УДК 517.9

Нгуен Быонг

К вопросу об оптимальном управлении одним классом нелинейных уравнений в банаховом пространстве

Рассматривается вопрос корректности задачи оптимального управления системами, описываемыми операторными уравнениями типа Гаммерштейна в банаховом пространстве.

Розглядається питання коректності задачі оптимального управління системами, які описуються операторними рівняннями типу Гамерштейна в банаховому просторі.

В настоящей статье рассматривается вопрос корректности задачи оптимального управления системами, описываемыми операторным уравнением типа Гаммерштейна в банаховом пространстве.

1. Пусть X — вещественное рефлексивное банахово пространство, обладающее E-свойством, X^* — его сопряженное пространство. В X рассматривается задача: найти

$$u_0 \in U_{ad} : \mathrm{I}_0(u_0) = \min_{u \in U_{ad}} \mathrm{I}_0(u), \quad \mathrm{I}_0(u) = \| Cx(u) - w_0 \|_W^2 + \mu \| u \|_U^2, \tag{1}$$

где U_{ad} — замкнутое выпуклое множество уравнений рефлексивного банахова пространства U (U_{ad} ограничено, если $\mu = 0$), w_0 — фиксированный элемент банахова пространства наблюдений W, C — линейный ограниченный оператор из X в W, а $x = x(u)$ — решение операторного уравнения типа Гаммерштейна

$$x + F_2 F_1(x) = f_0 + Bu, \; f_0 \in X, \tag{2}$$

с хеминепрерывными нелинейными операторами F_i, $i = 1, 2$, $F_1 : X \to X^*$ и $F_2 : X^* \to X$, причем

$$\begin{gathered} \langle F_1(x) - F_1(y), x - y \rangle \geqslant (g_1(\| x \|) - g_1(\| y \|))(\| x \| - \| y \|), \\ \langle F_2(x^*) - F_2(y^*), x^* - y^* \rangle \geqslant (g_2(\| x^* \|_*) - g_2(\| y^* \|_*))(\| x^* \|_* - \| y^* \|_*), \end{gathered} \tag{3}$$

где $\langle y^*, x \rangle$ — значение линейного непрерывного функционала y^* сопряженного пространства на элементе x рассматриваемого пространства, $g_i(t)$ — вещественные строго возрастающие на $[0, \infty)$ функции, причем $g_i(0) = 0$ и $g_i(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, $\| \cdot \|$ — норма в X, а $\| \cdot \|_*$ — норма в X^*, B — компактный оператор из U в X.

Такая задача рассматривается, например, в [1—3]. В [4] изучен метод регуляризации для случая $B \equiv 0$ и более общего функционала $\mathrm{I}_0(u)$.

В этой статье исследуем вопрос существования и корректности поставленной задачи относительно данных w_0, f_0 и F_i и покажем, что в некоторых случаях задача (1)—(3) является регуляризованной для задачи (1), (2) с монотонными операторами F_i.

Будем говорить, что $[u_0, x_0]$ является оптимальной парой для (1), (2), если u_0 является решением задачи (1) с соответствующим решением x_0 уравнения (2).

Теорема 1. *При выполнении приведенных выше условий задача* (1)—(3) *имеет оптимальную пару* $[u_0, x_0]$.

Доказательство. Из [4] следует, что для каждого $f_0 \in X$ и $u \in U_{ad}$ уравнение (2) имеет единственное решение $x(u)$. Поэтому $\mathrm{I}_0(u)$ является однозначным неотрицательным функционалом и I_0 ограничен снизу. Пусть $\{u_n\}$ — минимизирующая последовательность для I_0. Из (1) вытекает ограниченность $\{u_n\}$. Пусть $x_n = x(u_n)$ — решение уравнения (2) при $u = u_n$. Покажем, что $\{x_n\}$ ограничено. Пусть $Z = X \times X^*$ — банахово пространство с такой нормой: $|z| = (\| x \|^2 + \| x^* \|_*^2)1/2$. Тогда оператор A, действующий из Z в Z^* таким образом, что $A(z) = [F_1(x), F_2(x^*)] + [-x^*, x]$, является хеминепрерывным. Кроме того, имеем

$$\forall z \in Z \quad (g_1(\|x_n\|) - g_1(\|x\|))(\|x_n\| - \|x\|) + (g_2(\|x_n^*\|_*) - g_2(\|x^*\|_*))\times$$
$$\times(\|x_n^*\|_* - \|x^*\|_*) \leqslant \langle A(z_n) - A(z), z_n - z\rangle \leqslant \|f_0 - Bu_n\|\|x_n^* - x^*\|_*, \tag{4}$$

где $z_n = [x_n, x_n^*]$, $x_n^* = F_1(x_n)$. Отсюда вытекает ограниченность последовательностей $\{x_n\}$ и $\{x_n^*\}$, т. е., последовательность $\{z_n\}$ ограничена в рефлексивном банаховом пространстве Z. Пусть $u_n \rightharpoonup u_0$ и $z_n \rightharpoonup z_0 := [x_0, x_0^*]$. Покажем, что $[u_0, x_0]$ является оптимальной парой для задачи (1), (2). Сначала докажем, что x_0 является решением уравнения (2), соответствующим управлению u_0. Так как $\langle A(z_n), z - z_n\rangle = \langle f_0 + Bu_n, x^* - x_n^*\rangle$, то $\lim\langle A(z_n), z - z_n\rangle = \lim\langle f_0 + Bu_n, x^* - x_n^*\rangle = \langle f_0 + Bu_0, x^* - x_0^*\rangle$. Тогда из свойства монотонности оператора A имеем $\langle A(z), z - z_0\rangle \geqslant \langle f_0 + Bu_0, x^* - x_0^*\rangle$, $\forall z \in Z$, т. е. x_0 — решение уравнения (2), соответствующее управлению u_0. Так как $I_0(u)$ слабо полунепрерывен снизу, то $I_0(u_0) \leqslant \liminf I_0(u_n) = \inf I_0(u)$, $u \in U_{ad}$. Теорема доказана. Рассмотрим вместо w_0 и f_0 последовательности $\{w_n\}$ и $\{f_n\}$ такие, что $w_n \to w_0$ и $f_n \to f_0$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *При указанных выше условиях для соответствующей последовательности оптимальных пар $[u_n, x_n]$ существует подпоследовательность $\{u_\mu\}$ такая, что $u_\mu \rightharpoonup u_0$ и $\{x_\mu\}: x_\mu \to x_0$.*

Доказательство. Покажем, что при $m \to \infty$ последовательность $\{x_m\}$ решений уравнения (2) с правой частью $f \ + Bu_0$ сходится к x_0. Аналогично (4), имеем

$$(g_1(\|x_m\|) - g_1(\|x_0\|))(\|x_m\| - \|x_0\|) + (g_2(\|x_m^*\|_*) - g_2(\|x_0^*\|_*))\times$$
$$\times(\|x_m^*\|_* - \|x_0^*\|_*) \leqslant \langle A(z_m) - A(z_0), z_m - z_0\rangle \leqslant \|f_m - f_0\|\|x_m^* - x_0^*\|_*. \tag{5}$$

Отсюда следует, что последовательности $\{x_m\}$ и $\{x_m^*\}$ ограничены. Значит последовательность $|z_m|$ сходится к $|z_0|$ и $z_m \rightharpoonup z_0$. Из свойства пространства X вытекает $x_m \to x_0$.

Пусть $\{u_n\}$ — последовательность управлений задачи (1)—(3) при приближенных заданных w_n и f_n. Докажем, что $\{u_n\}$ ограничено. Так как $I_n(u_n) \leqslant I_n(u_0)$, где $I_n(u) = \|Cx - w_n\|_w^2 + \mu\|u\|_U^2$, то достаточно доказать, что $\{I_n(u_0)\}$ ограничено. Пусть $\tilde{x}_n = x_n(u_0)$ — решение уравнения (2) с правой частью $f_n + Bu_0$. Тогда $\tilde{x}_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Поэтому $I_n(x_0) = \|C\tilde{x}_n - w_n\|_w^2 + \mu\|u_0\|_u^2 \to I(u_0)$. Отсюда следует ограченность $\{I_n(u_0)\}$.

Пусть $u_\mu \rightharpoonup \bar{u}$ и $Bu_\mu \to B\bar{u}$, $\forall\varepsilon > 0$ $\exists n(\varepsilon)$, $n \geqslant n(\varepsilon)$, $I_n(u_n) \leqslant I_n(u_0) \leqslant I_0(u_0) + \varepsilon$. Так как $\liminf I_n(u_n) \geqslant I_0(\bar{u})$, то $I_0(u_0) \geqslant I_0(\bar{u})$, т. е. $\bar{u}$ является оптимальным управлением для $I_0(u)$. Имеет место неравенство (5), где правая часть имеет вид $\|f_\mu - f_0 + Bu_\mu - Bu_0\|$. Отсюда следует, что $x_\mu \to x_0$. Теорема доказана.

Рассмотрим вместо F_i последовательность операторов F_i^n, которые удовлетворяют условию (3) с одинаковыми функциями g_i, $i = 1, 2$, и

$$\|F_1^n(x) - F_1(x)\|_* \leqslant h_1^n\varphi_1(\|x\|^2), \|F_2^n(x^*) - F_2(x^*)\| \leqslant h_2^n\varphi_2(\|x^*\|_*^2), \tag{6}$$

где $\varphi_i(t)$ — непрерывные ограниченные и неубывающие на $[0, \infty)$ функции. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *При выполнении указанных выше условий последовательность оптимальных пар $[\tilde{u}_n, \tilde{x}_n]$ задачи $\min I_n(u)$, $x + F_2^nF_1^n(x) = f_n + Bu$ такова, что существует $\{\tilde{u}_\mu\} \subset \{\tilde{u}_n\}: \tilde{u}_\mu \rightharpoonup u_0$ и $\tilde{x}_\mu = x(\tilde{u}_\mu) \to x_0$.*

Доказательство. Аналогично (5) имеем

$$(g_1(\|\tilde{x}_n\|) - g_1(\|x_0\|))(\|\tilde{x}_n\| - \|x_0\|) + (g_2(\|\tilde{x}_n^*\|_*) - g_2(\|x_*^*\|_*))\times$$

$$\times (\|\tilde{x}_n^*\|_* - \|x_0^*\|_*) \leqslant \|f_n - f_0 + Bu_n - Bu_0\| \|x_n^* - x_0\|_* +$$
$$+ (h_1^n + h_2^n) \varphi (|z_n|^2),$$

где $\varphi(t) = \max(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, т. е. решение уравнения (2) непрерывно зависит от правой части и операторов F_i, $i = 1, 2$. Применяя метод доказательства теоремы 2, завершаем доказательство теоремы 3.

2. На практике часто встречается случай, когда $g_i(t) \equiv 0$, т. е. F_i являются только монотонными операторами и уравнение (2) имеет решение для любого $u \in U_{ad}$. При этих условиях единственность решения уравнения (2) не гарантируется. При этом множество $S(u)$ решений уравнения (2) выпукло и замкнуто для каждого u. Если пространство W строго выпукло, то точка, которая реализует минимум функционала $\|Cx - w_0\|_W^2$ единственна. Она представляет собой метрическую проекцию точки w_0 на замкнутое выпуклое множество $CS(u)$, которую обозначаем через $Cx^0(u)$. Имеем $1^0(u) = \|CX^0(u) - w_0\|_W^2 + \mu \|u\|_W^2 \leqslant 1_0(u)$. Свойство корректности в этом случае теряется. Однако возмущенное уравнение

$$x + F_{2\alpha n} F_{1\alpha n}(x) = f_n + Bu, \tag{7}$$

где $F_{1\alpha n} = F_1 + \alpha_n U$, $F_{2\alpha n} = F_2 + \alpha_n V$, $U : X \to x^*$ и $V : X^* \to X$ — нормализованные дуальные отображения [5], $\alpha_n > 0$ и $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$, обладает всеми изложенными в п. 1 свойствами. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть задача* (1), (2) *с монотонными операторами* F_i, $i = 1, 2$, *имеет оптимальную пару и* $\{[u_n, x_n]\}$ — *последовательность оптимальных пар для задачи* (1), (6) *и* (7). *Тогда существует* $\{u_\mu\} \subset \{u_n\}$ *такая, что* $u_\mu \to \tilde{u}$. *Если среди таких последовательностей существует последовательность* $\{u_\mu\} : \|Bu_\mu - B\tilde{u}\| = 0(\alpha_\mu), \|f_\mu - f_0\| = 0(\alpha_\mu)$ *и* $h_\mu = 0(\alpha_\mu)$ *при* $\alpha_\mu \to 0$, *то* $x_\mu \to \tilde{x}$, *где* $[\tilde{u}, \tilde{x}]$ *является оптимальной парой для задачи* (1), (2).

Доказательство. Из [4] следует, что последовательность $\{\tilde{x}_n\}$ решений уравнения (6) сходится к решению уравнения (2) при $n \to \infty$. Как в доказательстве теоремы 2, имеем, что $\{u_n\}$ ограничено. Пусть $u_\mu \to \tilde{u}$ и $\|Bu_\mu - B\tilde{u}\|/\alpha_\mu \to 0$ при $\mu \to \infty$. Так как

$$|z_\mu|^2 \leqslant |z_\mu| |z| + (\|f_\mu - f_0\| + \|Bu_\mu - B\tilde{u}\|)(\|x_\mu^* - \tilde{x}^*\|_*)/\alpha_\mu),$$

где $\tilde{x}$ — решение уравнения (2) при $u = \tilde{u}$, то $\{z_\mu\}$ ограничено. Используя доказательство теоремы 2, завершаем доказательство теоремы 4.

1. *Wolfersdorf L. V.* Optimal control of a class of process described by general integral equations of Hammerstein-type // Math. Nachr.— 1976.— **71**.— P. 115—141.
2. *Wolfersdorf L. V.* Optimal problems by equations with closed and normally resolvable operators // Math. Nachr.— 1975.— **65**.— P. 331—333.
3. *Joshi Mohan*. On the existence of optimal control in Banach spaces // Bull. Austral. Math. Soc.— 1983.— **27**, N 3.— P. 395—401.
4. *Нгуен Быонг*. Об одной задаче оптимизации // Укр. мат. журн.— 1987. — **39**, № 6. — С. 793—796.
5. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов.— М. : Наука, 1972. — 416 с.

Вьетнам

Получено 26.07.88

$$\times (\|\tilde{x}_n^*\|_* - \|x_0^*\|_*) \leqslant \|f_n - f_0 + Bu_n - Bu_0\| \|x_n^* - x_0\|_* +$$
$$+ (h_1^n + h_2^n) \varphi(|z_n|^2),$$

где $\varphi(t) = \max(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, т. е. решение уравнения (2) непрерывно зависит от правой части и операторов F_i, $i = 1, 2$. Применяя метод доказательства теоремы 2, завершаем доказательство теоремы 3.

2. На практике часто встречается случай, когда $g_i(t) \equiv 0$, т. е. F_i являются только монотонными операторами и уравнение (2) имеет решение для любого $u \in U_{ad}$. При этих условиях единственность решения уравнения (2) не гарантируется. При этом множество $S(u)$ решений уравнения (2) выпукло и замкнуто для каждого u. Если пространство W строго выпукло, то точка, которая реализует минимум функционала $\|Cx - w_0\|_W^2$ единственна. Она представляет собой метрическую проекцию точки w_0 на замкнутое выпуклое множество $CS(u)$, которую обозначаем через $Cx^0(u)$. Имеем $1^0(u) = \|CX^0(u) - w_0\|_W^2 + \mu \|u\|_W^2 \leqslant I_0(u)$. Свойство корректности в этом случае теряется. Однако возмущенное уравнение

$$x + F_{2\alpha n} F_{1\alpha n}(x) = f_n + Bu, \tag{7}$$

где $F_{1\alpha n} = F_1 + \alpha_n U$, $F_{2\alpha n} = F_2 + \alpha_n V$, $U : X \to x^*$ и $V : X^* \to X$ — нормализованные дуальные отображения [5], $\alpha_n > 0$ и $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$, обладает всеми изложенными в п. 1 свойствами. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть задача* (1), (2) *с монотонными операторами* F_i, $i = 1, 2$, *имеет оптимальную пару и* $\{[u_n, x_n]\}$ — *последовательность оптимальных пар для задачи* (1), (6) *и* (7). *Тогда существует* $\{u_\mu\} \subset \{u_n\}$ *такая, что* $u_\mu \to \tilde{u}$. *Если среди таких последовательностей существует последовательность* $\{u_\mu\} : \|Bu_\mu - B\tilde{u}\| = 0(\alpha_\mu)$, $\|f_\mu - f_0\| = 0(\alpha_\mu)$ *и* $h_\mu = 0(\alpha_\mu)$ *при* $\alpha_\mu \to 0$, *то* $x_\mu \to \tilde{x}$, *где* $[\tilde{u}, \tilde{x}]$ *является оптимальной парой для задачи* (1), (2).

Доказательство. Из [4] следует, что последовательность $\{\tilde{x}_n\}$ решений уравнения (6) сходится к решению уравнения (2) при $n \to \infty$. Как в доказательстве теоремы 2, имеем, что $\{u_n\}$ ограничено. Пусть $u_\mu \to \tilde{u}$ и $\|Bu_\mu - B\tilde{u}\|/\alpha_\mu \to 0$ при $\mu \to \infty$. Так как

$$|z_\mu|^2 \leqslant |z_\mu| |z| + (\|f_\mu - f_0\| + \|Bu_\mu - B\tilde{u}\|)(\|x_\mu^* - \tilde{x}^*\|_*)/\alpha_\mu),$$

где $\tilde{x}$ — решение уравнения (2) при $u = \tilde{u}$, то $\{z_\mu\}$ ограничено. Используя доказательство теоремы 2, завершаем доказательство теоремы 4.

1. *Wolfersdorf L. V.* Optimal control of a class of process described by general integral equations of Hammerstein-type // Math. Nachr.— 1976.— **71**.— P. 115—141.
2. *Wolfersdorf L. V.* Optimal problems by equations with closed and normally resolvable operators // Math. Nachr.— 1975.— **65**.— P. 331—333.
3. *Joshi Mohan.* On the existence of optimal control in Banach spaces // Bull. Austral. Math. Soc.— 1983.— **27**, N 3.— P. 395—401.
4. *Нгуен Бьюнг.* Об одной задаче оптимизации // Укр. мат. журн.— 1987. — **39**, № 6. — С. 793—796.
5. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов.— М. : Наука, 1972. — 416 с.

Вьетнам

Получено 26.07.88