УДК 519.152

Г. И. Фалин

О квазивходящем потоке для системы $M/G/1/\infty$

1. Введение. Рассмотрим классическую систему массового обслуживания $M/G/1/\infty$ с ожиданием. Пусть $\xi_i(\eta_i)$ — момент начала (соответственно, окончания) обслуживания i-го вызова. Последовательность точек η_i на оси времени образует так называемый выходящий поток. Он изучен очень подробно (см., например, [1]), в то время как тесно связанный с ним поток моментов начала обслуживания $\{\xi_i\}_{i\geqslant 1}$ начали изучать совсем недавно. Поток $\{\xi_i\}_{i\geqslant 1}$ является входящим потоком для обслуживающего прибора и поэтому его естественно называть квазивходящим потоком. Изучение квазивходящего потока тем более важная задача, что часто мы можем наблюдать только моменты включения и выключения обслуживающего прибора, т. е. квазивходящий и выходящий потоки.

Этот поток введен в рассмотрение в работе [2], где, кроме того, были изучены некоторые его свойства в стационарном режиме. В настоящей работе продолжим исследование квазивходящего потока и усилим полученные в [2] результаты.

Обозначим: λ — интенсивность входящего потока, $\beta(s)$ — преобразование Лапласа—Стилтьеса функции распределения $B(x)$ времени обслуживания, $\beta_k = (-1)^k \beta^{(k)}(0)$, $\rho = \lambda\beta_1$, $S_i = \eta_i - \xi_i$ — время обслуживания i-го вызова, $I_i = \xi_i - \eta_{i-1}$ — интервал простоя прибора перед началом обслуживания i-го вызова, N_i — длина очереди непосредственно перед моментом η_i, ν_i — число требований, поступивших в систему за интервал времени (ξ_i, η_i).

2. Распределение интервалов между началами обслуживания. Пусть $A_i = \xi_{i+1} - \xi_i$. Нетрудно видеть, что $A_i = (\eta_i - \xi_i) + (\xi_{i+1} - \eta_i) = S_i + I_{i+1}$. Поэтому

$$P(A_i < x) = P(S_i + I_{i+1} < x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} P(S_i + I_{i+1} < x,\ N_{i-1} = k,\ \nu_i = l) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\int_0^x P(I_{i+1} < x - t \mid N_{i-1} = k,\ \nu_i = l,\ S_i = t)\cdot P(\nu_i = l \mid N_{i-1} = k,\ S_i =$$

$$= t)\cdot dP(S_i < t;\ N_{i-1} = k) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\int_0^x P(I_{i+1} < x - t \mid N_i = (k-1)^+ + l,$$

$$N_{i-1} = k,\ \nu_i = l,\ S_i = t)\cdot P(\nu_i = l \mid S_i = t)\cdot P(N_{i-1} = k)\,dB(t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\int_0^x P(I_{i+1} < x - t \mid N_i = (k-1)^+ + l)\,\frac{(\lambda t)^l}{l!}\,e^{-\lambda t}P(N_{i-1} = k)\,dB(t).$$

Но при $u > 0$

$$P(I_{i+1} < u \mid N_i = n) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda u}, & \text{если } n = 0, \\ 1, & \text{если } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Поэтому

$$P(I_{i+1} < x - t \mid N_i = (k-1)^+ + l) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda(x-t)}, & \text{если } k = 0 \text{ или } 1,\ l = 0, \\ 1 - & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно, $P(A_i < x) = B(x)\,[1 - e^{-\lambda x}P(N_{i-1} = 0 \text{ или } 1)]$. Отсюда видно, что зависимость распределения A_i от i связана с зависимостью распределения вложенной цепи Маркова $\{N_i\}$ от i. Поэтому если $\rho < 1$ и система находится в стационарном режиме функционирования, т. е. $P(N_i = k) = \pi_k$ является инвариантной вероятностной мерой для вложенной цепи Маркова $\{N_i\}$, то все интервалы A_i имеют одну и ту же функцию распределения

$$A(x) = B(x)\left(1 - \frac{1-\rho}{\beta(\lambda)}\,e^{-\lambda x}\right) \tag{1}$$

(здесь использованы равенства $\pi_0 = 1 - \rho$, $\pi_1 = (1-\rho)(1-\beta(\lambda))/\beta(\lambda)$)

Соотношение (1) позволяет получить исчерпывающее решение изучавшейся в [2] задачи об экспоненциальности случайных величин A в стационарном режиме функционирования.

Теорема 1. *Пусть $\lambda > 0$ и $0 < A \leqslant 1$ фиксированы. Если функция распределения времени обслуживания имеет вид*

$$B(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - Ae^{-\lambda x}}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \leqslant 0, \end{cases} \tag{2}$$

то A_i экспоненциально распределены. Наоборот, если A_i экспоненциально распределены, то $B(x)$ имеет вид (2).

Доказательство. Случай $A = 1$ соответствует мгновенному обслуживанию, так что A_i, очевидно, экспоненциальны. Поэтому ниже будем считать, что $A < 1$. Прежде всего отметим, что $B(0) = 0$, $B(+\infty) = 1$, $B'(x) = \lambda e^{-\lambda x}(1-A)/(1 - Ae^{-\lambda x})^2 > 0$ и поэтому (2) действительно задает функцию распределения. Для среднего значения имеем $\beta_1 =$

$= \int\limits_0^\infty (1 - B(x))\,dx = -\frac{1-A}{\lambda A}\ln(1-A)$, т. е. $\rho = \lambda\beta_1 < 1$. Кроме того, $\beta(\lambda) = (1-\rho)/A$. Поэтому $(1-\rho)/\beta(\lambda) = A$ и в силу (1) $A(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

Обратно, допустим, что $A(x)$ является экспоненциальным распределением. Поскольку $EA_i = 1/\lambda$ [2], то $A(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ при $x > 0$. В силу (1) это означает, что $B(x) = \dfrac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - \dfrac{1-\rho}{\beta(\lambda)} e^{-\lambda x}}$ при $x > 0$, т. е. имеет вид (2) с $A = \dfrac{1-\rho}{\beta(\lambda)} \leqslant 1$.

Замечание. В работе [2] показано, что не существует $B(x)$ таких, чтобы A_i были экспоненциально распределены при всех $\lambda \in (0;\ 1/\beta_1)$. Однако, как мы теперь видим, существуют $B(x)$ такие, что при некотором однозначно определенном λ ($\lambda = \lim\limits_{x\to+\infty} B'(x)/(1 - B(x))$) A_i имеют показательное распределение.

3. Совместное распределение соседних интервалов между началами обслуживания. Как и при выводе формулы (1), имеем (предполагаем, что система находится в стационарном режиме функционирования)

$$P(A_i < x, A_{i+1} < y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^x\int\limits_0^y P(I_{i+1} < x - t,\ I_{i+2} < y - u \mid S_i = t,$$

$$S_{i+1} = u,\ N_{i-1} = k,\ \nu_i = l,\ \nu_{i+1} = n)\cdot P(\nu_i = l, \nu_{i+1} = n \mid S_i = t,\ S_{i+1} = u,$$

$$N_{i-1} = k)\,\pi_k dB(t)\,dB(u) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^x\int\limits_0^y P(I_{i+1} < x - t,\ I_{i+2} < y - u \mid N_i =$$

$$= (k-1)^+ + l,\ N_{i+1} = ((k-1)^+ + l - 1)^+ + n)\,\frac{(\lambda t)^l}{l!}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda u)^n}{n!}\times$$
$$\times e^{-\lambda u}\pi_k dB(t)\,dB(u).$$

Но

$$P(I_{i+1} < x - t,\ I_{i+2} < y - u \mid N_i = (k-1)^+ + l,\ N_{i+} = ((k-1)^+ + l - 1)^+ + n) =$$
$$= \begin{cases} 1 - e^{-\lambda(y-u)}, & \text{если } k = 2,\ l = n = 0, \\ 1 - (e^{-\lambda(x-t)} + e^{-\lambda(y-u)} - e^{-\lambda(x-t+y-u)}, & \text{если } k = 0 \text{ или } 1,\ l = 0,\ n = 0, \\ 1 - e^{-\lambda(x-t)}, & \text{если } k = 0 \text{ или } 1,\ l = 0,\ n \geqslant 1, \\ 1 - e^{-\lambda(y-u)}, & \text{если } k = 0 \text{ или } 1,\ l = 1,\ n = 0, \\ 1 \quad - & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поэтому

$$P(A_i < x, A_{i+1} < y) = A(x)A(y) - (\pi_0 + \pi_1)e^{-\lambda y}B(y)\times$$
$$\times\left\{\left(1 + \frac{\pi_2}{\pi_0 + \pi_1}\right)\int\limits_0^x e^{-\lambda t}dB(t) + \int\limits_0^x \lambda t e^{-\lambda t}dB(t) - B(x) - e^{-\lambda x}B(x)(1 - \pi_0 - \pi_1)\right\}.$$

Этот же метод позволяет получить и совместное преобразование Лапласа случайных величин A_i, A_{i+1}:

$$E(e^{-sA_i}e^{-rA_{i+1}}) = Ee^{-sA_i}Ee^{-rA_{i+1}} - (\pi_0 + \pi_1)\frac{r}{\lambda + r}\beta(r + \lambda)\times$$
$$\times\left\{\left(\frac{\pi_2}{\pi_0 + \pi_1} + \frac{\lambda}{\lambda + s} + (\pi_0 + \pi_1)\frac{s}{\lambda + s}\right)\beta(s + \lambda) - \lambda\beta'(s + \lambda) - \beta(s)\right\}. \quad (3)$$

Из (3) легко показать, что A_i и A_{i+1} могут быть независимы только в тривиальном случае мгновенного обслуживания ($S_i = 0$ п. н.).

Лемма. $\pi = \dfrac{\pi_2}{\pi_0+\pi_1} + \pi_0 + \pi_1 \leqslant 1$, *причем знак равенства достигается только в случае мгновенного обслуживания.*

Доказательство. Известно, что $\pi_0 = 1-\rho$, $\pi_1 = (1-\rho)(1-\beta(\lambda))/\beta(\lambda)$, $\pi_2 = (1-\rho)(1-\beta(\lambda)+\lambda\beta'(\lambda))/\beta^2(\lambda)$ (это, впрочем, легко проверить непосредственно, исходя из соотношения $N_{i+1} = (N_i - 1)^+ + \nu_i$). Поэтому $\pi = (2-\rho-\beta(\lambda)+\lambda\beta'(\lambda))/\beta(\lambda)$ и, значит, интересующее нас неравенство равносильно неравенству $f(\lambda) = 2 - \lambda\beta_1 - 2\beta(\lambda) + \lambda\beta'(\lambda) \leqslant 0$. Но $f(0) = 0$, $f'(\lambda) = \beta'(0) - \beta'(\lambda) + \lambda\beta''(\lambda) = -\lambda\beta''(\theta) + \lambda\beta''(\lambda) = \lambda(\lambda-\theta)\beta'''(\xi)$ для некоторых θ и ξ, удовлетворяющих неравенствам $0 < \theta < \xi < \lambda$. Поэтому $f'(\lambda) \leqslant 0$ и, значит, $f(\lambda) \leqslant 0$. Если обслуживание не мгновенное, то $f'''(\xi) < 0$ и поэтому $f(\lambda) < 0$.

Теорема 2. *Если A_i и A_{i+1} независимы, то обслуживание мгновенно.*

Доказательство. Независимость A_i и A_{i+1} в силу (3) равносильна тому, что при всех $s \geqslant 0$

$$\frac{\pi_2}{\pi_0+\pi_1} + \frac{\lambda}{\lambda+s} + (\pi_0+\pi_1)\frac{s}{\lambda+s} = \frac{\lambda\beta'(s+\lambda)+\beta(s)}{\beta(s+\lambda)}. \tag{4}$$

Но $\lambda\beta'(s+\lambda) + \beta(s) - \beta(s+\lambda) = -\int\limits_0^\infty \lambda t e^{-(s+\lambda)t} dB(t) + \int\limits_0^\infty e^{-st} dB(t) - \int\limits_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} dB(t) = \int\limits_0^\infty e^{-(s+\lambda)t}[e^{\lambda t} - 1 - \lambda t]\, dB(t) \geqslant 0$. Поэтому правая и левая части (4) не меньше единицы. При $s \to +\infty$ отсюда получаем $\pi \geqslant 1$. Используя лемму, можно утверждать, что $\pi = 1$, а тогда обслуживание мгновенно.

В заключение отметим, что, как следует из теорем 1, 2, квазивходящий поток в системе $M/G/1/\infty$ при $B(x)$ вида (2) $(0 < A < 1)$ дает естественный пример потока с экспоненциальными интервалами между событиями, который, тем не менее, не является пуассоновским.

1. *Disney R. L.* Random flow in queueing networks: a review and critique // AIIE Trans.— 1975.— **7**, N 3.— P. 268—288.
2. *Falin G. I.* Quasi — input process in the $M/G/1/\infty$ queue // Adv. in Appl. Probab.— 1984.— **16**, N 3.— P. 695—696.

Моск. ун-т

Получено 21.10.85,
после доработки — 10.03.86