УДК 519.21

В. А. Гасаненко

Винеровский процесс в криволинейной полосе

Изучено представление вероятности невыхода броуновского движения из криволинейной полосы в виде разложения по системе собственных функций. Показано, что коэффициенты этого ряда удовлетворяют интегральному уравнению Вольтерра в l_2. Для тонких полос с ограниченными первыми производными границ последовательные итерации уравнения определяют полное асимптотическое разложение вероятности невыхода.

Вивчено представлення імовірності перебування броунівського руху в криволінійній смузі у вигляді розкладу за системою власних функцій. Показано, що коефіцієнти цього ряду задовольняють інтегральному рівнянню Вольтера в l_2. Для вузьких смуг з обмеженими першими похідними границь послідовні ітерації рівняння визначають повне асимптотичне розкладання імовірності перебування.

Пусть $w(t)$ — стандартный винеровский процесс и даны две функции $G_1(t)$, $G_2(t)$ такие, что $G(t) = G_2(t) - G_1(t) > 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $G_1(0) < 0 < G_2(0)$.

В настоящей статье получено представление вероятности $P = P(G_1(t) < w(t) < G_2(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ в виде ряда. Литература по использованию, вычислениям и оценкам такого рода вероятностей приведена в [1].

Положим $g_i(t) = G_i(T-t)$, $i = 1, 2$, $g(t) = G(T-t)$. Известно [2], $P = u(T, 0)$, где $u(t, x)$ — решение начально-краевой задачи

$$\begin{gathered} u_{xx} = 2u_t, \\ u(t, g_i(t)) = 0, \\ u(0, x) = \begin{cases} 1, & x \in (g_1(0),\ g_2(0)), \\ 0, & x \bar{\in} [g_1(0),\ g_2(0)]. \end{cases} \end{gathered} \tag{1}$$

Решение (1) представим в виде

$$u(t, x) = \sum_{k \geqslant 1} q_k(t)\, v_k(t, x), \tag{2}$$

$$v_k(t, x) = \sqrt{\frac{2}{g(t)}} \sin \frac{x - g_1(t)}{g(t)}\, k\pi,$$

$\{v_k(t, x)\}_{k \geqslant 1}$ при каждом t — система собственных функций первой граничной задачи $\partial^2\varphi/\partial x^2 = \lambda\varphi$, $\varphi(t, g_i(t)) = 0$, $i = 1, 2$. Эта система полна в $L_2(D_t)$, $D_t = [g_1(t),\ g_2(t)]$. Подставим (2) в (1) и проинтегрируем левую и правую часть с весом $v_m(t, x)$ на промежутке D_t. Для $q_m(t)$, $m \geqslant 1$, получим бесконечную систему уравнений

$$\dot{q}_m(t) = -\frac{1}{2}\left(\frac{m\pi}{g(t)}\right)^2 q_m(t) - \sum_{k \neq m} \frac{2km}{k^2 - m^2}\left(\frac{(-1)^{m+k}\dot{g}_2(t) - \dot{g}_1(t)}{g(t)}\right) q_k(t) \tag{3}$$

с начальными условиями

$$q(0) = q_0 = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{2g(0)}}{\pi m}, & m \text{ — нечетное}, \\ 0, & m \text{ — четное}. \end{cases}$$

Обозначим

$$A(t) = \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{m\pi}{g(t)}\right)^2 \delta_{mk}\right)_{k, m \geqslant 1}, \quad U(t, \tau) = \left(\exp\left(-\frac{(m\pi)^2}{2} b(\tau, t)\right)\delta_{mk}\right)_{k, m \geqslant 1},$$

$$b(\tau, t) = \int_\tau^t g^{-2}(x)\, dx,$$

δ_{mk} — символ Кронекера, $U(t) := U(t, 0)$, $b(t) := b(0, t)$,

$$B(t) = \begin{cases} \dfrac{2mk\,((-1)^{m+k}\dot{g}_2(t) - \dot{g}_1(t))}{(m^2 - k^2)\,g(t)}, & m \neq k, \\ 0, & m = k. \end{cases}$$

Известно, $q(t) = (q_1(t), q_2(t), \ldots) \in l_2$. Таким образом, (3) определяет задачу Коши в гильбертовом пространстве l_2 $\dot{q}(t) = (A(t) - B(t))\,q(t)$, $q(0) = q_0$. Решение эквивалентно интегральному уравнению

$$q(t) = U(t)\,q_0 - \int_0^t U(t, \tau)\,B(\tau)\,q(\tau)\,d\tau.$$

Положим

$$M = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} G(t)\,(|\dot{G}_1(t)| + |\dot{G}_2(t)|),\ a = \max\left(\frac{3}{2}T,\ 32/\pi^4\right), \tag{4}$$

$$q(t) = \sum_0^\infty (-1)^k \gamma_k(t),\ \gamma_0(t) = U(t)\,q_0,\ \ \gamma_k(t) = \int_0^t U(t, \tau)\,B(\tau)\,\gamma_{k-1}(\tau)\,d\tau,$$

$q_k(t)$ — k-я координата вектора $q(t)$, $k \geqslant 1$, $\|\cdot\|$ — норма в l_2.

Теорема 1. *Если $G_i(t)$, $i = 1, 2$, абсолютно непрерывные функции и выполняется неравенство*

$$Ma < 1, \tag{5}$$

то

$$P = \sum_1^\infty q_k(T)\,v_k(T, 0), \tag{6}$$

и справедливо неравенство

$$\|\gamma_k(T)\| \leqslant \exp\left(-\frac{\pi^2}{2}\,b(T)\right)(Ma)^k. \tag{7}$$

Доказательство. Оценим вначале $\gamma_k(t)$, $k \geqslant 1$ (неравенство $\leqslant$ между векторами будем понимать покоординатно)

$$\gamma_0(t) = \left(\exp\left(-\frac{\pi^2}{2}\,b(t)\,(2i+1)^2\right)\frac{2\sqrt{2g(0)}}{\pi(2i+1)},\quad i \geqslant 0\right),$$

$$\gamma_1(t) = \int_0^t U(t, \tau)\,B(\tau)\,\gamma_0(\tau)\,d\tau =$$

$$= \left(\sum_{j \neq i} \frac{2i}{i^2 - j^2} \int_0^t \exp\left(-\frac{i^2\pi^2}{2}\,b(\tau, t) - \frac{j^2\pi^2}{2}\,b(\tau)\right) \times\right.$$

$$\left.\times \left(\frac{(-1)^{i+j}\dot{g}_2(\tau) - \dot{g}_1(\tau)}{g(\tau)}\right) d\tau,\ i \geqslant 1\right) \leqslant \exp\left(-\frac{\pi^2}{2}\,b(t)\right)\left(2Mt \sum_{j \geqslant 2} (j^2 - 1)^{-1},\right.$$

$$\left.\sum_{j \neq i} \frac{4i}{|i^2 - j^2|\,(i^2 - 1)\,\pi^2},\ \ i \geqslant 2\right) \leqslant \exp\left(-\frac{\pi^2}{2}\,b(t)\right)\left(\frac{3}{2}\,tM,\ \frac{1}{i}\,\frac{32}{\pi^4},\ \ i \geqslant 2\right);$$

$$\vdots$$

$$\gamma_k(t) \leqslant \exp\left(-\frac{\pi^2}{2}\,b(t)\right)\left(\left(\frac{3tM}{2}\right)^k,\ \left(\frac{32M}{\pi^4}\right)^k \frac{1}{i},\ \ i \geqslant 2\right).$$

Таким образом, доказана вторая часть теоремы.

Представление (6) является следствием доказанных неравенств и представления решения (4) в виде суммы итераций [3, с. 143].

Следствие 1. *Пусть* $G_{i,\varepsilon}(t) = \varepsilon G_i(t)$, $\varepsilon \to 0$ *и* $G_i(t)$, $i = 1, 2$ — *абсолютно непрерывные функции на* $[0, T]$, *тогда*

$$\left| P_\varepsilon - \sum_{k \geqslant 1} q_{k,n}(T) v_{k,\varepsilon}(T, 0) \right| \leqslant \frac{(Ma\varepsilon^2)^{n+1}}{1 - Ma\varepsilon^2} \exp\left(- \left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^2 \frac{b(T)}{2} \right),$$

$$q_n(T) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \gamma_m(T). \tag{8}$$

Доказательство. Условие (5) очевидно выполняется для достаточно малых ε. Неравенство (8) следует из неравенства (7) и того факта, что $M_\varepsilon = \varepsilon^2 M$.

Заметим, что второстепенные члены разложения P_ε при $\varepsilon \to 0$ строились в [4] при более сильных ограничениях на гладкость $G_i(t)$.

Приведем условие представления решения итерацией сверток [1, т. 3].

Теорема 2. *Если* $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \max(|\dot{G}_1(t)|, \ |\dot{G}_2(t)|) < \infty$ *и* $G_i(t) = G_i(0)$, $0 \leqslant t < \Delta_i$, $i = 1, 2$, *то имеет место представление* (6).

Доказательство. Оценим норму оператора $A(z) = U(t, z) B(z)$ на l_2. Пусть $p \in l_2$ и $\Delta = \min(\Delta_1, \Delta_2)$, тогда

$$A(z)p = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{2ij}{|i^2 - j^2|} \exp\left(- \frac{\pi^2 i^2}{2} \int_0^z G^{-2}(x)\, dx \left(\frac{|\dot{G}_2(z)| + |\dot{G}_1(z)|}{G(z)} \right) p_j, \right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad z \geqslant \Delta, \ i \geqslant 1, \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad z < \Delta, \end{cases}$$

$$\| A(z) p \| \leqslant c(z) \| p \|, \ \max_{0 \leqslant z \leqslant T} c(z) \leqslant c < \infty.$$

Таким образом, $A(z)$, $0 \leqslant z \leqslant T$, — равномерно ограниченные операторы. Как следует из [3], этого достаточно для сходимости суммы итераций к решению (4).

В заключение отметим, что в [5] впервые предложено определять вероятность пребывания в виде разложения по системам собственных функций. Там же найдено представление коэффициентов разложения через функционалы от специальным образом построенного марковского процесса.

1. *Новиков А. А.* Об оценках и асимптотическом поведении вероятностей невыхода винеровского процесса на подвижную границу // Мат. сб.— 1979.— **110**, № 4.— С. 539—550.
2. *Скороход А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями.— М. : Наука, 1964.— 278 с.
3. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1970.— 534 с.
4. *Гасаненко В. А.* Винеровский процесс в тонкой области // Укр. мат. журн.—1988.—**40**, № 2.— С. 225—229.
5. *Могульский А. А.* Метод Фурье для нахождения асимптотики малых уклонений винеровского процесса // Сиб. мат. журн.— 1982.— **23**, № 3.— С. 161—174.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 20.09.88

Представление (6) является следствием доказанных неравенств и представления решения (4) в виде суммы итераций [3, с. 143].

Следствие 1. *Пусть* $G_{i,\varepsilon}(t) = \varepsilon G_i(t)$, $\varepsilon \to 0$ *и* $G_i(t)$, $i = 1, 2$ — *абсолютно непрерывные функции на* $[0, T]$, *тогда*

$$\left| P_\varepsilon - \sum_{k \geqslant 1} q_{k,n}(T)\, v_{k,\varepsilon}(T, 0) \right| \leqslant \frac{(Ma\varepsilon^2)^{n+1}}{1 - Ma\varepsilon^2} \exp\left(-\left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^2 \frac{b(T)}{2}\right),$$

$$q_n(T) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \gamma_m(T). \qquad (8)$$

Доказательство. Условие (5) очевидно выполняется для достаточно малых ε. Неравенство (8) следует из неравенства (7) и того факта, что $M_\varepsilon = \varepsilon^2 M$.

Заметим, что второстепенные члены разложения P_ε при $\varepsilon \to 0$ строились в [4] при более сильных ограничениях на гладкость $G_i(t)$.

Приведем условие представления решения итерацией сверток [1, т. 3].

Теорема 2. *Если* $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \max(|\dot{G}_1(t)|,\ |\dot{G}_2(t)|) < \infty$ *и* $G_i(t) = G_i(0)$, $0 \leqslant t < \Delta_i$, $i = 1, 2$, *то имеет место представление* (6).

Доказательство. Оценим норму оператора $A(z) = U(t, z) B(z)$ на l_2. Пусть $p \in l_2$ и $\Delta = \min(\Delta_1, \Delta_2)$, тогда

$$A(z)\,p = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{2ij}{|i^2 - j^2|} \exp\left(-\frac{\pi^2 i^2}{2} \int_0^z G^{-2}(x)\,dx \left(\frac{|\dot{G}_2(z)| + |\dot{G}_1(z)|}{G(z)}\right)\right) p_j, & z \geqslant \Delta,\ i \geqslant 1, \\ 0, & z < \Delta, \end{cases}$$

$$\| A(z)\,p \| \leqslant c(z) \| p \|, \ \max_{0 \leqslant z \leqslant T} c(z) \leqslant c < \infty.$$

Таким образом, $A(z)$, $0 \leqslant z \leqslant T$, — равномерно ограниченные операторы. Как следует из [3], этого достаточно для сходимости суммы итераций к решению (4).

В заключение отметим, что в [5] впервые предложено определять вероятность пребывания в виде разложения по системам собственных функций. Там же найдено представление коэффициентов разложения через функционалы от специальным образом построенного марковского процесса.

1. *Новиков А. А.* Об оценках и асимптотическом поведении вероятностей невыхода винеровского процесса на подвижную границу // Мат. сб.— 1979.— **110**, № 4.— С. 539—550.
2. *Скороход А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями.— М. : Наука, 1964.— 278 с.
3. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1970.— 534 с.
4. *Гасаненко В. А.* Винеровский процесс в тонкой области // Укр. мат. журн.—1988.—**40**, № 2.— С. 225—229.
5. *Могульский А. А.* Метод Фурье для нахождения асимптотики малых уклонений винеровского процесса // Сиб. мат. журн.— 1982.— **23**, № 3.— С. 161—174.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 20.09.88