство. Очевидно, что преобразование Стилтьеса спектральной функции $\mu_n(x)$ равно $\int (x-z)^{-1} d\mu_n(x) = m^{-1} \operatorname{Sp}(-Iz + \widehat{A}'\widehat{A})^{-1}$. Из [2, с. 253] следует, что при $\varepsilon \neq 0$, $\forall t$

$$p\lim_{n\to\infty} m^{-1} \operatorname{Sp}[(-Iz + \widehat{A}'\widehat{A})^{-1} - \mathbf{M}(-Iz + \widehat{A}'\widehat{A})^{-1}] = 0. \tag{6}$$

Представим матрицу $\widehat{A}'\widehat{A}$ в виде $\widehat{A}'\widehat{A} = \sum_{k=1}^{n} x_k x_k'$, где x_k — вектор-строки матрицы $\widehat{A}$ и рассмотрим вспомогательные матрицы

$$p_k = \sum_{p=1}^{k-1} y_p y_p' + \sum_{l=k}^{n} x_l x_l',$$

где y_p — вектор-строки матрицы $Y = A + H$, элементы матрицы H независимы, не зависят от матрицы $\widehat{A}$ и распределены по нормальному закону $N(0, \sigma^2 s^{-1})$.

С помощью этих матриц определили разность

$$\beta := m^{-1} \mathbf{M} \operatorname{Sp}[(\widehat{A}'A' - Iz)^{-1} - (Y'Y - Iz)^{-1}] = m^{-1} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\theta_k, \tag{7}$$

где $\theta_k = \operatorname{Sp}(p_k - Iz)^{-1} - \operatorname{Sp}(p_{k+1} - Iz)^{-1}$, $p_0 = \widehat{A}'\widehat{A}$, $p_{n+1} = Y'Y$.

Для величин θ_k справедлива формула

$$\theta_k = -\frac{\partial}{\partial z} \{\ln[1 + x_k' R_k x_k] - \ln[1 + y_k' R_k y_k]\},$$

где $R_k = (p_k - x_k x_k' - Iz)^{-1}$. Сделаем следующие преобразования:

$$\mathbf{M}\theta_k = \mathbf{M}\left[\left(\frac{b_k + \xi_1 n^{-1/2}}{1 + d_k + \xi_2 n^{-1/2}} - \frac{b_k}{1 + d_k}\right)\right] -$$

$$- \mathbf{M}\left[\left(\frac{b_k + \eta_1 n^{-1/2}}{1 + d_k + \eta_2 n^{-1/2}} - \frac{b_k}{1 + d_k}\right)\right], \tag{8}$$

где

$$d_k = \mathbf{M}\,[x_k' R_k x_k / R_k], \quad \xi_2 = \{x_k' R_k x_k - d_k\}\, n^{1/2};$$

$$b_k = \mathbf{M}\,[x_k' R_k^2 x_k / R_k], \quad \xi_1 = \{x_k' R_k^2 x_k - b_k\}\, n^{1/2};$$

$$\eta_2 = \{y_k' R_k y_k - d_k\}\, n^{1/2}, \quad \eta_1 = \{y_k' R_k^2 y_k - b_k\}\, n^{1/2}.$$

Оценим величину $|b_k (1 + d_k)^{-1}|$. Для этого введем функции

$$\nu(u) = \sum_{k=1}^{n} (t_k' a_k)^2 \chi(\lambda_k < u), \quad d_k = \mathbf{M} x_k,$$

где λ_k — собственные числа матрицы $p_k - x_k' x_k$, а t_k — соответствующие им собственные векторы. Получим неравенство

$$|b_k (1 + d_k)^{-1}| \leqslant \int |z - u|^{-2}\, d\nu(u)\, [\operatorname{Im} \int (z - u)^{-1}\, d\nu(u)]^{-1} \leqslant |\varepsilon|^{-1}. \tag{9}$$

Аналогично будем иметь

$$|(b_k + \xi_1 n^{-1/2})(1 + d_k + \xi_2 n^{-1/2})^{-1}| \leqslant |\varepsilon|^{-1},$$

$$|(b_k + \eta_1 n^{-1/2})(1 + d_k + \eta_2 n^{-1/2})^{-1}| \leqslant |\varepsilon|^{-1}. \tag{10}$$

Кроме того, в силу условий (1), (3), (4)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathbf{M}\,|\xi_2|^2 \leqslant 2\, \overline{\lim_{n\to\infty}}\, [\sup_{i,j} \mathbf{M}\,(\xi_{ij}^2 - \sigma^2)^2\, s^{-2} + a_k' R_k^2 a_k \sigma^2 s^{-1}] = 0.$$

Поэтому, пользуясь простым утверждением о том, что если две случайные последовательности α_n и β_n ограничены, т. е. $|\alpha_n| \leqslant c < \infty$, $|\beta_n| \leqslant c < \infty$ и $p \lim n \to \infty\, |\alpha_n - \beta_n| = 0$, то $\mathbf{M}\lambda_n = \mathbf{M}\beta_n + o(1)$. Учитывая (9) и (10), для (8) получаем $\lim_{n\to\infty} \sup_{k=\overline{1,n}} \mathbf{M}\theta_k = 0$. Следовательно (см. формулу (7)), при $\varepsilon \neq 0$ $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$.

Значит, с учетом (6)

$$p \lim_{n\to\infty} m^{-1} \operatorname{Sp}\, [(\widehat{A}'\widehat{A} - Iz)^{-1} - \mathbf{M}\operatorname{Sp}\,(Y'Y - Iz)^{-1}] = 0. \tag{11}$$

Поскольку распределение матрицы H не изменится, если ее умножить либо слева, либо справа на ортогональную вещественную матрицу соответствующей размерности, и матрицу A можно представить в виде $A = U_1 \Lambda U_2$, $n \geqslant m$, где U_1 и U_2 — ортогональные матрицы, $\Lambda = (\lambda_i^{1/2} \delta_{ij})$, то

$$\mathbf{M}\operatorname{Sp}\,(Y'Y - Iz)^{-1} = \mathbf{M}\operatorname{Sp}\,(Q'Q - Iz)^{-1}, \tag{12}$$

$$Q = \Lambda + H.$$

Обозначим

$$a(z) = m^{-1}\, \mathbf{M}\operatorname{Sp} R = m^{-1} \sum_{i=1}^{m} r_{ii}, \quad R = (r_{ij}) = (B - Iz)^{-1}, \quad B = Q'Q.$$

Для элементов r_{kk} справедлива формула

$$r_{kk} = [-z + q_k' q_k - q_k' Q_k R_k Q_k' q_k]^{-1}, \tag{13}$$

где $R_k := (r_{ij}^k) = (Q_k' Q_k - Iz)^{-1}$. Матрица Q_k получена из матрицы Q заменой элементов k-й строки q_k нулями. Преобразуем (13) к виду

$$r_{kk} = [-z + \delta_1 + \lambda_k - \delta_2 m^{-1} \operatorname{Sp} R_k Q_k Q_k' - \lambda_k \operatorname{Sp} R_k T_k + \pi_{1k}]^{-1}, \quad (14)$$

где

$$\pi_{1k} = q_k' q_k - \delta_1 - \lambda_k - q_k' Q_k R_k Q_k' q_k + \delta_2 m^{-1} \operatorname{Sp} R_k Q_k Q_k' + \lambda_k \operatorname{Sp} R_k T_k,$$

$T_k = (q_{ki} q_{kj})_{i,j=1}^m$ — квадратные матрицы m-го порядка, у которых k-й столбец и k-я строка имеют нулевые элементы. Легко проверить, что

$$\operatorname{Sp} R_k T_k = \tilde{q}_k' \tilde{R}_k \tilde{q}_k [1 + \tilde{q}_k' \tilde{R}_k \tilde{q}_k]^{-1},$$

где

$$\tilde{R}_k = \Big(\sum_{p \neq k} T_p - Iz\Big)^{-1}, \quad \tilde{q}_k' = (q_{k1}, \ldots, q_{kk-1}, \ldots, q_{kk+1}, \ldots, q_{km}).$$

С учетом этого равенства преобразуем (14)

$$r_{kk} = [-z + \delta_1 + \lambda_k - \delta_2 - z\delta_2 m^{-1} \mathbf{M} \operatorname{Sp} R - \lambda_k (1 - (1 + \delta_2 m^{-1} \mathbf{M} \operatorname{Sp} R)^{-1}) + \pi_{2k}]^{-1}, \quad (15)$$

где

$$\pi_{2k} = \pi_{1k} - z\delta_2 m^{-1} (\operatorname{Sp} R_k - \mathbf{M} \operatorname{Sp} R) + \lambda_k \{[1 + \delta_2 m^{-1} \operatorname{Sp} \tilde{R}_k]^{-1} - [1 + \delta_2 m^{-1} H \operatorname{Sp} R]^{-1}\}.$$

Так же, как и в [1] доказываем $\lim_{n\to\infty} \mathbf{M} |\pi_{2n}| = 0$. Следовательно, для функции $c(z)$ справедливо уравнение

$$a(z) = m^{-1} \sum_{k=1}^{m} [-z(1 + \delta_2 a(z) + \delta_1 - \delta_2 + \lambda_k (1 + \delta_2 q(z))^{-1}]^{-1} + o(1).$$

Нетрудно доказать, что для любого z, $\xi \neq 0$ $\lim_{n\to\infty} |a(z) - b(z)| = 0$, а также, что единственное решение уравнения (5) существует в классе аналитических функций и при $\operatorname{Im} z > 0$ оно представимо в виде преобразования Стилтьеса некоторой функции распределения. Тогда из [2, гл. 10] вытекает утверждение теоремы 1.

Найдем G-состоятельную оценку выражения $\gamma(z) = m^{-1} \operatorname{Sp} (A'A - Iz)^{-1}$ при выполнении G-условия (1).

Преобразуем уравнение (5)

$$\frac{b(z)}{1 + \delta_2 b(z)} = m^{-1} \sum_{k=1}^{m} [\lambda_k + (\delta_1 - \delta_2 - z(1 + \delta_2 b(z)))(1 + \delta_2 b(z))]^{-1}.$$

Из этого уравнения следует, что в качестве G_{27}-оценки функции $\gamma(z)$ можно взять выражение

$$G_{27} = b(\theta(z) + i\alpha \operatorname{sign} \operatorname{Im} \theta) [1 + \delta_2 b(\theta(z) + i\alpha \operatorname{sign} \operatorname{Im} \theta)]^{-1},$$

где $\theta(z)$ — любое измеримое решение уравнения

$$\theta (1 + \delta_2 b(\theta + i\alpha \operatorname{sign} \operatorname{Im} \theta))^2 - (\delta_1 - \delta_2)(1 + \delta_2 b(\theta + i\alpha \operatorname{sign} \operatorname{Im} \theta)) = z,$$

$$\alpha \neq 0, \quad \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Свойства оценок G_i, $i = \overline{1, 25}$, изучаются в [3]. Так же, как и в [1] доказываем утверждение.

Теорема 2. *Если выполняются условия теоремы 1, то при $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{\alpha\to 0} p \underline{\lim}_{n\to\infty} [G_{27} - \gamma(z)] = 0.$$

1. *Гирко В. Л.* Введение в общий статистический анализ // Теория вероятностей и ее применения.— 1987.— **32**, вып. 2.— С. 250—265.
2. *Гирко В. Л.* Теория случайных детерминантов.— Киев : Вища шк., 1980.— 368 с.
3. *Гирко В. Л.* Многомерный статистический анализ.— Киев : Вища шк., 1988, 320 с.

Киев. ун-т

Получено 09.11.88