УДК 519.21

В. А. Гасаненко

Винеровский процесс в тонкой области

В настоящей работе продолжается изучение асимптотического разложения вероятности пребывания винеровского процесса в тонких трубчатых областях, начатое в работах [1—4]. В этих работах прямыми вероятностными методами исследуются минимальные условия на гладкость границ области для нахождения главного члена разложения. Известна связь этого вопроса с теорией дифференциальных уравнений в частных производных [5, 6].

Эта задача решалась и для многомерного винеровского процесса, и для диффузионного, однако вопрос о получении следующих за главным членом разложения, даже для одномерного винеровского процесса оставался открытым. Оказалось, что методами теории возмущения дифференциальных уравнений в частных производных возможно построение второстепенных членов разложения.

Пусть на промежутке $[0, T]$ заданы две функции $g_+(t) > g_-(t)$, $g_-(0) < g_+(0)$. Положим

$$P_\varepsilon = P\{\varepsilon g_-(t) < w(t) < \varepsilon g_+(t),\ t \in [0, T]\}, \quad g_1(t) = g_-(T-t),$$

$$g_2(t) = g_+(T-t), \quad G = \{(x, t): g_1(t) < x < g_2(t),\ t \in [0, T]\},$$

$$l_k(z, t) = \left(\frac{2}{g_2(t) - g_1(t)}\right)^{1/2} \sin k\pi \frac{z - g_1(t)}{g_2(t) - g_1(t)}, \quad k \geqslant 1.$$

Здесь $w(t)$ — винеровский процесс, $w(0) = 0$.

Теорема. *Если $g_+(t)$, $g_-(t)$ имеют вторые непрерывные производные, то справедливо представление*

$$P_\varepsilon = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}((g_+(T) - g_-(T))^{1/2} l_1(0, T) + \varepsilon^2\alpha) \exp\left\{-\frac{\pi^2}{2\varepsilon^2}\int_0^T (g_+(\tau) - g_-(\tau))^{-2} d\tau\right\} + O\left(\varepsilon^4 \exp\left\{-\frac{\pi^2}{2\varepsilon^2}\int_0^T (g_+(\tau) - g_-(\tau))^{-2} d\tau\right\}\right), \quad \varepsilon \to 0,$$

где $\alpha = \sum_{m \geqslant 1} \alpha_m l_m(0, T)$ и

$$\alpha_m = \begin{cases} \dfrac{16\sqrt{2}(g_+(0) - g_-(0))(g_+(T) - g_-(T))^{1/2}(2\dot{g}_-(0) - \dot{g}_+(0))\, m}{\pi^3(m^2-1)^2}, & m \text{ — четное}, \\[2ex] \dfrac{16\sqrt{2}m}{\pi^3(m^2-1)^2}(g_+(0) - g_-(0))(g_+(T) - g_-(T))^{1/2}(g_+(0) - g_-(0)), & m \text{ — нечетное}, \\[2ex] \dfrac{16\sqrt{2}}{\pi^3}\sum_{s \geqslant 2}\dfrac{s}{(s^2-1)^2}\displaystyle\int_0^T \dot{g}_-(x)(g_+(x) - g_-(x))\, dx, & m = 1. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $u(x, t)$ — решение следующей начально-краевой задачи:

$$u_{xx} = 2u_t, \tag{1}$$

$$u(g_i(t), t) = 0, \quad 0 \leqslant t < T, \quad i = 1, 2, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in (g_1(0), g_2(0)), \\ 0, & \text{если } x \bar{\in} [g_1(0), g_2(0)]. \end{cases} \tag{3}$$

Тогда, как известно [6, с. 180], $P_1 = u(0, T)$. Понятно, что $P_\varepsilon = u_\varepsilon(0, T)$, где $u_\varepsilon(x, t)$ — решение (1) — (3) с границей в (2), (3), зависящей от малого параметра ε. Получив разложение для $u_\varepsilon(x, t)$ в окрестности точки $(0, T)$, найдем разложение для P_ε. Заменой $z = x\varepsilon^{-1}$ переведем параметр из условий (2), (3) в уравнение (1). Таким образом, необходимо получить разложение решения уравнения

$$u_{zz} = 2\varepsilon^2 u_t \tag{4}$$

с граничными (2) и начальными (3) условиями. Применим регуляризирующее преобразование: $v_\varepsilon = \exp(2^{-1}\varepsilon^{-2}f(t))\, u_\varepsilon$; $f(t) \to 0$ при $t \to 0$. Тогда задача (4), (2), (3) преобразуется в эквивалентную:

$$B_\varepsilon v_\varepsilon = 0; \qquad v_\varepsilon(g_i(t), t) = 0, \quad i = 1, 2; \qquad v_\varepsilon(z, 0) = u(z, 0), \tag{5}$$

где B_ε — оператор, с областью определения $C^{2,1}(\overline{G})$, имеющий вид $B_0 - \varepsilon^2 B_1 := \partial^2/\partial z^2 + \dot{f}(t) - \varepsilon^2 2\partial/\partial t$. Полагая, что v_ε имеет вид

$$v_0 + \varepsilon^2 v_1 + \varepsilon^4 v_2 + \ldots, \tag{6}$$

и подставляя (6) в (5), для последовательного определения v_i, $i \geqslant 0$, получаем систему задач

$$B_0 v_0 = 0, \quad v_0(g_l(t), t) = 0; \qquad l = 1, 2; \qquad v_0(z, 0) = u(z, 0), \tag{7}$$

$$B_0 v_i = B_1 v_{i-1}, \quad v_i(g_l(t), t) = 0, \quad l = 1, 2; \qquad v_i(z, 0) = 0. \tag{8}$$

Задача (7) имеет нетривиальное решение лишь при равенстве $\dot{f}(t)$ одному из собственных чисел оператора B_0: $\dot{f}(t) = f_k(t) = (k\pi)^2 (g_2(t) - g_1(t))^{-2}$, $k = 1, 2, \ldots$. Следовательно, частные решения системы задач (7), (8) — решения при каждом фиксированном собственном числе оператора B_0. Пусть $v_{i,k}$ — частное решение i-й задачи в системе (7), (8) при k-м собственном числе B_0. Тогда искомое решение

$$u_\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{2i} u_i, \quad u_i = \sum_{k \geqslant 1} \exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^t f_k(x)\, dx\right\} v_{i,k}. \tag{9}$$

Из (9) заключаем, что каждое частное решение должно удовлетворять граничным условиям, а их сумма — начальным.

В дальнейшем снабдим индексом k операторы B_0, B_1 при k-м собственном числе.

Рассмотрим первую задачу (7): $B_{0,k} v_{0,k} = 0$, $v_{0,k}(g_l(t), t) = 0$, $l = 1, 2$. Решение имеет вид $v_{0,k}(z, t) = a_k(t)\, l_k(z, t)$. С учетом (9) получаем

$$u_0(z, t) = \sum_{k \geqslant 1} \exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^t f_k(x)\, dx\right\} a_k(t)\, l_k(z, t). \tag{10}$$

Так как $u_0(z, 0) = 1$ при $g_1(0) < z < g_2(0)$, то из (10) следует, что $a_k(0)$ есть разложение единицы по функциям $l_k(z, 0)$, $k \geqslant 1$: $a_k(0) = 2\sqrt{2}(k\pi)^{-1} \times (g_2(0) - g_1(0))^{1/2}$, если k — нечетно, и $a_k(0) = 0$ при четном k.

Функции $a_k(t)$ определяются из условия разрешимости следующих задач вида (8).

При известном $v_{0,k}$ функция $v_{1,k}$ — решение задачи

$$B_{0,k} v_{1,k} = 2\dot{a}_k(t)\, l_k(z, t) + 2a_k(t)\frac{\partial}{\partial t}(l_k(z, t)), \tag{11}$$

$$v_{1,k}(g_l(t), t) = 0, \quad l = 1, 2; \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{12}$$

По альтернативе Фредгольма (11), (12) имеет решение, если правая часть (11) ортогональна всем нетривиальным решениям самосопряженной краевой задачи $B_{0,k}v_{1,k} = 0$; $v_{1,k}(g_l(t), t) = 0$, $l = 1, 2$ (т. е. функции $l_k(z, t)$):

$$\int\limits_{g_1(t)}^{g_2(t)} (\dot{a}_k l_k^2 + a_k l_{k,t} l_k)\, dz = 0$$

тождественно для всех $t \in [0, T]$. Последнее влечет $\dot{a}_k(t) \equiv 0$. Поиск решения задач вида (8) при фиксированном k однотипен; полностью его проведем для $i = 1$. Все частные решения $v_{i,k}$, $i \geqslant 1$, будем определять в виде

$$v_{i,k} = \sum_{m \geqslant 1} c_{m,k}^{(i)}(t)\, l_m. \tag{13}$$

Решение состоит в процедуре построения коэффициентов $c_{m,k}^{(i)}(t)$. Рассмотрим случай $i = 1$, верхний индекс в $c_{m,k}^{(1)}(t)$ опустим. Из (11), (13) получим равенство

$$\sum_{m \geqslant 1} c_{m,k}(t)\,(f_m(t) - f_k(t))\, l_m(z, t) = a_k B_1 l_k(z, t). \tag{14}$$

Для определения коэффициента при l_m умножим левую и правую часть на l_m и проинтегрируем на промежутке $[g_1(t), g_2(t)]$. В силу определения функций l_m получим

$$c_{m,k}(t) = \begin{cases} (f_m(t) - f_k(t))^{-1} a_k \int\limits_{g_1(t)}^{g_2(t)} l_m B_1 l_k dz, & \text{если } s \neq k, \\ c_k(t), & \text{если } s = k. \end{cases} \tag{15}$$

Коэффициенты $c_k(t)$, $k \geqslant 1$, при каждом k должны обеспечить разрешимость задач (8), а сумма их — удовлетворять начальному условию.

При известном $v_{1,k}$ условие разрешимости уравнения для $v_{2,k}$ имеет вид

$$\int\limits_{g_1(t)}^{g_2(t)} l_k B_1 v_{1,k} dz = \int\limits_{g_1(t)}^{g_2(t)} l_k \sum_{m \geqslant 1} \dot{c}_{m,k} l_m dz + \sum_{m \geqslant 1} c_{m,k}(t) \int\limits_{g_1(t)}^{g_2(t)} l_k \dot{l}_m dz = 0,$$

откуда следует

$$c_k(t) = -\int\limits_0^t \sum_{s \neq k} c_{s,k}(t) \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} l_k B_1 l_s dz + c_k(0).$$

Константы $c_k(0)$ определим через начальное условие для u_1:

$$u_1(z, 0) = \sum_{k \geqslant 1} v_{1,k}(z, 0) = \sum_{k \geqslant 1} \sum_{m \geqslant 1} c_{m,k}(0)\, l_m(z, 0) = 0. \tag{16}$$

Далее, проинтегрируем (16) с весом $l_s(z, 0)$ на промежутке $[g_1(0), g_2(0)]$:

$$\int\limits_{g_1(0)}^{g_2(0)} \sum_{k \geqslant 1} \sum_{m \geqslant 1} c_{m,k}(0)\, l_m(z, 0)\, l_s(z, 0)\, dz = \sum_{k \geqslant 1} \sum_{m \geqslant 1} c_{m,k}(0)\, \delta_{ms} = 0$$

(δ_{ms} — символ Кронекера), следовательно,

$$c_{s,s}(0) = -\sum_{k \neq s} c_{s,k}(0). \tag{17}$$

Теперь для определения второго члена разложения P_ε достаточно вычислить $v_{1,1}(0, T)$. После несложных вычислений в (15), (17) получим

$$c_{m,1}(t)=\begin{cases}(f_m(t)-f_1(t))^{-1}a_1\dfrac{8(2\dot g_1(t)-\dot g_2(t))m}{(g_2(t)-g_1(t))(m^2-1)}, & \text{если } m \text{ — четное},\\ (f_m(t)-f_1(t))^{-1}a_1\dfrac{8(\dot g_2(t)-\dot g_1(t))m}{(g_2(t)-g_1(t))(m^2-1)}, & \text{если } m\neq 1,\ m \text{ — нечетное},\\ \dfrac{16\sqrt{2}}{\pi^3}\sum\limits_{s\geqslant 2}\dfrac{s}{(s^2-1)^2}\int\limits_0^t \dot g_1(x)(g_2(x)-g_1(x))\,dx, & m=1,\end{cases}$$

откуда следует утверждение теоремы.

В заключение оценим остаточный член разложения $v_\varepsilon = u_\varepsilon - u_0 - u_1\varepsilon^2$. Заметим, что в силу построений v_ε есть единственное решение задачи

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-2\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t}\right)v_\varepsilon=\varepsilon^4\sum_{k\geqslant 1}\exp\left\{\frac{1}{2\varepsilon^2}\int\limits_0^t f_k(x)\,dx\right\}B_1 v_{1,k},\quad v_\varepsilon(z,0)=0;$$

$$g_1(0)<z<g_2(0);\qquad v_\varepsilon(g_l(t),t)=0,\quad l=1,2;\qquad 0\leqslant t<T. \tag{18}$$

Получим априорную оценку решения (11) в окрестности точки $(0, T)$. Оценку проведем в полукруге Q_ε с центром в точке $(0, T)$ и радиусом ε^2 так, что $Q_\varepsilon\subset G$. Таким образом, скорость вырождения левой части (18) совпадает со скоростью сжатия полукруга в точку $(0, T)$.

Сделаем замену $v_\varepsilon=\exp(\lambda t)\mu_\varepsilon$, $\lambda>0$, тогда

$$\mu_{\varepsilon,zz}-2\lambda\varepsilon^2\mu_\varepsilon-2\varepsilon^2\mu_{\varepsilon,t}=e^{-\lambda t}\varepsilon^4F_\varepsilon(z,t). \tag{19}$$

Здесь $F(z,t)$ — сумма из (18).

Оценим максимальное значение μ_ε в Q_ε. Пусть (z_0, t_0) — точка максимума, тогда в этой точке $\mu_{\varepsilon,zz}\leqslant 0$, $\mu_{\varepsilon,t}=0$. Из (19) имеем $\mu_\varepsilon(z_0,t_0)\leqslant$ $\leqslant e^{-\lambda t_0}\dfrac{\varepsilon^2}{2\lambda}(-F_\varepsilon(z_0,t_0))$. Следовательно,

$$v_\varepsilon(0,T)\leqslant\frac{\varepsilon^2}{2\lambda}\max_{Q_\varepsilon}e^{\lambda(T-t)}(-F_\varepsilon(z,t)). \tag{20}$$

Очевидно, главный член оценки (20) имеет вид

$$A_\varepsilon=\frac{\varepsilon^2}{2\lambda}\max_{Q_\varepsilon}\exp\left(\lambda\left(T-t\right)-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t f_1(x)\,dx\right)(-B_1v_{1,1}(z,t)). \tag{21}$$

Пусть в Q_ε $B_1v_{1,1}\geqslant 0$, тогда

$$A_\varepsilon\sim\frac{\varepsilon^2}{2\lambda}\min_{Q_\varepsilon}\exp\left(\lambda(T-t)-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t f_1(x)\,dx\right)(-B_1v_{1,1}(z,t))=$$

$$=\frac{\varepsilon^2}{2\lambda}\exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon^2}\int\limits_0^T f_1(x)\,dx\right). \tag{22}$$

Если $B_1v_{1,1}\leqslant 0$ в Q^ε, то

$$A_\varepsilon\sim\frac{\varepsilon^2}{2\lambda}\max_{Q_\varepsilon}\exp\left(\lambda(T-t)-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^T f_1dx+\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_t^T f_1dx\right)=$$

$$=\frac{\varepsilon^2}{2\lambda}\exp\left(\lambda\varepsilon^2-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^T f_1dx+\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{T-\varepsilon^2}^T f_1dx\right). \tag{23}$$

Параметр λ выберем из условия минимизации одновременно (22), (23). Таким образом, $\lambda=\varepsilon^{-2}$ и $A_\varepsilon=O\left(\varepsilon^4\exp\left(-\dfrac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^T f_1(x)\,dx\right)\right)$.

Минимальное значение v_ε в Q_ε оценивается аналогично.

1. *Сытая Г. Н.* К вопросу об асимптотике винеровской меры малых сфер в равномерной метрике // Аналитические методы в теории вероятностей.— Киев : Наук. думка, 1979.— С. 95—98.
2. *Нагаев С. В.* Об асимптотике винеровской меры узкой полосы // Теория вероятностей и ее применения.— 1981.— **26**, № 3.— С. 639.
3. *Новиков А. А.* О малых уклонениях гауссовских процессов // Мат. заметки.— 1981.— **29**, № 2.— С. 291—302.
4. *Могульский А. А.* Метод Фурье для нахождения асимптотики малых уклонений винеровского процесса // Сиб. мат. журн.— 1982.— **23**, № 3.— С. 161—174.
5. *Fujita T., Shin-ichi Kotani.* The Onsager — Mashlup function for diffusion processes // J. Math. Kyoto Univ.— 1978. — **22**, N 1.— P. 115—130.
6. *Скороход А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями.— М.: Наука, 1964.— 278 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 07.02.86