УДК 517.5

А. И. Степанец

Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси

1. Предварительные сведения. Пусть $\psi(v)$ — функция, непрерывная при всех $v \geqslant 1$ и β — любое фиксированное действительное, $\beta \in R$. Положим

$$\tau(v) = \tau(v; \psi) = \begin{cases} \psi(1)\, v, & 0 \leqslant v \leqslant 1, \\ \psi(v), & v \geqslant 1, \end{cases} \tag{1}$$

$$\hat{\tau}(t) = \hat{\tau}(t; \psi) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \tau(v) \cos(vt + (\beta\pi/2))\, dv \tag{2}$$

и через $\Phi_\beta^\psi \mathfrak{N}$ обозначим множество функций $f(x)$, представимых равенством

$$f(x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\, \hat{\tau}(t)\, dt, \tag{3}$$

в котором A_0 — некоторая постоянная, $\varphi \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество функций, заданных на R, а интеграл понимается как предел

$$\lim_{a \to \infty} \int\limits_{-a}^{a} \ldots .$$

В дальнейшем предполагается, что $\psi(\cdot)$ берутся из множества $\mathfrak{M}$ выпуклых вниз при всех $v \geqslant 1$, исчезающих на бесконечности функций. Кроме того, если $\beta \neq 0$, то будем считать, что величина

$$A(\psi) = \int\limits_1^\infty \frac{\psi(t+1)}{t}\, dt \tag{4}$$

конечна. Подмножество таких функций из $\mathfrak{M}$ обозначим через F.

Если $\psi \in F$, то $\forall \beta \in R$, как показано в [1, с. 108], преобразование $\tilde{\tau}(t; \psi)$ суммируемо на всей оси:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{\tau}(t; \psi)|\, dt < \infty. \tag{5}$$

Это остается справедливым [2], с. 757] $\forall \psi \in \mathfrak{M}$ при $\beta = 0$. Учитывая эти факты, из (3) заключаем, что при $\psi \in F$ $\forall \beta \in R$ или же $\forall \psi \in \mathfrak{M}$ и $\beta = 0$ в случае, когда $\mathfrak{N}$ есть подмножество множества M с конечной нормой $\|\varphi\|_M = \operatorname{ess\,sup} |\varphi(t)|$, классы $\Phi_\beta^\psi \mathfrak{N}$ состоят из функций $f(\cdot)$, непрерывных

$\forall x \in (-\infty, \infty)$. Если к тому же $\varphi(\cdot)$ — функции 2π-периодические, то $\Phi_\beta^\psi \mathfrak{N}$ переходят в классы $C_\beta^\psi \mathfrak{N}$ непрерывных 2π-периодических функций $(\cdot)$, (ψ, β)-производные $f_\beta^\psi(\cdot)$ которых находятся в $\mathfrak{N}$. В самом деле, в [1, с. 110] показано, что $\forall \psi \in F$ и $\forall f \in C_\beta^\psi M$ в каждой точке x

$$\rho_n(f; x) = f(x) - S_{n-1}(f; x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x + t/n)\,\hat{\tau}_n(t)\,dt, \quad n \in N, \tag{6}$$

где $S_{n-1}(f; x)$ — частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f(x)$, $\hat{\tau}_n(t)$ — преобразование вида (2) функции

$$\tau_n(v) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant v \leqslant 1 - 1/n, \\ 1 + n(v-1)\psi(n), & 1 - 1/n \leqslant v \leqslant 1, \\ \psi(nv), & v \geqslant 1. \end{cases} \tag{7}$$

В частности, при $n = 1$ $\tau_1(v) \equiv \tau(v; \psi)$ и тогда

$$f(x) - S_0(f; x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x + t)\,\hat{\tau}(t)\,dt. \tag{8}$$

Такое же равенство справедливо $\forall \psi \in \mathfrak{M}$ при $\beta = 0$ [2, с. 759]. Сопоставляя соотношения (8) и (3), получаем требуемое утверждение. Используя соответствующие утверждения из [3], аналогично убеждаемся, что если $\varphi(\cdot)$ — 2π-периодическая суммируемая функция, то в рассматриваемом случае $\Phi_\beta^\psi \mathfrak{N}$ переходят в классы $L_\beta^\psi \mathfrak{N}$. В периодическом случае, если выполнено (3), то почти всюду $\varphi(\cdot) = f_\beta^\psi(\cdot)$. В связи с этим всякую функцию, эквивалентную функции $\varphi(\cdot)$ из (3) по-прежнему будем называть (ψ, β)-производной функции $f(\cdot)$ и обозначать ее $f_\beta^\psi(\cdot)$.

В качестве приближающих агрегатов для функций $f(\cdot)$ из классов $\Phi_\beta^\psi \mathfrak{N}$ будем использовать функции

$$F_\sigma(f; x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x + t)\,\hat{\tau}_\sigma(t)\,dt, \tag{9}$$

где σ — любое неотрицательное число, а $\hat{\tau}_\sigma(t)$ — преобразование Фурье функции

$$\tau_\sigma(v) = \begin{cases} \tau(v; \psi), & 0 \leqslant v \leqslant \sigma - 1, \\ \psi(v) - [v - (\sigma - 1)]\,\psi(\sigma), & \sigma - 1 \leqslant v \leqslant \sigma, \\ 0, & v \geqslant \sigma, \end{cases} \tag{10}$$

так что

$$\hat{\tau}_\sigma(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\sigma \tau_\sigma(v) \cos(vt + \beta\pi/2)\,dv. \tag{11}$$

Функции $F_\sigma(f; t)$ естественно назвать функциями или операторами Фурье, поскольку если σ — натуральное число, а $f_\beta^\psi(\cdot)$ — 2π-периодическая суммируемая функция, то $F_\sigma(f; t)$ — частная сумма порядка $\sigma - 1$ ряда Фурье $S[f]$ функции $f(\cdot)$, т. е. $F_\sigma(f; x) \equiv S_{\sigma-1}(f; x)$. В этом проще всего убедиться, когда $f_\beta^\psi \in M$ путем вычисления коэффициентов Фурье функции $F_\sigma(f; x)$, которая, очевидно, в рассматриваемом случае будет 2π-периодической и непрерывной, или же воспользоваться доказанным в [1, с. 107] фактом, заключающимся в том, что если $\psi \in F$, $f \in L_\beta^\psi M$,

$$\mathcal{J}_{\beta,n}^\psi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x + t/n)\,\hat{\nu}(t)\,dt, \quad n \in N, \quad x \in R, \tag{12}$$

где

$$\hat{\nu}(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \nu(v) \cos(vt + \beta\pi/2)\,dv,$$

а $\nu(v)$ непрерывна при всех $v \in [0, \infty)$, то $\forall v \geqslant 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(vt + \beta\pi/2)\, \hat{\nu}(t)\, dt = \nu(v) \qquad (1$$

и выполняется равенство

$$S\,]\mathcal{J}^{\psi}_{\beta,n}] = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(k/n) \frac{1}{\psi(k)} A_k(f; x), \qquad (1$$

где

$$A_k(f; x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad k = 0, 1, 2 \ldots, \qquad (1$$

a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции $f(\cdot)$. Чтобы из (14) получить тр буемое утверждение, достаточно положить $\nu(v) = \tau_n(v)$ и заметить, что этом случае $\mathcal{J}^{\psi}_{\beta,1}(x) \equiv F_n(f; x) - A_0$.

В теории целых функций хорошо известно следующее утвержден Пусть

$$g(x) = \int_{-\sigma}^{\sigma} \tau(v)\, e^{ixv} dv,$$

где $\tau(v)$ абсолютно непрерывна, $\tau(-\sigma) = \tau(\sigma)$, $\tau'(v) \in L_2(-\sigma, \sigma)$. Тог если $h(t)$ такова, что отношение $h(x)/(1 + |x|)$ либо принадлежит L_2 (— ∞), либо $L(-\infty, \infty)$, то свертка

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x+t)\, g(t)\, dt$$

принадлежит множеству E_σ целых функций экспоненциального типа (поря ка), не превышающего σ и, кроме того, отношение $\varphi(x)/(1 + |x|)$ принадл жит $L_2(-\infty, \infty)$ (см; например, [4, с. 228]). Учитывая этот факт, закл чаем, что если $f^{\psi}_{\beta} \in M$ и $\psi \in \mathfrak{M}$, то $F_\sigma(f; x)$ — целая функция экспоненциал ного типа $\leqslant \sigma$, т. е. $F_\delta(f; \cdot) \in E_\sigma$.

2. Асимптотические представления уклонений. Обозн чим через $\rho_\sigma(f; x)$ отклонение функций $F_\sigma(f; x)$ от $f(x)$, $f \in \Phi^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Тог учитывая формулы (3) и (9), при любых $\psi \in F$ и $\beta \in R$ и при любых $\psi \in$ и $\beta = 0$ находим

$$\rho_\sigma(f; x) = f(x) - F_\sigma(f; x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}(x+t)\, \hat{r}_\sigma(t)\, dt, \qquad (1$$

где $\hat{r}_\sigma(t) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\infty} r_\sigma(v) \cos(vt + \beta\pi/2)\, dv$ и

$$r_\sigma(v) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant v \leqslant \sigma - 1, \\ (v - (\sigma - 1))\, \psi(\sigma) & \sigma - 1 \leqslant v \leqslant \sigma, \\ \psi(v), & v \geqslant \sigma, \end{cases} \qquad (1$$

так что

$$\hat{r}_\sigma(t) = \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{\sigma-1}^{\sigma} (v - (\sigma - 1)) \cos(vt + \beta\pi/2)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\sigma}^{\infty} \psi(v) \cos(vt + \beta\pi/2)\, dv \overset{\mathrm{df}}{=} \mathcal{J}_1(\sigma; t) + \mathcal{J}_2(\sigma; t). \qquad (1$$

Выполняя интегрирование и производя элементарные преобразования, име

$$\mathcal{J}_1(\sigma; t) = \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \left(\frac{\sin(\sigma t + \beta\pi/2)}{t} - \frac{2 \sin(t/2)}{t^2} \sin(\sigma t - t/2 + \beta\pi/2) \right). \qquad ($$

или

$$\mathcal{I}_1(\sigma, t) = \frac{\psi(\sigma)}{\pi}\left(\frac{t - \sin t}{t^2}\sin(\sigma t + \beta\pi/2) + \frac{1 - \cos t}{t^2}\cos(\sigma t + \beta\pi/2)\right), \tag{20}$$

$$\mathcal{I}_2(\sigma; t) = -\frac{\psi(\sigma)}{\pi t}\sin(\sigma t + \beta\pi/2) - \frac{1}{\pi t}\int_0^\infty \psi'(v)\sin(vt + \beta\pi/2)\,dv \overset{\mathrm{df}}{=}$$

$$\overset{\mathrm{df}}{=} -\frac{\psi(\sigma)}{\pi t}\sin(\sigma t + \beta\pi/2) - \frac{1}{\pi}\mathcal{I}_3(\sigma; t). \tag{21}$$

Эти формулы будут использованы в дальнейшем. В качестве множеств $\mathfrak{N}$ возьмем единичный шар S_∞ в пространстве M

$$S_\infty \overset{\mathrm{df}}{=} S_M = \{\varphi : \operatorname{esssup}|\varphi(t)| \leqslant 1\} \tag{22}$$

и тогда положим $\Phi^\psi_\beta S_\infty = \Phi^\psi_{\beta,\infty}$, а также классы $H_\omega = \{\varphi : |\varphi(t) - \varphi(t')| \leqslant \leqslant \omega(|t - t'|)$, где $\omega = \omega(t)$ — фиксированный модуль непрерывности.

Докажем сначала такое утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\psi \in F$ и $\alpha = \alpha(\sigma)$ — произвольная функция, непрерывная при всех $\sigma \geqslant 1$ и такая, что $\sigma\alpha(\sigma) \geqslant \alpha_0 > 0$. Тогда, если $f \in \in \Phi^\psi_{\beta,\infty}$, то $\forall x$ и $\forall \sigma \geqslant 1$*

$$\rho_\sigma(f; x) = \nu_\alpha \frac{\psi(\sigma)}{\pi}\int\limits_{m_\alpha \leqslant |t| \leqslant M_\alpha} f^\psi_\beta(x + t)\frac{\sin(\sigma t + \beta\pi/2)}{t}\,dt + b^\psi_\sigma(\alpha; f; x), \tag{23}$$

где $m_\alpha = \min(\alpha(\sigma), 1)$, $M_\alpha = \max(\alpha(\sigma), 1)$, $\nu_\alpha = \operatorname{sign}(\alpha(\sigma) - 1)$ и

$$|b^\psi_\sigma(\alpha; f; x)| \leqslant K_1(\psi(\sigma) + Q_\sigma(\alpha; \psi)). \tag{24}$$

Если же $f \in \Phi^\psi_\beta H_\omega$, то $\forall x$ и $\forall \sigma \geqslant 1$

$$\rho_\sigma(f; x) = -\nu_\alpha \frac{\psi(\sigma)}{\pi}\int\limits_{m_\alpha \leqslant |t| \leqslant M_\alpha} \varphi(x; t)\frac{\sin(\sigma t + \beta\pi(2)}{t}\,dt + d^\omega_\sigma(\alpha; f; x), \tag{25}$$

где

$$\varphi(x, t) = f^\psi_\beta(x) - f^\psi_\beta(x + t),$$

$$|d^\psi_\sigma(\alpha; f; x)| \leqslant K_2(\psi(\sigma) + Q_\sigma(\alpha; \psi))\,\omega(1/\sigma). \tag{26}$$

Величина $Q_\sigma(\alpha; \psi)$ определяется формулой

$$Q_\sigma(\alpha; \psi) = \int\limits_{1/\alpha(\sigma)} \frac{\psi(t + \sigma)}{t}\,dt + \int\limits_{\alpha(\sigma)}^\infty t^{-1}(\psi(\sigma) - \psi(\sigma + 1/t))\,dt, \tag{27}$$

а K_1 и K_2 — постоянные, которые могут зависеть только от функции $\psi(\cdot)$.

Доказательство. В периодическом случае эта теорема доказана в [1] (см. также [5], гл. 3). Схема предложенного там доказательства в общем годится и для доказательства теоремы 1. Основное различие обусловлено тем, что в периодическом случае главные значения интегралов вида

$$\int\limits_{|t| \geqslant a > 0} f^*_\beta(x + t)\begin{Bmatrix}\sin t\\ \cos t\end{Bmatrix}\frac{dt}{t}$$

конечны. В общем случае такого, разумеется, быть не может, значит и нужные оценки придется получать другим путем.

Поскольку $r_\sigma(0) = 0$, то (см. (13))

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \hat{r}_\sigma(t)\,dt = 0.$$

Поэтому в силу (16)

$$\rho_\sigma(f; x) = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x; t)\, \hat{r}_\sigma(t)\, dt. \tag{28}$$

Отправляясь от этой формулы, полагаем

$$B_\sigma^\psi(\alpha; f; x) = -\nu_\alpha \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int\limits_{m_\alpha \leqslant |t| \leqslant M_\alpha} \varphi(x; t)\, \frac{\sin(\sigma t + \beta\pi/2)}{t}\, dt, \tag{29}$$

$$P_\sigma^\psi(\alpha; f; x) = -\int\limits_{|t| \leqslant \alpha(\sigma)} \varphi(x, t)\, \mathcal{J}_2(\sigma; t)\, dt,$$

$$R_\sigma^\psi(\alpha; f; x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \geqslant \alpha(\sigma)} \varphi(x; t)\, \mathcal{J}_3(\sigma; t)\, dt, \tag{30}$$

$$\gamma_\sigma(f; x) = -\int_{-1}^{1} \varphi(x; t)\, \mathcal{J}_1(\sigma; t)\, dt,$$

$$\delta_\sigma(f; x) = \frac{2\psi(\sigma)}{\pi} \int\limits_{|t| \geqslant 1} \varphi(x; t)\, \frac{\sin t/2}{t} \sin(\sigma t - t/2 - \beta\pi/2)\, dt. \tag{31}$$

В этих обозначениях равенство (28) в силу формул (19)—(21) принимает вид

$$\rho_\sigma(f; x) = B_\sigma^\psi(\alpha; f; x) + P_\sigma^\psi(\alpha; f; x) + R_\sigma^\psi(\alpha; f; x) + \gamma_\sigma(f; x) + \delta_\sigma(f; x) \tag{32}$$

и оно выполняется $\forall f \in \Phi_\beta^\psi M,\ \psi \in F,\ \beta \in R,\ \sigma \geqslant 1,\ x \in R$.

Получим оценки сверху последних четырех слагаемых этого равенства на классах $\Phi_{\beta,\infty}^\psi$ и $\Phi_\beta^\psi H_\omega$. Начнем с величины $R_\sigma^\psi(\alpha; f; x)$. Производя элементарные преобразования, имеем

$$R_\sigma^\psi(\alpha; f; x) = \frac{\sigma}{\pi} \int\limits_{|t| \geqslant \sigma\alpha(\sigma)} \varphi(x; t/\sigma)\, t^{-1} \int_1^\infty \psi'(\sigma v) \sin(vt + \beta\pi/2)\, dv dt.$$

Такой интеграл в случае, когда $f_\beta^\psi(\cdot)$ — 2π-периодическая функция и σ — натуральное число, $\sigma \in N$, изучался в [1, с. 115—119], где было показано, что $\forall f \in \Phi_\beta^\psi H_\omega$

$$|R_\sigma^\psi(\alpha; f; x) \leqslant K_1(\psi(\sigma) + R_\sigma(\alpha; \psi))\, \omega(1/\sigma) \tag{33}$$

и $\forall f \in \Phi_{\beta,\infty}^\psi$

$$|R_\sigma^\psi(\alpha; f; x)| \leqslant K_2(\psi(\sigma) + R_\sigma(\alpha; \psi)), \tag{33'}$$

где K_1 и K_2 — постоянные, которые, возможно, зависят только от $\psi(\cdot)$ и от $\alpha(\cdot)$, а

$$R_\sigma(\alpha; \psi) = \int_{\alpha(\sigma)}^{\infty} t^{-1}(\psi(\sigma) - \psi(\sigma - 1/t))\, dt. \tag{34}$$

При получении оценок (33) и (33′) в [1] периодичность функции $f(\cdot)$ и тот факт, что $\sigma \in N$, по существу нигде не использовались. Поэтому эти неравенства будут верны соответственно $\forall f \in \Phi_\beta^\psi H_\omega$ и $f \in \Phi_{\beta,\infty}^\psi$ при любом $\sigma \geqslant 1$. Тем самым мы получаем искомые оценки величин $R_\sigma^\psi(\alpha; f; x)$. Точно так же, с учетом оценок величин $P_\sigma^\psi(\alpha; f; x)$ в [1, с. 119—121] приходим к заключению, что $\forall f \in \Phi_\beta^\psi H_\omega$

$$|P_\sigma^\psi(\alpha; f; x)| \leqslant K_1(\psi(\sigma) + P_\sigma(\alpha; \psi))\, \omega(1/\sigma) \tag{35}$$

и $\forall f \in \Phi_{\beta,\infty}^\psi$

$$|P_\sigma^\psi(\alpha; f; x)| \leqslant K_2(\psi(\sigma) + P_\sigma(\alpha; \psi)), \tag{35'}$$

где

$$P_\sigma(\alpha;\psi)=\int\limits_{1/\alpha(\sigma)}\frac{\psi(t+\sigma)}{t}\,dt. \tag{36}$$

Чтобы получить желаемые оценки величин $\gamma_\sigma(f;x)$ и $\delta_\sigma(f;x)$. будем применять метод оценок интегралов, изложенный в [6], § 4.1, суть которого базируется на следующем утверждении (см. [5], лемма 3.1.3).

Лемма 1 *Пусть $\varphi(t)$ — суммируема на $\mathcal{J}$ функция ($\varphi\in L(\mathcal{J})$. Тогда, если $\mathcal{J}=\{x:a\leqslant x\leqslant b\}$ и x_k, $k=\overline{1,N}$, $a\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_N\leqslant b$ — некоторый набор точек, для которых*

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\varphi(t)\,dt=0, \tag{37}$$

то $\forall f\in H_\omega(\mathcal{J})=\{f:|f(x)-f(x')|\leqslant\omega(|x-x'|),x,x'\in\mathcal{J}\}$

$$\left|\int\limits_a^b f(t)\varphi(t)\,dt\right|\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant x_1}|f(t)|\int\limits_a^{x_1}|\varphi(t)|\,dt+\omega(\Delta)\int\limits_{x_1}^{x_n}|\varphi(t)|\,dt+$$

$$+\max_{x_N\leqslant t\leqslant b}|f(t)|\int\limits_{x_N}^{b}|\varphi(t)|\,dt. \tag{38}$$

Если $\mathcal{J}=\{x:x\geqslant a\}$, а x_k, $k=1,2,\ldots$, $a<x_1<x_2<\ldots$ — некоторый набор точек, удовлетворяющий условию (37), *то* $\forall f\in H_\omega(\mathcal{J})$

$$\left|\int\limits_a^b f(t)\varphi(t)\,dt\right|\leqslant\max_{a\leqslant|t|\leqslant x_1}|f(t)|\int\limits_a^{x_1}|\varphi(t)|\,dt+\omega(\Delta)\int\limits_{x_1}^{\infty}|\varphi(t)|\,dt. \tag{38'}$$

Здесь и в соотношении (38) $\Delta=\sup\limits_k(x_{k+1}-x_k)$.

Используя представление (20), имеем

$$|\gamma_\sigma|f;x)|\leqslant\frac{\psi(\sigma)}{\pi}\left(\left|\int\limits_{-1}^{1}\varphi(x;t)\,\frac{t-\sin t}{t^2}\sin(\sigma t+\beta\pi/2)\,dt\right|+\right.$$

$$\left.+\left|\int\limits_{-1}^{1}\varphi(x;t)\,\frac{1-\cos t}{t^2}\cos(\sigma t+\beta\pi/2)\,dt\right|\overset{\mathrm{df}}{=}\frac{\psi(\sigma)}{\pi}(|\mathcal{J}_4(f;\sigma)|+|\mathcal{J}_5(f;\sigma)|).\right. \tag{39}$$

Сначала получим оценку для интеграла

$$\mathcal{J}_1^{(1)}(f;\sigma)=\int\limits_0^1(\varphi(x;t)\,g(t)\sin(\sigma t+\beta\pi/2)\,dt,\quad g(t)=(t-\sin t)/t^2. \tag{40}$$

При каждом фиксированном x функция $\varphi(x;t)$ принадлежит классу H_ω, а значит, и $H_\omega(0,1)$. Поэтому к интегралу в (40) можно применить лемму 1. Для этого положим

$$G(x)=\int\limits_0^x g(t)\sin(\sigma t+\beta\pi/2)\,dt$$

и считая значение σ достаточно большим, обозначим через $t_1,\ldots,t_N$ нули функции $\sin(\sigma t+\beta\pi/2)$, лежащие на промежутке $[0,1]$ и перенумерованные в порядке их возрастания. При $t\in(0,1)$ функция $g(t)$ не убывает и потому на каждом промежутке $[0,t_1]$, $[t_1,t_2]\ldots[t_{N-1},t_N]$ функция $G(x)$ один раз обратится в нуль в некоторой точке x_k, $k=0,1,\ldots,N-1$, причем $x_0=$

$= 0$. Понятно, что $\forall k = \overline{0, N-2}$

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} g(t) \sin(\sigma t + \beta\pi/2)\, dt = 0.$$

Применяя лемму 1 (когда $\mathcal{J} = [0, 1]$, $f(t) = \varphi(x, t)$, $\varphi(t) = g(t) \sin(\sigma t + \beta\pi/2)$, $\forall f \in \Phi_\beta^\psi H_\omega$ получим

$$|\mathcal{J}_4^{(1)}(f; \sigma)| \leqslant \omega(\Delta) \int\limits_0^{x_{N-1}} |g(t)|\, dt + \max_{x_{N-1} \leqslant t \leqslant 1} |\varphi(x; t)| \int\limits_{x_{N-1}}^1 |g(t)|\, dt \qquad (41)$$

В рассматриваемом случае $\Delta = \max\limits_{k \in N-1} (x_{k+1} - x_k) \leqslant \max\limits_k (t_{k+2} - t_k) = 2\pi/\sigma$, $1 - x_{N-1} \leqslant \pi/\sigma$, $\varphi(x; 0) = 0$. Поэтому, учитывая, что $\forall \lambda > 0$ $\omega(\lambda t) \leqslant (\lambda + 1)\, \omega(t)$, находим

$$|\mathcal{J}_4^{(1)}(f; \sigma)| \leqslant K\omega(1/\sigma) \int\limits_0^1 g(t)\, dt + \omega(1)\, g(1)\, \pi/\sigma \leqslant K_1 \omega(1/\sigma), \qquad (42)$$

где K_1 — абсолютная постоянная.

Аналогично получим такую же оценку и для интеграла

$$\mathcal{J}_4^{(2)}(f; \sigma) = \int\limits_{-1}^0 \varphi(x; t)\, g(t) \sin(\sigma t + \beta\pi/2)\, dt$$

и таким образом докажем, что $\forall f \in \Phi_\beta^\psi H_\omega$

$$|\mathcal{J}_4(f; \sigma)| = |\mathcal{J}_4^{(1)}(f; \sigma) + \mathcal{J}_4^{(2)}(f; \sigma)| \leqslant K\omega(1/\sigma), \qquad (43)$$

где K — абсолютная постоянная.

Функция $h(t) = (1 - \cos t)/t^2$ на промежутке $(0,1)$ не возрастает, поэтому функция

$$H(x) = \int\limits_x^1 h(t) \cos(\sigma t + \beta\pi/2)\, dt$$

на каждом промежутке $[t_1, t_2], \ldots, [t_{N-1}, t_N], [t_N, 1]$, где t_i, $i = \overline{1, N}$, — нули функции $\cos(\sigma t + \beta\pi/2)$ из $[0, 1]$, будет иметь по одному нулю x_k, причем $x_N = 1$. Это дает возможность и к интегралу $\mathcal{J}_5(f; \sigma)$ применить лемму 1, в результате чего убеждаемся, что

$$|\mathcal{J}_5(f; \sigma) \leqslant K\omega(1/\sigma), \qquad (44)$$

где K — абсолютная постоянная.

Объединяя соотношения (39), (43) и (44), видим, что $\forall f \in \Phi_\beta^\psi H_\omega$ при любом $\sigma \geqslant 1$ найдется абсолютная постоянная K такая, что

$$|\gamma_\sigma(f; x)| \leqslant K\psi(\sigma)\, \omega(1/\sigma). \qquad (45)$$

Если $f \in \Phi_{\beta,\infty}^\psi$, то $|\varphi(x, t)| = |f_\beta^\psi(x) - f_\beta^\psi(x + t)| \leqslant 2$. Функции $g(t)$ и $h(t)$ на промежутке $[-1, 1]$ также ограничены, поэтому $\forall f \in \Phi_{\beta,\infty}^\psi$ в силу (39) будем иметь

$$|\gamma_\sigma(f; x)| \leqslant K\psi(\sigma), \qquad (45')$$

где K — абсолютная постоянная. Неравенства (45) и (45′) дают искомые оценки величины $\gamma_\sigma(f; x)$.

Чтобы получить нужную оценку величины $\delta_\sigma(f; x)$, сначала представим ее в виде

$$\delta_\sigma(f; x) = \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \left(\int\limits_{|t| \geqslant 1} \varphi(x; t) \frac{\cos((\sigma - 1)\, t + \beta\pi/2)}{t^2}\, dt - \right.$$

$$-\int\limits_{|t|\geqslant 1}\varphi(x,t)\,\frac{\cos(\sigma t+\beta\pi/2)}{t^2}\,dt\Bigg)\stackrel{\mathrm{df}}{=}\frac{\psi(\sigma)}{\pi}\left(\mathcal{J}_\sigma(f;\sigma-1)-\mathcal{J}_6(f;\sigma)\right) \quad (46)$$

и получим оценку величины

$$\mathcal{J}_6^{(1)}(f;\sigma)=\int\limits_1^\infty\varphi(x;t)\,\frac{\cos(\sigma t+\beta\pi/2)}{t^2}\,dt.$$

Положим

$$C(x)=\int\limits_x^\infty\frac{\cos(\sigma t+\beta\pi/2)}{t^2}\,dt.$$

Вследствие монотонности функции t^{-2} между каждыми двумя положительными нулями функции $\cos(\sigma t+\beta\pi/2)$ находится единственный нуль функции $C(x)$. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — множество таких нулей из промежутка $x\geqslant 1$, перенумерованное в порядке их возрастания. Поскольку

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{\cos(\sigma t+\beta\pi/2)}{t^2}\,dt=0,$$

то эти точки x_k можно взять в качестве тех, которые фигурируют в лемме 1, и применить ее. В результате $\forall f\in\Phi_\beta^\psi H_\omega$ находим (см. (38′)).

$$|\mathcal{J}_6^{(1)}(f;\sigma)|\leqslant\max_{1\leqslant t\leqslant x_1}|\varphi(x,t)|\int\limits_1^{x_1}\frac{dt}{t^2}+\omega(\Delta)\int\limits_1^\infty\frac{dt}{t^2},$$

откуда сразу следует, что $\forall f\in\Phi_\beta^\psi H_\omega$ $|\mathcal{J}_6^{(1)}(f;\sigma)|\leqslant K\omega(1/\sigma)$. Понятно, что такая же оценка будет выполняться и для интеграла $\mathcal{J}_6^{(2)}(f;\sigma)$, взятого по промежутку $(-\infty,-1)$, а значит, и для интеграла $\mathcal{J}_6(f;\sigma)$. Поэтому вследствие равенства (46) $\forall f\in\Phi_\beta^\psi H_\omega$ при любом $\sigma\geqslant 1$ будет выполняться неравенство

$$|\delta_\sigma(f;x)|\leqslant K\psi(\sigma)\,\omega(1/\sigma), \quad (47)$$

где K — абсолютная постоянная.

Ясно, что $\forall f\in\Phi_{\beta,\infty}^\psi$ также найдется постоянная K такая, что

$$|\delta_\sigma(f;x)|\leqslant K\psi(\sigma). \quad (47')$$

Из сопоставления соотношений (32) — (36) и (45) — (47′) следует завершение доказательства теоремы.

3. Верхние грани уклонений $\rho_\sigma(f;x)$ на классах $\Phi_{\beta,\infty}^\psi$ и $\Phi_\beta^\psi H_\omega$. Отправляясь от теоремы 1, найдем асимптотические равенства (при $\sigma\to\infty$) для величин

$$\mathcal{E}_\sigma(\Phi_{\beta,\infty}^\psi)=\sup\{|\rho_\sigma(f;x)|: f\in\Phi_{\beta,\infty}^\psi\} \quad (48)$$

и

$$\mathcal{E}_\sigma(\Phi_\beta^\psi H_\omega)=\sup\{|\rho_\sigma(f;x)|: f\in\Phi_\beta^\psi H_\omega\}. \quad (48')$$

Теорема 2. *Пусть $\psi\in F$ и $\alpha=\alpha(\sigma)$ — произвольная функция, непрерывная при всех $\sigma\geqslant 1$ и такая, что $\sigma\alpha(\sigma)>\alpha_0>0$ $\forall\sigma\geqslant 1$. Тогда величины $\mathcal{E}_\sigma(\Phi_{\beta\infty}^\psi)$ и $\mathcal{E}_\sigma(\Phi_\beta^\psi H_\omega)$ не зависят от точки x и $\forall\sigma\geqslant 1$ выполняются равенства*

$$\mathcal{E}_\sigma(\Phi_{\beta,\infty}^\psi)=\frac{4}{\pi^2}\psi(\sigma)\,|\ln\alpha(\sigma)|+b_\sigma^\psi(\alpha), \quad (49)$$

где

$$b_\sigma^\psi(\alpha)=O(1)\,\psi(\sigma)+Q_\sigma(\alpha;\psi)), \quad (50)$$

$$\mathscr{E}_\sigma(\Phi_\beta^\psi H_\omega) = \frac{2}{\pi}\psi(\sigma) S_\sigma(\omega)\,|\ln\alpha(\sigma)| + d_\sigma^\psi(\alpha;\omega), \tag{49'}$$

$$d_\sigma^\psi(\alpha;\psi) = O(1)(\psi(\sigma) + Q_\sigma(\alpha;\psi))\,\omega(1/\sigma), \tag{50'}$$

$O(1)$ — *величины, равномерно ограниченные по* σ *и по* β; *величина* $Q_\sigma(\alpha;\psi)$ *имеет тот же смысл, что и в теореме* 1, *а*

$$S_\sigma(\omega) = \Theta_\omega \int_0^{\pi/2} \omega(2t/\sigma)\sin t\,dt, \quad 2/3 \leqslant \Theta_\omega \leqslant 1,$$

причем $\Theta_\omega = 1$, *если* $\omega = \omega(t)$ — *выпуклый модуль непрерывности.*

Доказательство. Классы $\Phi_\beta^\psi\mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ есть S_M или H_ω, инвариантны относительно сдвига аргумента: если $f \in \Phi_\beta^\psi\mathfrak{N}$, то $\forall h$ функция $f_1(x) = f(x+h)$ также принадлежит $\Phi_\beta^\psi\mathfrak{N}$. Значит, $\forall f \in \Phi_\beta^\psi\mathfrak{N}$ найдется функция $f_1 \in \Phi_\beta^\psi\mathfrak{N}$ такая, что $\rho_\sigma(f;x) = \rho_\sigma(f_1;\cdot)$. Поэтому $\mathscr{E}_\sigma(\Phi_\beta^\psi\mathfrak{N}) = \sup\limits_{f\in\Phi_\beta^\psi\mathfrak{N}} |\rho_\sigma(f;0)|$.

Отсюда сразу следует, что величины $\mathscr{E}_\sigma(\Phi_\beta^\psi\mathfrak{N})$ действительно не зависят от x. Далее, если $f \in \Phi_\beta^\psi\mathfrak{N}$, то, по определению, $f_\beta^\psi \in \mathfrak{N}$. С другой стороны, $\forall y \in \mathfrak{N}$ в классе $\Phi_\beta^\psi\mathfrak{N}$ найдется функция $f(\cdot)$ такая, что почти всюду $f_\beta^\psi(\cdot) = y(\cdot)$. Поэтому вследствие равенств (23) — (26) получаем

$$\mathscr{E}_\sigma(\Phi_{\beta,\infty}^\psi) = \sup_{\|\varphi\|_\infty\leqslant 1} \frac{\psi(\sigma)}{\pi}\left|\int\limits_{m_\alpha\leqslant|t|\leqslant M_\alpha} \varphi(t)\frac{\sin(\sigma t + \beta\pi/2)}{t}\,dt\right| + r_1(\alpha), \tag{51}$$

где

$$|r_1(\alpha)| = O(1)(\psi(\sigma) + Q_\sigma(\alpha;\psi)), \tag{52}$$

$$\mathscr{E}_\sigma(\Phi_\beta^\psi H_\omega) = \sup_{\varphi\in H_\omega} \frac{\psi(\sigma)}{\pi}\left|\int\limits_{m_\alpha\leqslant|t|\leqslant M_\alpha} (\varphi(t) - \varphi(0))\frac{\sin(\sigma t + \beta\pi/2)}{t}\,dt\right| + r_2(\alpha,\omega), \tag{51'}$$

где

$$|r_2(\alpha,\omega)| = O(1)(\psi(\sigma) + Q_\sigma(\alpha;\psi))\,\omega(1/\sigma). \tag{52'}$$

Если $\alpha(\sigma) \leqslant 1$, то повторяя рассуждения, с помощью которых доказывались в [1] леммы 5 и 7, получаем

$$\sup_{\|\varphi\|_\infty\leqslant 1}\left|\int\limits_{\alpha(\sigma)\leqslant|t|\leqslant 1} \varphi(t)\frac{\sin(\sigma t + \beta\pi/2)}{t}\,dt\right| = \frac{4}{\pi}\ln\frac{1}{\alpha(\sigma)} + O(1), \tag{53}$$

$$\sup_{\varphi\in H_\omega}\left|\int\limits_{\alpha(\sigma)\leqslant|t|\leqslant 1} (\varphi(t) - \varphi(0))\frac{\sin(\sigma t + \beta\pi/2)}{t}\,dt\right| = \frac{2}{\pi}\,s_\sigma(\omega)\ln\frac{1}{\alpha(\sigma)} + O(1)\,\omega(1/\sigma). \tag{53'}$$

Поступая аналогичным образом при $\alpha(\sigma) \geqslant 1$, также будем иметь

$$\sup_{\|\varphi\|_\infty\leqslant 1}\int\limits_{1\leqslant|t|\leqslant\alpha(\sigma)} \varphi(t)\frac{\sin(\sigma t + \beta\pi/2)}{t}\,dt\,\Bigg| = \frac{4}{\pi}\ln\alpha(\sigma) + O(1), \tag{54}$$

$$\sup_{\varphi\in H_\omega}\left|\int\limits_{1\leqslant|t|\leqslant\alpha(\sigma)} (\varphi(t) - \varphi(0))\frac{\sin(\sigma t + \beta\pi/2)}{t}\,dt\right| = \frac{2}{\pi}\,s_\sigma(\omega)\ln\alpha(\sigma) + O(1)\omega(1/\sigma). \tag{55}$$

Объединяя соотношения (51) — (55), заканчиваем доказательство теоремы.

Замечание. Если $\varphi(\cdot)$ — функция 2π-периодическая, то левые части соотношений (54) и (55) допускают соответственно оценки $O(1)$ и $O(1)\,\omega(1/\sigma)$. Поэтому в периодическом случае, т. е. когда речь идет о приближении суммами Фурье функций из классов $C_{\beta,\infty}^\psi$ и $C_\beta^\psi H_\omega$, как это показано в [1], теорема 3, в соотношениях (49) и (49′) $|\ln\alpha(\sigma)|$ заменяется на величину $\ln^+(1/\alpha(\sigma))$, где $\ln^+ t = \max(\ln t, 0)$, которая совпадает с $|\ln\alpha(\sigma)|$ только при $\alpha(\sigma) \leqslant 1$. Ниже мы увидим, что это обстоятельство является причиной того, что для достаточно быстро убывающих функций $\psi(\cdot)$ порядки величин $\mathscr{E}_n(C^\psi_\beta \mathfrak{R})$ и $\mathscr{E}_n(\Phi^\psi_\beta \mathfrak{R})$ различны. Каждой функции $\psi \in \mathfrak{M}$ поставим в соответствие пару функций $\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$ и $\mu(t) = \mu(\psi; t) = t/(\eta(t) - t)$ и через F_0 обозначим подмножество функций $\psi(\cdot)$ из F, для которых почти при всех $t \geqslant 1$ $|\eta'(t)| \leqslant K$, где K — некоторая постоянная.

В [1], лемма 8, показано, что если $\psi \in F_0$ и в качестве $\alpha(v)$ взять величину $\sigma\alpha^*(\sigma) = \mu(\psi; \sigma)/\sigma$, то при $\sigma \in N$ справедливо неравенство

$$Q_\sigma(\alpha^*; \psi) \leqslant K\psi(\sigma). \tag{56}$$

Включение $\sigma \in N$ не принципиально, т. е. эта оценка верна $\forall \sigma \geqslant 1$. Кроме того, если $\psi \in F_0$, то $\exists a_0 > 0$ такое, что $\forall \sigma \geqslant 1$ $\alpha^*(\sigma) > a_0$. Учитывая эти факты и полагая в теореме 2 $\alpha(\sigma) = \alpha^*(\sigma) = 1/(\eta(\sigma) - \sigma)$, приходим к такому утверждению.

Теорема 3. *Пусть $\psi \in F_0$. Тогда* $\mathrm{A}\sigma \geqslant 1$ *выполняются равенства*

$$\mathscr{E}_\sigma(\Phi^\psi_{\beta,\infty}) = \frac{4}{\pi^2}\psi(\sigma)|\ln(\eta(\sigma) - \sigma)| + O(1)\psi(\sigma), \tag{57}$$

$$\mathscr{E}_0(\Phi^\psi_\beta H_\omega) = \frac{2}{\pi}\psi(\sigma)S_\sigma(\omega)|\ln(\eta(\sigma) - \sigma)| + O(1)\psi(\sigma)\omega(1/\sigma), \tag{57'}$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по σ и по β; $\eta(\sigma) = \eta(\psi; \sigma) = \psi^{-1}(\psi(\sigma)/2)$, а $S_\sigma(\omega)$ — величина та же, что и в теореме 2.

Множество F_0 включает достаточно широкий диапазон функций. К примеру, F_0 принадлежат функции $\psi_r(t) = t^{-r}$, $r > 0$, которые в периодическом случае порождают известные классы Вейля — Надя, функции $\psi_{r,\alpha}(t) = t^{-r}\ln^\alpha(t + c)$, $r > 0$, $\alpha \in R$ при надлежащем выборе постоянной C; F_0 содержит также функции $e_r(t) = \exp(-\alpha t^r)$, $r > 0$, $\alpha > 1$, порождающие классы бесконечно дифференцируемых функций, которые при $r \geqslant 1$ являются аналитическими, а при $r > 1$ — целыми функциями.

Для периодических функций при $\sigma \in N$ теорема 3 доказана в [1], теорема 3‴. В этом случае в равенствах (57) и (57′) $l(\sigma) = |\ln(\eta(\sigma) - \sigma)|$ следует заменить на $l^+(\sigma) = \ln^+(\eta(\sigma) - \sigma)$. Если найдется постоянная K такая, что $\forall \sigma \geqslant 1$

$$0 < \eta(\psi, \sigma) - \sigma \leqslant K, \tag{58}$$

то величина $l^+(\sigma)$ будет также ограниченной, и тогда приближения суммами Фурье на классах $C^\psi_{\beta,\infty}$ и $C^\psi_\beta H_\omega$ будут иметь порядок соответственно $\psi(\sigma)$ и $\psi(\sigma)\omega(1/\sigma)$, т. е. (см. [5], § 5) будут по порядку совпадать с величинами наилучших полиномиальных приближений на этих классах. В то же время, как видно из равенств (57) и (57′), условие (58) в случае, когда $\eta(\psi; \sigma) - \sigma$ не ограничено снизу никаким положительным числом, уже не обеспечивает величинам $\mathscr{E}_\sigma(\Phi^\psi_{\beta,\infty})$ и $\mathscr{E}_\sigma(\Phi^\psi_\beta H_\omega)$ стремления к нулю со скоростью $\psi(\sigma)$ и соответственно $\psi(\sigma)\omega(1/\sigma)$. В частности, так будет, когда

$$\lim_{\sigma\to\infty}(\eta(\sigma) - \sigma) = 0. \tag{59}$$

Заметим, что это условие выполняется например, для функции $e_r(t) = \exp(-\alpha t^r)$, $\alpha > 1$, при любом $r > 1$, порождающей классы целых функций.

Более наглядное представление о функциях из F_0 можно получить с помощью следующих понятий. Пусть, как и раньше, $\psi \in \mathfrak{M}$, $\mu(t) = \mu(\psi; t) = t/(\eta(t) - t)$, $\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$ и K, K_i, $i = 1, 2, \ldots,$ — абсолютные постоянные. Тогда положим [7]

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_C &= \{\psi : \psi \in \mathfrak{M}, \quad 0 < K_1 \leqslant \mu(\psi; t) \leqslant K_2, \quad \forall t \geqslant 1\}, \\ \mathfrak{M}_0 &= \{\psi : \psi \in \mathfrak{M}, \quad 0 < \mu(\psi; t) \leqslant K_3, \quad \forall t \geqslant 1\}. \end{aligned} \tag{60}$$

Обозначим еще через $\mathfrak{M}_\infty$ подмножество функций $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых величина $\mu(\psi; t)$ монотонно возрастает и неограничена сверху: $\mathfrak{M}_\infty = \{\psi : \psi \in \mathfrak{M};$

$\mu(\psi; t) \uparrow \infty\}$. Отправляясь от этих определений, нетрудно проверить, что $F_0 \supset \mathfrak{M}_c \cup \mathfrak{M}_\infty$. Естественными представителями множеств $\mathfrak{M}_\infty$ являются функции $e_r(t) = \exp(-\alpha t^r)$, $r > 0$, $\alpha > 1$, множеств $\mathfrak{M}_c$ — функции $\psi_r(t) = t^{-r}, r > 0$. Множество $\mathfrak{M}_0$ включает в себя $\mathfrak{M}_c$ и содержит также медленно убывающие функции типа $\chi_r(t) = \ln^{-r}(t+e)$, $r > 0$, для которых интеграл в (4) может и не существовать.

Если $\psi \in \mathfrak{M}_c$, то в силу (60) величину $\eta(\sigma) - \sigma$ в (57) и (57′) можно заменить на σ. В частности, это возможно при $\psi_r(t) = t^{-r}$, $r > 0$. Если к тому же функция $f(\cdot)$ 2π-периодическая, то в этом случае при $\sigma \in N$ соотношения (57) и (57′) переходят в классические равенства А. Н. Колмогорова [8] и С. М. Никольского [9].

4. Уклонения $\rho_\sigma(f, x)$ на классах, порождаемых медленно убывающими функциями. Получим аналоги теорем 1 — 3, когда $\psi \in \mathfrak{M}_0$ и $\beta = 0$.

Теорема 4. *Пусть $\psi \in \mathfrak{M}_0$. Тогда, если $f \in \Phi_{0,\infty}^{\psi}$, то $\forall x$ и $\forall \sigma \geqslant 1$*

$$\rho_\sigma(f, x) = \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{-1}^{1} f_0^{\psi}(x+t) \frac{\sin \sigma t}{t}\, dt + O(1)\, \psi(\sigma). \tag{61}$$

Если же $f \in \Phi_0^{\psi} H_\omega$, то $\forall x$ и $\forall \sigma \geqslant 1$

$$\rho_\sigma(f; x) = -\frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{-1}^{1} \varphi(x; t) \frac{\sin \sigma t}{t}\, dt + O(1)\, \psi(\sigma)\, \omega(1/\sigma), \tag{61′}$$

где $\varphi(x; t) = f_0^{\psi}(x) - f_0^{\psi}(x+t)$, а $O(1)$ — величины, равномерно ограниченные по σ.

Доказательство. Выше отмечалось, что при $\beta = 0$ $\forall \psi \in \mathfrak{M}$ преобразование (2) удовлетворяет условию (5), вследствие чего классы $\Phi_0^{\psi} M$ состоят из непрерывных функций, оператор $F_\sigma(f; x)$ принадлежит E_σ и выполняется равенство (28), вследствие которого с учетом соотношений (18)—(21) находим

$$\rho_\sigma(f; x) = \frac{2\psi(\sigma)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_0^{\psi}(x+t) \frac{\sin(t/2)}{t^2} \sin(\sigma t - t/2)\, dt + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x; t)\, \mathcal{J}_3^{(0)}(\sigma; t)\, dt,$$

где

$$\mathcal{J}_3^{(0)}(\sigma; t) = \frac{1}{t} \int_{\sigma}^{\infty} \psi'(v) \sin vt\, dv,$$

Далее положим $\sigma_0 = \sigma - 1/2$,

$$R_\sigma^{\psi}(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x; t)\, \mathcal{J}_3^{(0)}(\sigma; t)\, dt, \quad \delta_\sigma^{(0)}(f; x) = \frac{2\psi(\sigma)}{\pi} \int_{|t| \geqslant 1} \varphi(x; t) \sin \frac{(t/2)}{t} \times \\ \times \sin(\sigma t - t/2)\, dt,$$

$$\mathcal{J}_7(f; \sigma) = \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{-1}^{1} \varphi(x; t) \frac{2\sin(t/2) - t}{t^2} \sin(\sigma t - t/2)\, dt.$$

Тогда

$$\rho_\sigma(f; x) = \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{-1}^{1} \varphi(x; t) \frac{\sin \sigma_0 t}{t}\, dt + R_\sigma^{\psi}(f; x) + \delta_\sigma^{(0)}(f; x) + \mathcal{J}_7(f; x). \tag{62}$$

Если $f(\cdot)$ — 2π-периодическая функция, а $\sigma \in N$, то в [2, с. 761] показано, что

$$|R_\sigma^\psi(f;x)| \leqslant \begin{cases} K\psi(\sigma) & \forall f \in \Phi_{0,\infty}^\psi \\ K\psi(\sigma)\,\omega(1/\sigma) & \forall f \in \Phi_0^\psi H_\omega. \end{cases} \tag{63}$$

При доказательстве этого неравенства в [2] периодичность функции и то, что $\sigma \in N$, по существу не использовались, поэтому оно остается верным и в рассматриваемом случае. В силу соотношений (47) и (47′) такая же оценка справедлива и для величины $|\delta_\sigma^{(0)}(f;x)|$. Учитывая монотонность функции $(2\sin(t/2)-t)/t^2$ на промежутке $(0, 1)$, как и при получении неравенства (43), убеждаемся, что оценка вида (63) справедлива и для величины $|J_7(f;t)|$. Объединяя эти оценки с равенством (62), получаем утверждение теоремы.

Подобно тому, как в [6, с. 113—122] разыскивались верхние грани интеграла Дирихле, получаем равенства

$$\sup_{f\in\Phi_{0,\infty}^\psi}\left|\frac{\psi(\sigma)}{\pi}\int_{-1}^{1} f_0^\psi(x+t)\frac{\sin\sigma t}{t}\,dt\right| = \frac{4}{\pi^2}\psi(\sigma)\ln\sigma + O(1)\,\psi(\sigma),$$

$$\sup_{f\in\Phi_0^\psi H_\omega}\left|\frac{\psi(\sigma)}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(x;t)\frac{\sin\sigma_0 t}{t}\,dt\right| = \frac{2}{\pi^2}\psi(\sigma)\,S_\sigma(\omega)\ln\sigma + O(1)\,\psi(\sigma)\,\omega(1/\sigma),$$

где $S_0(\omega)$ — та же величина, что и теореме 2. Поэтому, рассматривая верхние грани обеих частей равенств (61) и (61′), приходим к следующему утверждению.

Теорема 5. *Пусть $\varphi \in \mathfrak{M}_0$. Тогда величины $\mathscr{E}_\sigma(\Phi_{0,\infty}^\psi)$ и $\mathscr{E}_\sigma(\Phi_0^\psi H_\omega)$ не зависят от точки x и $\forall\sigma \geqslant 1$ выполняются равенства*

$$\mathscr{E}_\sigma(\Phi_{0,\infty}^\psi) = \frac{4}{\pi^2}\psi(\sigma)\ln\sigma + O(1)\,\psi(\sigma),$$

$$\mathscr{E}_\sigma(\Phi_0^\psi H_\omega) = \frac{2\psi(\sigma)}{\pi}S_\sigma(\omega)\ln\sigma + O(1)\,\psi(\sigma)\,\omega(1/\sigma),$$

в которых $O(1)$ — величины, равномерно ограниченные по σ.

1. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. Мат.— 1986.— **50**, № 1.— С. 101—136.
2. *Степанец А. И.* Приближение суммами Фурье функций с медленно убывающими коэффициентами Фурье // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 6.— С. 755—762.
3. *Степанец А. И.*, *Новикова А. К.* Приближение периодических функций суммами Фурье в интегральной метрике // Приближение периодических функций суммами Фурье.— Киев, 1984.— С. 26—54.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.43).
4. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации.— М. : Наука, 1965.— 480 с.
5. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций.— Киев : Наук. думка, 1981.— 340 с.
6. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами.— Киев : Наук. думка, 1987.— 268 с.
7. *Степанец А. И.* Модули полураспада монотонных функций и скорость сходимости рядов Фурье // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 5.— С. 618—624.
8. *Kolmogoroff A. N.* Zur Grössenordnung des Restliedes Fourierschen Reihen differenzcerbaren Functionen // Ann. Math.— 1935.— **36**.— P. 521—526.
9. *Никольский С. М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1945.— **15**.— С. 1—76.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 06.02.87