УДК 517.94

М. К. Бугир

Замечание о признаках колеблемости решений нелинейных дифференциальных уравнений

Получены условия колеблемости всех решений уравнения $L^k u + c(x, u) = f(x)$, где L — оператор Лапласа — Бельтрами в евклидовом и гиперболическом пространствах.

Одержані умови коливності всіх розв'язків рівняння $L^k u + c(x, u) = f(x)$, де L — оператор Лапласа — Бельтрамі в евклідовому та гіперболічному просторах.

1. В настоящей статье исследуется нелинейное дифференциальное уравнение вида

$$L^k u + c(x, u) = f(x), \tag{1}$$

где L — оператор Лапласа—Бельтрами, $c(x, u)$ и $f(x)$ — функции, удовлетворяющие условиям, которые будут сформулированы ниже. Точка $x = (x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит пространству X, в качестве которого будем рассматривать следующие пространства с постоянной кривизной [1]: E^n — евклидово пространство с кривизной $k = 0$; H^n — гиперболическое пространство с отрицательной кривизной $-k^2$; S^n — сферическое пространство с кривизной k^2.

Оператор L через метрический тензор $g_{ij}(x)$ представляется так:

$$L = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x_j} \right),$$

где $g = |\det g_{ij}(x)|$, $\sum_{k=1}^{n} g^{ik} g_{kj} = \delta_{ij}$, δ_{ij} — символ Кронекера. В пространстве E^n метрика задается формулой $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, поэтому оператор L — оператор Лапласа Δ; для пространства H^n — $x^2 = x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2$ и $L = \square = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \Delta$, т. е. в этом случае оператор Лапласа — Бельтрами представляет собой гиперболический оператор. Так как квадратическая форма $\sum_{i=1}^{n} g_{ij}(x)\,dx_i dx_j$ для сферического пространства S^n положительна, то L — оператор эллиптического типа. Итак, в зависимости от вида пространства X уравнение (1) может быть эллиптического или гиперболического типа.

Ранее изучались свойства колеблемости уравнения (1) для $L = \Delta$, т. е. $X = E^n$ в неограниченных областях $E_r = \{x : |x| \geqslant r\}$ (см., например [2—6]). Для этого использовалась усредненная функция [7]

$$M_r[u(x), P_0] = \frac{1}{\Omega_n r^{n-1}} \int \cdots \int_{S_r} u(x)\,ds, \tag{2}$$

где P_0 — центр сферы S_r радиуса r, Ω_n — площадь единичной n-мерной сферы и формула

$$\frac{1}{\Omega_n} \int \cdots \int_{S_r} \Delta u ds = \frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\frac{dM_r(u, P_0)}{dr}\right). \tag{3}$$

Равенство (2) можно интерпретировать как преобразование Радона в пространстве E^n. Как показано в [8], такие преобразования можно ввести для произвольных симметрических однородных пространств ранга 1, какими будут пространства E^n, H^n, S^n. Обозначим

$$M_r[u(x), P_0] = \frac{1}{A(r)} \int \cdots \int_{S_r} u(x)\,ds, \tag{4}$$

где S_r — сфера радиуса r с центром в точке P_0 пространства X. Функция $A(r)$ вычисляется по формулам [8, с. 118]

1. $A(r) = \Omega_n r^{n-1}$, $X = E^n$;
2. $A(r) = \Omega_n \operatorname{sh}^{n-1} r$, $X = H^n$;
3. $A(r) = \Omega_n \sin^{n-1} r$, $X = S^n$.

В этих формулах для простоты предполагается, что кривизны пространств H^n и S^n соответственно равны $k = -1$, $k = 1$. Для произвольной кривизны k функция $A(r)$, например, для пространства H^n вычисляется по формуле $A(r) = \Omega_n [\operatorname{sh} \sqrt{-k}r / \sqrt{-k}]^{n-1}$. Областью изменения r для пространств E^n и H^n служит полуось $[0, \infty)$, для S^n — промежуток $[0, \pi)$. Рассматривая оператор Лапласа—Бельтрами в полярных геодезических координатах, можем записать аналог формулы (3) для рассматриваемых пространств

$$A^{-1}(r) \int \cdots \int_{S_r} Lu ds = A^{-1}(r) \frac{d}{dr}\left[A(r)\frac{dM_r(u, P_0)}{dr}\right]. \tag{5}$$

Формулу (5) можно обобщить для любой степени k

$$A^{-1}(r) \int \cdots \int_{S_r} L^k u ds = \left[\frac{1}{A(r)} \frac{d}{dr}\left(A(r)\frac{d}{dr}\right)\right]^k M_r(u, P_0). \tag{6}$$

Определение 1. *Решение $u(x)$ уравнения (1) будем называть колеблющимся в неограниченном пространстве X, если соответствующая функция $M_r(u, P_0)$ имеет по крайней мере один нуль в области E_r для произвольного r. Если X — компактное пространство, то решение $u(x)$ будем называть колеблющимся, если функция $M_r(u, P_0)$ имеет по крайней мере два нуля, и неколеблющимся — в противном случае.*

Определение 2. *Уравнение (1), у которого все решения неколеблющиеся, будем называть неколеблющимся, и колеблющимся — в противном случае.*

Замечание 1. В силу теоремы сравнения Штурма [9] для уравнений второго порядка ($k = 1$) все решения линейного однородного уравнения (1) одновременно колеблющиеся или неколеблющиеся в неограниченном пространстве X. Для нелинейных уравнений и линейных уравнений высших порядков это свойство часто нарушается, поэтому выделяют классы уравнений четного порядка, у которых все решения колеблющиеся, так называемые уравнения со свойством A [10].

2. Рассмотрим уравнение (1) второго порядка, коэффициенты которого удовлетворяют условиям

I. $c(x, u)$, $f(x)$ — непрерывные функции по всем аргументам для $x \in X$, $(x, u) \in X \times (-\infty, \infty)$;

II. $c(x, u)$ — нечетная функция по второму аргументу и положительная при $u > 0$, т. е. $c(x, u) = -c(x, u)$, $c(x, u) > 0$, если $u > 0$.

Для сведения его к одномерному случаю проинтегрируем (1) по сфере S_r и используем формулу (5). В результате получим

$$\frac{d}{dr}\left[A(r)\frac{dM_r(u, P_0)}{dr}\right] = \int\limits_{S_r}\dots\int f(x)\,ds - \int\limits_{S_r}\dots\int c(x, u(x))\,ds. \tag{7}$$

Обозначим правую часть уравнения (7) через $\psi(r)$, $F(r) = A^{-1}(r)\int\limits_{S_r}\dots\int f(x)\,ds$ и перепишем в виде

$$\frac{d}{dr}\left[A(r)\frac{d\,M_r(u, P_0)}{dr}\right] = A(r)\,\psi(r). \tag{8}$$

Решим последнее уравнение как неоднородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение. Обозначим $K(r, s) = \int\limits_s^r A^{-1}(\tau)\,d\tau$, тогда справедливо равенство

$$M_r(u, P_0) = C_1 + C_2\int\limits_0^r \frac{d\tau}{A(\tau)} + \int\limits_0^r K(r, s)\,A(s)\,\psi(s)\,ds, \tag{9}$$

что можно проверить непосредственным дифференцированием. Как следует из структуры решения (9), в зависимости от значения константы C_2 решение $M_r[u(x), P_0]$ будет регулярным в нуле при $C_2 = 0$ и иметь особенность при $C_2 \neq 0$. Значения функции $K(r, s)$ для отдельных пространств следующие:

а) E^n: $n \geqslant 3$ — $K(r, s) = \dfrac{1}{\Omega_n(n-2)}\left[\dfrac{1}{s^{n-2}} - \dfrac{1}{r^{n-2}}\right]$, $r > s > 0$; $n = 2$ — $K(r, s) = (2\pi)^{-1}[\ln r - \ln s]$;

б) H^n: $K(r, s) = \Omega_n^{-1}\int\limits_s^r \operatorname{sh}^{1-n}\tau\,d\tau$, $r > s > 0$. Последний интеграл может быть вычислен с помощью рекуррентных формул, в частности для $n = 2$ $K(r, s) = \ln \operatorname{th} r/2 - \ln \operatorname{th} s/2$;

в) S^n: $K(r, s) = \Omega_n^{-1}\int\limits_s^r \sin^{1-n}\tau\,d\tau$.

Приведенные выше формулы показывают, что во всех случаях функция $K(r, s)$ положительна при $r > s$. Кроме того, нетрудно убедиться, что частное решение неоднородного уравнения (8) $\int\limits_0^r K(r, s)\,A(s)\,\psi(s)\,ds$ регулярное во всех точках, включая $r = 0$; для этого достаточно записать его с помощью интеграла по шару K_r, ограниченному сферой S_r, так как подынтегральная функция имеет особенность порядка $\alpha < n$. Итак, регулярное решение уравнения (8) будет иметь следующий вид:

$$M_r[u, P_0] = C_1 + \int\limits_0^r K(r, s)\,A(s)\,\psi(s)\,ds. \tag{10}$$

Представление (10) разрешает сформулировать следующее условие колеблемости всех решений уравнения (1).

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнения*

$$Lu + c(x, u) = f(x) \tag{11}$$

удовлетворяет условиям I, II *и, кроме того, для некоторого* $r_0 > 0$

III$_1$. $\liminf\limits_{r\to\infty} \int\limits_{r_0}^{r} K(r, s) A(s) F(s) ds = -\infty$;

III$_2$. $\limsup\limits_{r\to\infty} \int\limits_{r_0}^{r} K(r, s) A(s) F(s) ds = +\infty$.

Тогда уравнение (11) *в пространствах* E^n *и* H^n *обладает свойством* A *для любого регулярного решения.*

Доказательство проведем от противного. Допустим, что, начиная с некоторого r_0, решение уравнения (11) $\tilde{u}(x)$ отлично от нуля, например, положительное. Тогда в силу формулы (4) положительной будет и функция $M_r[\tilde{u}(x), P_0]$, которая определяется формулой (10). В силу условия 2 теоремы это решение можно заменить неравенством

$$M_r[\tilde{u}, P_0] \leqslant C_1 + \int\limits_0^r K(r, s) A(s) F(s) ds.$$

Из условия III$_1$ получим $\liminf\limits_{r\to\infty} + M_r(\tilde{u}, P_0) = -\infty$, что противоречит предположению. Если бы решение $\tilde{u}(x)$ было отрицательным для $r > r_0$, то, используя свойство нечетности функции $c(x, u)$, положительность для $v > 0$, $v = -\tilde{u}$ условие III$_2$ так же, как и в предыдущем случае получили бы противоречие $\limsup\limits_{r\to\infty} M_r[-\tilde{u}(x), P_0] = +\infty$, $M_r[-\tilde{u}, P_0] < 0$.

Замечание 3. В случае пространства E^n условие 3 для $n > 2$ совпадает с условиями работы [5], но в отличие от теорем такого типа не предполагается оценка снизу функции $c(x, u)$ по аргументам x и u, выпуклость функции оценки, так как при доказательстве не применяется неравенство Йенсена. Также отпадает необходимость исследовать некоторые дифференциальные неравенства, существенно использующиеся в работах [2—6].

3. Для определения условий колеблемости всех решений уравнений высших порядков необходимо изучить общее решение однородного уравнения

$$\left\{\frac{1}{A(r)} \frac{d}{dr}\left[A(r)\frac{d}{dr}\right]\right\}^k M_r[u(x), P_0] = 0. \tag{12}$$

Лемма 1. *Общий вид регулярного решения уравнения* (12) *в интервале* $[0, \Omega]$, $\Omega \leqslant \infty$, *задается формулой*

$$M_r(u, P_0) = C_1 + C_2 \int\limits_0^r A^{-1}(s) \int\limits_0^s A(\tau) d\tau ds + \ldots + C_{k-1} \int\limits_0^r A^{-1}(s) \int\limits_0^s A(\tau) \ldots$$

$$\ldots \int\limits_0^{s_{k-2}} A^{-1}(\tau_{k-2}) \int\limits_0^{\tau_{k-2}} A(s_{k-1}) ds_{k-1} \ldots ds. \tag{13}$$

Доказательство проведем методом математической индукции. Для $k = 1$ представление (13) регулярного решения уравнения (12) очевидно, так как оно использовалось при доказательстве теоремы 1. Допустим, что утверждение верно для уравнения порядка $k - 1$. Докажем, что оно справедливо и при замене $k - 1$ на k. Перепишем (12) в виде

$$\left[A^{-1}(r)\frac{d}{dr}\left(A(r)\frac{d}{dr}\right)\right]^{k-1} \frac{1}{A(r)} \frac{d}{dr}\left[A(r)\frac{dM_r(u, P_0)}{dr}\right] = 0.$$

Обозначим $u_1 = A^{-1}(r)\dfrac{d}{dr}(A(r)\,dM_r(u, P_0)/dr)$. По предположению индукции для нее имеет место формула типа (13). Из соотношения

$$C_1 + C_2\int_0^r A^{-1}(s)\int_0^\tau A(\tau)\,d\tau ds + \dots + C_{k-2}\int_0^r A^{-1}(s)\int_0^s A(\tau)\dots$$

$$\dots\int_0^{\tau_{k-3}} A(s_{k-2})\,ds_{k-2}\dots ds = \frac{1}{A(r)}\frac{d}{dr}\left[A(r)\frac{dM_r(u, P_0)}{dr}\right]$$

найдем общее решение $M_r(u, P_0)$, в котором особенность будет иметь только решение вида $\int_0^r A^{-1}(s)\,ds$. Положив, что константа при нем равна нулю, получим представление (13). Обозначим

$$B_{k-1}(r) = \int_0^r A^{-1}(s)\int_0^s A(\tau)\dots\int_0^{\tau_{k-2}} A(s_{k-1})\,ds_{k-1}\dots ds.$$

Имеет место теорема.

Теорема 2. *Пусть функции $c(x, u)$ и $f(x)$ удовлетворяют условиям* I *и* II. *Если, кроме того, для некоторого $r_0 > 0$ выполняются равенства*

$$\lim_{r\to\infty}\inf B_{k-1}^{-1}(r)\int_{r_0}^r K(r, s)\,A(s)\,F(s)\,ds = -\infty,$$

$$\lim_{r\to\infty}\sup B_{k-1}^{-1}(r)\int_{r_0}^r K(r, s)\,A(s)\,F(s)\,ds = +\infty, \tag{14}$$

то уравнение (1) *обладает свойством* A *для любого регулярного решения.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. К противоречию приходим, используя тот факт, что выражение

$$(C_1 + C_2B_1 + \dots + C_{k-1}B_{k-1})\,B_{k-1}^{-1}$$

ограничено и условия (14). Последнее утверждение становится очевидным, если поменять пределы интегрирования под интегралами, кроме того, $B_j(r)\to\infty$, $r\to\infty$. Для эллиптических уравнений (пространство E^n) функции $B_j(r)$ подсчитываются просто. Для $k = 2$ $B_1(r) = r^2/2n$,

$$k = 3 - B_2(r) = \frac{r^4}{2\cdot 3\cdot n(n+2)}, \dots, B_{k-1} = \frac{r^{2(k-1)}}{n(n+2)\dots[n+2(k-2)]k!}.$$

Отметим, что в сформулированых условиях колеблемости существенную роль играет правая часть $f(x)$ и поэтому поведение однородных уравнений (1) не влияет на поведение решений (1) с правой частью, что можно заметить даже на примере линейных уравнений второго порядка (например, уравнение $\Delta u + \dfrac{1}{4|x|}u = 0$). Сформулируем признак существования колеблющихся решений уравнения (1), учитывающих свойства уравнений (1) без правой части.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* I *и* II *и, кроме того, а) для регулярных решений уравнение $Lu + c(x, u) = 0$ обладает свойством* A; *б) $\lim_{r\to\infty} N(r) = 0$, где $N(r)$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{d}{dr}\left(A(r)\dfrac{dM}{dr}\right) = A(r)F(r)$. Тогда все регулярные решения уравнения* (11) *колеблющиеся.*

Доказательство. Проинтегрировав уравнение (11) по сфере S_r, получим уравнение

$$(r^{n-1}M')' + \int\dots\int_{S_r} c(x, u)\,ds = F(r),$$

$$M(r) = C_1 + \frac{C_2}{n-2}r^{2-n} + \int_0^r K(r, s)[F(s) - Q(s)]\,ds,\quad Q(r) = \int\dots\int_{S_r} c(x, u)\,ds.$$

Функция $C_1 - \int_0^r K(r, s) Q(s)\, ds$ по предположению колеблющаяся. От противного пусть выполняются условия теоремы 3 и существует, начиная с некоторого r_0, отличное от нуля решение. Как уже отмечалось, в этом случае неколеблющейся будет и функция $M_r[u(x), P_0]$

$$\lim_{r\to\infty} M(r) = \lim_{r\to\infty} \left[C_1 + \int_0^r K(r, s) F(s)\, ds - \int_0^r K(r, s) Q(s)\, ds\right].$$

По предположению функция $\int_0^r K(r, s) Q(s)\, ds$ колеблющаяся. Если $M(r) > 0$ для $r \geqslant r_0$, то из последнего равенства имеем противоречие, так как по условию б) в левой части число положительное, в правой отрицательное, а для отрицательной функции $\tilde{u}(x)$ — наоборот.

В условиях теоремы 3 в отличие от работ [3, 6] не требуется колеблемость функции $N(r)$, для функции $c(x, u)$ — оценка снизу $c(x, u) \geqslant p(|x|) f_0(u)$, и отсюда, выпуклость функции $f_0(u)$. Заметим, что условия теоремы 3 не зависят от порядка уравнения (1).

Замечание 4. Используя оператор усреднения с положительным весом

$$M_r^*(u(x), P_0) = \frac{1}{A(r)} \int \ldots \int_{S_r^*} G(x) u(x)\, ds,$$

аналогичные утверждения можно сформулировать для уравнения 2-го порядка [3] $Pu + c(x, u) = f(x)$, где оператор P строится аналогично оператору L. Для эллиптического случая $P = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\, \partial/\partial x_j)$, $\| a_{ij} \|$ — симметрическая матрица. Весовая функция имеет вид $G(x) = (\nabla \rho^*(x), a(x) \nabla \rho(x))/|\nabla \rho(x)|$, где $\rho(x)$ строится по фундаментальному решению уравнения $Pu = 0$. Сфера S_r^* для этого случая определяется уравнением $\rho(x) = r$. Так, для уравнений с постоянными коэффициентами, например, S_r^* определяется уравнением $\sum_{i,j}^n A_{ij} x_i x_j = cr^2$, где A_{ij} — алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} матрицы $\| a_{ij} \|$. При доказательстве теорем 1—3 существенно представление регулярного решения линейного уравнения $\frac{d}{dr}\left[r^{n-1} \frac{dM_r(u(x), P_0)}{dr}\right]$. В некоторых случаях удается выделить из уравнения (1) линейную часть $Lu + pu = 0$, т. е. уравнение (11) можно представить в виде

$$Lu + pu + C_1(x, u) = f(x). \tag{15}$$

Функция $M_r(u, P_0)$ для уравнения

$$Lu + pu = 0 \tag{16}$$

выражается через функции Бесселя порядка $\frac{n-2}{2}$. Для $p > 0$

$$M_r(u, P_0) = (\sqrt{p} r)^{-\frac{n-2}{2}} [J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{p} r) C_1 + N_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{p} r) C_2], \tag{17}$$

и соответственно модифицированные функции Бесселя $I_{\frac{n-2}{2}}(t)$ и $K_{\frac{n-2}{2}}(t)$ при $p < 0$. Функция $K(r, s)$ для уравнения (15) при $p > 0$ имеет вид

$$K(r, s) = \frac{\pi s}{2} [N_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{p} r) J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{p} s) - J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{p} r') N_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{p} s)],$$

а для $p < 0$ следует поставить вместо $J_{\frac{n-2}{2}}(t) - I_{\frac{n-2}{2}}(t)$, $N_{\frac{n-2}{2}}(t) - K_{\frac{n-2}{2}}(t)$.

Из общего решения (17) регулярные решения уравнения (15) получим, положив $C_2 = 0$. Используя асимптотические свойства функции Бесселя (в частности, ограниченность функций $J_\nu(t)$), можно сформулировать аналоги теорем 1 и 2. В частности, если $p > 0$ теорема 1 остается справедливой при замене функции $c(x, u)$ функцией $c_1(x, u)$. В случае $p < 0$ кроме замены в условиях теоремы $c(x, u)$ на $c_1(x, u)$ необходимо изменить условие 3. Обозначим $\varphi(r) = (\sqrt{-p}r)^{-\frac{n-2}{2}} I_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{-p}r)$, тогда условие 3 теоремы 1 будет иметь следующий вид:

$$\lim_{r\to\infty} \begin{matrix}\inf\\ \sup\end{matrix} \varphi^{-1}(r) \int_{r_0}^{r} K(r, s) A(s) F(s)\, ds = \begin{matrix}-\infty\\ +\infty\end{matrix}.$$

1. *Вольф Дж.* Пространства постоянной кривизны.— М. : Наука, 1982.— 480 с.
2. *Добротвор И. Г.* Осцилляционные свойства решений некоторых классов уравнений эллиптического типа: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984.— 83 с.
3. *Joshida N.* Oscillation properties of solutions of second order elliptic equations // SIAM J. Math. Anal. B.— 1983.— **14**, N 4.— P. 709—719.
4. *Kitamura J., Kusano T.* Nonlinear oscillation of a fourth order elliptic equation // J. Different. Equat.— 1978.— **30**, N 2.— P. 280—286.
5. *Kitamura J., Kusano T.* Oscillation criteria for semilinear Metaharmonic equations in exterior domains / Arch. Ration. Mech. and Anal.— 1980.— **75**, N 1.— P. 79—90.
6. *Kusano T., Naito M.* Oscallation criteria for a class of perturber shcrödinger equations / Can. Math. Bull.— 1982.— **25**, N 1.— P. 71—77.
7. *Курант Р.* Уравнения с частными производными.— М. : Мир, 1964.— 830 с.
8. *Swanson C. A.* Comparison and oscillation theory of linear differential equations.— New York — London: Acad. Press, 1968.— 224 p.
9. *Хелгасон С.* Преобразование Радона.— М. : Мир, 1983.— 150 с.
10. *Чантурия Т. А.* О колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений высших порядков // Докл. семинаров ин-та прикл. математики им. И. Н. Векуа.— Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1982.— 73 с.

Терноп. фин.-экон. ин-т

Получено 20.04.88