УДК 519.46

Ю. А. Неретин

О тензорных произведениях унитарных представлений $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$

В статье получены разложения на неприводимые представления тензорных произведений неприводимых унитарных представлений группы $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$.

1. Обозначим через $\mathrm{Ind}_A^C(\rho)$ представление группы C, унитарно индуцированное с представления ρ подгруппы A. Пусть $\mathrm{Res}_A^C(\sigma)$ — ограничение представления σ группы C на подгруппу A. Через G будем обозначать группу $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, через B — ее подгруппу, состоящую из блочно-треугольных матриц вида

$$P = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

где $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Любое неприводимое унитарное представление G, за исключением одномерного, имеет вид $\rho = \mathrm{Ind}_P^G(\mu)$, причем μ задается формулой $\mu(P) = T(A)$, где T — неприводимое унитарное представление $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ [1]. Если $\dim T = \infty$, будем называть ρ невырожденным. Если $\dim T = 1$, то ρ называется представлением вырожденной серии. Представление ρ слабо содержится в регулярном представлении G (tempered, см. [2, 3]), если T принадлежит основной или дискретной серии. Обозначим через R прямой интеграл (по мере Планшереля, см. [2]) всех представлений G, слабо содержащихся в регулярном.

2. Мера Планшереля для группы B сосредоточена на одном представлении [4], которое будем обозначать через π. Представление $\mathrm{Res}_B^G(\rho)$ неприводимо, если неприводимо ρ [5]. В частности, если ρ невырождено, то $\mathrm{Res}_B^G(\rho) = \pi$ [2, 5].

Лемма.

а). *Пусть α — унитарное представление B, тогда* $\alpha \otimes \pi = \dim(\alpha)\,\pi$.

б). $\mathrm{Ind}_B^G(\pi) = R$.

Доказательство.

а). Пусть Reg — регулярное представление B, $\mathrm{Reg} = \infty\pi$. Тогда $\alpha \otimes \mathrm{Reg} = \dim(\alpha)\,\mathrm{Reg}$ [2, с. 296]. Теперь утверждение легко доказывается.

б). Пусть β — естественное представление $B \times B$ в $L^2(B)$, а γ — естественное представление $G \times B$ в $L^2(G)$. Легко видеть, что $\beta = \pi \otimes \pi$, $\gamma = R \otimes \pi$. Но, с другой стороны, $\gamma = \mathrm{Ind}_{B\times B}^{G\times B}(\beta) = \mathrm{Ind}_B^G(\pi) \otimes \pi$. Отсюда $R \otimes \pi = \mathrm{Ind}_B^G(\pi) \otimes \pi$ и утверждение следует из [2, с. 296].

3. Предложение 1.

а). *Если α и β — невырожденные представления G, то* $\alpha \otimes \beta = \infty R$.

б). *Если α принадлежит вырожденной серии, а β невырождено, то* $\alpha \otimes \beta = R$.

Доказательство. Пусть $\alpha = \mathrm{Ind}_B^G(\lambda)$, $\beta = \mathrm{Ind}_B^G(\mu)$. Несложно видеть, что $\alpha \otimes \beta = \mathrm{Ind}_B^G(\lambda \otimes \mathrm{Res}_B^G\,\mathrm{Ind}_B^G(\mu)) = \mathrm{Ind}_B^G(\lambda \otimes \pi) = \mathrm{Ind}_B^G(\dim(\lambda)\pi) = \dim(\lambda)\,R$.

4. Рассмотрим случай вырожденных серий. Пусть $\chi_{s,\varepsilon}$ — характер B, задаваемый формулой $\chi_{s,\varepsilon}(P) = |c|^{is}\,\mathrm{sgn}^{\varepsilon}(c)$, где $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2$, $\varepsilon = 0, 1$, кроме того, $\alpha_{s,\varepsilon} = \mathrm{Ind}_B^G(\chi_{s,\varepsilon})$. Введем подгруппы A и C в G, состоящие соответственно из матриц вида

$$Q = \begin{pmatrix} e & m & n \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} e & m & n \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $\alpha_{s_1,\varepsilon_1} \otimes \alpha_{s_2,\varepsilon_2}$ индуцировано с характера $\chi(Q) = |a|^{is_1}\,|d|^{is_2}\mathrm{sgn}^{\varepsilon_1}(a)\,\mathrm{sgn}^{\varepsilon_2}(d)$ группы A. Теперь заметим, что $\mathrm{Ind}_A^G(\chi) = \mathrm{Ind}_C^G(\mathrm{Ind}_A^C(\chi))$ и задача сводится к разложению $\rho = \mathrm{Ind}_A^C(\chi)$ на неприводимые представления. Это, в свою очередь, эквивалентно известной задаче о разложении представления $GL_2(\mathbb{R})$, индуцированного с диагональной подгруппы (см., например, [6], можно также повторить рассуждения п. 3 для $G = SL_2(\mathbb{R})$).

Пусть $SL_2^{\pm}(\mathbb{R})$ — подгруппа в $GL_2(\mathbb{R})$, состоящая из всех матриц с определителем ± 1, r — множество всех неприводимых представлений $SL_2^{\pm}(\mathbb{R})$, слабо содержащихся в регулярном представлении (т. е. основные и дискретные серии, см. [4]), r_0 (соответственно r_1) — подмножество в r, состоящее из представлений, тривиальных (соответственно, нетривиальных) на центре.

Очевидно, $GL_2(\mathbb{R}) = D \times SL_2^{\pm}(\mathbb{R})$, где D — группа матриц вида $g = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda > 0$. Пусть ψ_s — характер D, задаваемый формулой $\psi_s(g) = \lambda^{is}$, ρ — представление $SL_2^{\pm}(\mathbb{R})$. Через $T_{s,\rho}$ обозначим представление C, тривиальное на нильрадикале и равное $\psi_s \otimes \rho$ на $GL_2(\mathbb{R})$.

Предложение 2.

$$\alpha_{s_1,\varepsilon_1} \otimes \alpha_{s_2,\varepsilon_2} = \int_{r_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}} \mathrm{Ind}_C^G (T_{s_1+s_2,\rho})\, d\mu(\rho),$$

где мера μ *эквивалентна мера Планшереля для* $SL_2^{\pm}(\mathbb{R})$.

Замечание. Случай двух основных серий хорошо известен. Случай двух вырожденных серий частично рассмотрен в [7] (там разложено представление $SL_3(\mathbb{R})$ в $L^2(SL_3(\mathbb{R})/GL_2(\mathbb{R}))$.

1. *Вахутинский И. Я.* Унитарные неприводимые представления группы GL (3, $\mathbb{R}$) // Мат. сб.— 1968.— **75**, № 2.— С. 303—320.
2. *Диксмье Ж.* C^*-алгебры и их представления.— М. : Наука, 1974.— 399 с.
3. *Trombi P.* Tempered spectrum of real semisimple Lie group // Amer. J. Math.— 1977. **99**, N 1.— P. 57—75.
4. *Желобенко Д. П., Штерн А. И.* Представления групп Ли.— М. : Наука, 1983.— 359 с.
5. *Кириллов А. И.* О представлениях полной матричной группы // Докл. АН СССР. — 1962.— **144**, № 1.— С. 37—40.
6. *Молчанов В. Ф.* Гармонический анализ на псевдоримановых симметрических пространствах группы SL (2, $\mathbb{R}$) // Мат. сб.— 1982.— **118**, № 4.— С. 493—505.
7. *Молчанов В. Ф.* Формула Планшереля для псевдориманова симметрического пространства SL (3, $\mathbb{R}$)/GL (2, $\mathbb{R}$) // Сиб. мат. журн.— 1982.— **23**, № 5.— С. 142—151.

Моск. ин-т электрон. машиностроения

Получено 18.08.86