УДК 517.9

В. Гр. Самойленко, Б. Н. Филь

Алгебры симметрий вполне интегрируемых динамических систем

1. Вполне интегрируемые динамические системы. Рассмотрим на бесконечном гладком многообразии Шварца $M \simeq \simeq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$; $\mathbb{Z}_+ \ni n, m < \infty$ однородную нелинейную динамическую систему вида:

$$u_t = K[u], \tag{1}$$

где $u \in M$, $K: M \to T(M)$ — гладкое по Фреше векторное поле на M, $t \in \mathbb{R}^1$ — эволюционный параметр. Предположим, что векторное поле (1) гамильтоново, т. е. существует такой имплектический и нетеров [1—5] оператор $\mathcal{L}$: $T^*(M) \to T(M)$, что производная Ли в направлении векторного поля K

$$L_K\mathcal{L} = \mathcal{L}' \cdot K - \mathcal{L} \cdot K'^* - K' \cdot \mathcal{L} = 0, \tag{2}$$

где штрих означает производную Фреше, «*» — сопряжение относительно стандартной билинейной формы на $T^*(M) \times T(M)$. С помощью имплектического оператора $\mathcal{L}: T^*(M) \to T(M)$ можно определить скобку Пуассона $\{\cdot, \cdot\}\mathcal{L}$ на множестве $\mathcal{D}(M)$ гладких по Фреше функционалов на многообразии M. Если задана динамическая система (1), а имплектический оператор $\mathcal{L}$ неизвестен, то соотношение (2) является линейным операторным уравнением для его определения [1, 3—5].

Предположим, что уравнение нетеровости (2) обладает еще одним алгебраически независимым решением $\mathcal{M}: T^*(M) \to T(M)$, т. е. $L_K\mathcal{M} = 0$.

Определение 1. *Динамическая система* (1), *обладающая имплектической* ($\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$)*-парой нетеровых операторов, называется бигамильтоновой.*

Для бигамильтоновой динамической системы (1) операторы $\mathcal{L}^{(n)} = \mathcal{L}\Lambda^n$, где $n \in \mathbb{Z}$, $\Lambda = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}$, являются имплектическими и нетеровыми.

Определение 2. *Оператор* $\Lambda = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}: T^*(M) \to T^*(M)$ *называется градиентно-рекурсионным и удовлетворяет уравнению типа Лакса*

$$L_K\Lambda = \Lambda' \cdot K - [\Lambda, K'^*] = 0. \tag{3}$$

Соответственно, оператор $\Lambda^* = \mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}: T(M) \to T(M)$ *называется симметрийно-рекурсионным и удовлетворяет уравнению типа Лакса*

$$L_K\Lambda^* = \Lambda^{*\prime} \cdot K - [K', \Lambda^*] = 0.$$

Если оператор $\mathcal{L}^{-1}: T(M) \to T^*(M)$ существует, то имплектический оператор $\mathcal{L}$ называют косимплектическим, а оператор $\mathcal{L}^{-1}$ симплектическим. В противном случае при определении оператора $\Lambda = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}$ в роли оператора $\mathcal{L}^{-1}$ необходимо использовать решение следующего «сопряженного» к (2) уравнения нетеровости:

$$L_K(\mathcal{L}^{-1}) = (\mathcal{L}^{-1})' \cdot K + K'^* \cdot (\mathcal{L}^{-1}) + (\mathcal{L}^{-1}) \cdot K' = 0. \tag{4}$$

Определение 3. *Оператор* Λ^*: $T(M) \to T(M)$ *называется наследственно рекурсионным, если билинейный оператор* $[\Lambda^{*\prime}, \Lambda^*]$: $T(M) \times T(M) \to T(M)$ *симметричен.*

Оператор $\Lambda^*: T(M) \to T(M)$ наследственно рекурсионный, если имплектическая ($\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$)-пара согласована [5—8], т. е. $(\mathcal{L} + \lambda\mathcal{M}): T^*(M) \to T(M)$— имплектический оператор при всех $\lambda \in \mathbb{R}^1$. Имплектическая ($\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$)-пара нетеровых операторов согласована тогда и только тогда, когда оператор $\mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}$ имплектичен и нетеров. При этом все операторы $\mathcal{L}^{(n)} = \mathcal{L}\Lambda^n$, $n \in \mathbb{Z}$, тоже имплектичны и нетеровы.

2. Квантовая алгебра Ли токов и симметрии динамических систем. В последнее время обнаружено [1, 2, 9], что важное значение в теории вполне интегрируемых нелинейных динамических систем имеет квантовая алгебра Ли токов, используемая в квантовой физике. Рассмотрим нерелятивистскую квантовую алгебру Ли токов $\mathfrak{g}$ на торе T^n, $\mathbb{Z}_+ \ni n < \infty$, реализованную операторами $\rho(f)$ и $J(g)$ в гильбертовом пространстве Фока Φ [9, 10]:

$$[\rho(f_1), \rho(f_2)] = 0, \quad [\rho(f), J(g)] = i\rho(\nabla f \cdot g), \quad [J(g_1), J(g_2)] =$$
$$= iJ(g_2 \cdot \nabla g_1 - g_1 \cdot \nabla g_2), \quad i = \sqrt{-1}. \tag{5}$$

Здесь $\rho(f) = \int\limits_{T^n} d^n x f(x) \rho(x)$, $J(g) = \int\limits_{T^n} d^n x\, g(x) J(x)$, $f \in \mathcal{G}(T^n; \mathbb{R}^1)$, $g \in \mathcal{G}(T^n;$

$\mathbb{R}^1$) — гладкие периодические функции на торе T^n; $\rho(x) = \psi^+(x)\psi(x)$ — вторично-квантованный [11] оператор плотности числа частиц; $J(x) = \frac{1}{2i}[\psi^+(x)\nabla\psi(x) - \nabla\psi^+(x)\psi(x)]$ — оператор плотности потока частиц; $\psi^+(x)$ и $\psi(y)$ — вторично-квантованные операторы рождения и уничтожения одночастичных квантовых состояний в точках x и $y \in T^n$ соответственно, удовлетворяющие каноническим коммутационным соотношениям: $[\psi(x), \psi^+(y)]_\pm = \delta(x-y)$. Алгебра Ли токов $\mathfrak{g}$ (5) является алгеброй Ли банаховой группы Ли токов $G = \mathcal{G} \otimes \mathrm{Diff}(T^n)$, где $\mathcal{G} = \mathcal{G}(T^n; \mathbb{R}^1)$, $\mathrm{Diff}(T^n)$—топологическая группа диффеоморфизмов тора T^n. В случае $n = 1$ с помощью базисных операторов алгебры Ли (5)

$$\rho_j = \int_{T^1} dx \exp(ijx + i\varepsilon x)\rho(x), \quad J_k = \int_{T^1} dx \exp(ikx) J(x), \tag{6}$$

где $j, k \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^1$ — параметр, можно ввести функционально-операторное представление алгебры Ли токов на окружности. Из (1) и (4) находим

$$[\rho_j, \rho_k] = 0, \quad [J_k, \rho_j] = (j+\varepsilon)\rho_{j+k}, \quad [J_k, J_j] = (j-k) J_{j+k} \tag{7}$$

для всех $j, k \in \mathbb{Z}$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ (7), очевидно, изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (5) при $n = 1$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ (7) допускает в случае функционально-операторных представлений центральное расширение

$$[\rho_j, \rho_k] = \mu j \delta_{j,-k}, \quad [J_k, \rho_j] = (j+\varepsilon)\rho_{j+k}, \quad [J_k, J_j] = (j-k) J_{j+k} + \\ + \nu k(k^2-1)\delta_{j,-k}, \tag{8}$$

где $j, k \in \mathbb{Z}$; $\mu, \nu \in \mathbb{R}^1$ — параметры, причем в этом случае алгебра Ли токов $\mathfrak{g}$ (8) называется обобщенной токовой алгеброй Вирасоро [12] и широко применяется в современной теоретической физике. В общем случае обобщенная алгебра Ли токов $\mathfrak{g}$ (8) имеет многочисленные функционально-операторные представления посредством векторных полей на специальных бесконечномерных многообразиях, которые на этих многообразиях задают вполне интегрируемые бесконечномерные гамильтоновы системы.

Определение 4. *Векторное поле $\alpha : M \to T(M)$ называется однородной симметрией динамической системы* (1), *если* $L_K\alpha = [K, \alpha] = 0$. *Соответственно, векторное поле $\Phi : M \to T(M)$ называется неоднородной симметрией динамической системы* (1), *если* $\partial\Phi/\partial t + L_K\Phi = 0$.

Подмножества $Q\{\alpha\}$ и $Q\{\Phi\}$ соответственно однородных и неоднородных симметрий являются подалгебрами Ли.

Пусть (1)— бигамильтонова динамическая система, обладающая двумя нетривиальными симметриями $\alpha_0 \in Q\{\alpha\}$, $\Phi_0 \in Q\{\Phi\}$ и $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$-пара согласована, причем

$$L_{\Phi_0}\alpha_0 = [\Phi_0, \alpha_0] = \varepsilon\alpha_0, \quad L_{\alpha_0}\mathcal{L} = L_{\alpha_0}\mathcal{M} = 0, \quad L_{\Phi_0}\mathcal{L} = (\xi - 1/2)\mathcal{L}, \\ L_{\Phi_0}\mathcal{M} = (\xi + 1/2)\mathcal{M}, \quad L_{\Phi_0}\Lambda = \Lambda, \tag{9}$$

где $\varepsilon, \xi \in \mathbb{R}^1$ — некоторые числовые параметры. Рассмотрим следующие множества $Q_0\{\alpha\}$ и $Q_0\{\Phi\}$:

$$Q_0\{\alpha\} = \{\alpha_j = \Lambda^{*j}\alpha_0 : j \in \mathbb{Z}\} \subset Q\{\alpha\}, \\ Q_0\{\Phi\} = \{\Phi_j = \Lambda^{*j}\Phi_0 : j \in \mathbb{Z}\} \subset Q\{\Phi\}. \tag{10}$$

В силу рекурсионности оператора $\Lambda^* : T(M) \to T(M)$ множества $Q_0\{\alpha\}$ и $Q_0\{\Phi\}$ являются соответственно подалгебрами Ли алгебр Ли $Q\{\alpha\}$ и $Q\{\Phi\}$.

Утверждение 1. *Полупрямая сумма $Q_0 = Q_0\{\alpha\} \oplus Q_0\{\Phi\}$ является подалгеброй Ли симметрий динамической системы* (1), *изоморфной алгебре Ли токов* $\mathfrak{g}$ (7):

$$[\alpha_j, \alpha_k] = 0, \quad [\Phi_k, \alpha_j] = (j+\varepsilon)\alpha_{j+k}, \quad [\Phi_k, \Phi_j] = (j-k)\Phi_{j+k}, \quad j, k \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

3. Алгебры симметрий динамической системы типа Буссинеска. Рассмотрим на многообразии $M \simeq \mathcal{G}(T^1; \mathbb{R}^2)$ нелинейную вполне интегрируемую динамическую систему типа Буссинеска [13]:

$$u_t = u_{xx} + vv_x,$$
$$v_t = -v_{xx} + u_x. \tag{12}$$

Система (12) имеет бесконечную последовательность законов сохранения, бигамильтонова, причем с помощью методов [1] находим

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\partial u_x + \frac{1}{4}u_x\partial & \partial^4 + \frac{1}{4}u\partial + \frac{1}{8}\partial u \\ -\partial^4 + \frac{1}{4}\partial u + \frac{1}{8}u\partial & \partial^3 \end{bmatrix} +$$
$$+ \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\partial^2 v\partial + \frac{1}{2}\partial v\partial^2 + \frac{1}{4}v\partial v & -\frac{1}{4}v_x\partial + \frac{1}{4}\partial v\partial \\ -\frac{1}{4}\partial v_x - \frac{1}{4}\partial v\partial & \frac{1}{8}\partial v + \frac{1}{8}v\partial \end{bmatrix}.$$

Рекурсионный оператор $\Lambda^* : T(M) \to T(M)$ имеет вид

$$\Lambda^* = \begin{bmatrix} \partial^3 + \frac{1}{4}u + \frac{1}{8}\partial u\partial^{-1} & \frac{1}{4}u_x + \frac{1}{4}\partial u_x\partial^{-1} \\ \partial^2 & \partial^3 + \frac{1}{4}\partial u\partial^{-1} + \frac{1}{8}u \end{bmatrix} +$$
$$+ \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\partial v - \frac{1}{4}v_x & \frac{1}{2}\partial v\partial + \frac{1}{2}\partial^2 v + \frac{1}{4}v\partial v\partial^{-1} \\ \frac{1}{8}v + \frac{1}{8}\partial v\partial^{-1} & \frac{1}{8}v\partial - \frac{1}{4}\partial v_x\partial^{-1} \end{bmatrix},$$

где $\partial = \partial/\partial x$, $x \in \mathbb{R}^1$, $\partial^{-1}(\cdot) = \frac{1}{2}\left[\int\limits_{x_0}^{x}(\cdot)\,dx - \int\limits_{x}^{x_0+l}(\cdot)\,dx\right]$ — оператор «обратного» дифференцирования, $\partial \cdot \partial^{-1} = 1$, $l \in \mathbb{R}^1$ — период функций u, v. Для подалгебр Ли $Q_0\{\alpha\}$ и $Q_0\{\Phi\}$ соответственно имеем

$$Q_0\{\alpha\} = \left\{\alpha_j = \Lambda^{*j}\alpha_0,\ \alpha_0 = \begin{pmatrix} u_{xx} + vv_x \\ -v_{xx} + u_x \end{pmatrix},\ j \in \mathbb{Z}\right\},$$
$$Q_0\{\Phi\} = \left\{\Phi_j = \Lambda^{*j}\Phi_0,\ \Phi_0 = \alpha_0 t - \frac{1}{2}x\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}u \\ -v \end{pmatrix},\ j \in \mathbb{Z}\right\}. \tag{13}$$

В этом случае в (11) $\varepsilon = -1$. Прямыми вычислениями убеждаемся, что подалгебра Ли $Q_0 = Q_0\{\alpha\} \oplus Q_0\{\Phi\}$ с учетом (13) удовлетворяет соотношениям алгебры Ли токов $\mathfrak{g}$ (11).

Отметим также, что существует еще одна подалгебра Ли $\tilde{Q}_0 = \tilde{Q}_0\{\tilde{\alpha}\} \oplus Q_0\{\Phi\}$, которая также является алгеброй Ли токов, где

$$\tilde{Q}_0\{\tilde{\alpha}\} = \left\{\tilde{\alpha}_j = \Lambda^{*j}\tilde{\alpha}_0,\ \tilde{\alpha}_0 = \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix},\ j \in \mathbb{Z}\right\}. \tag{14}$$

При этом $\varepsilon = -1/2$.

Наличие двух разных подалгебр Ли токов алгебры симметрий связано с наличием двух порождающих элементов в иерархии законов сохранения.

Утверждение 2. *Динамическая система типа Буссинеска* (12) *инвариантна относительно групп симметрий* $\exp\{Q_0\}$ *и* $\exp\{\tilde{Q}_0\}$, *изоморфных банаховой группе Ли токов* $G = \mathcal{G} \otimes \mathrm{Diff}\,(S^1)$ *на окружности.*

Прямым следствием соотношений (9)—(11) являются следующие равенства для всех $j \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{gathered} L_{\alpha_j}\mathcal{L} = L_{\alpha_j}\mathcal{M} = 0, \quad L_{\alpha_j}\Lambda = 0, \quad L_{\Phi_j}\Lambda = \Lambda^{j+1}, \\ L_{\Phi_j}\mathcal{L} = (\xi - j - 1/2)\,\mathcal{L}\Lambda^j, \quad L_{\Phi_j}\mathcal{M} = (\xi - j + 1/2)\,\mathcal{M}\Lambda^j. \end{gathered} \tag{15}$$

В силу (11) и (15) существует бесконечная иерархия однородных функционалов $\gamma_j \in \mathcal{D}(M)$, $j \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих соотношению

$$\alpha_j = \mathcal{L}\,\mathrm{grad}\,\gamma_j. \tag{16}$$

Из (11) и (16) находим, что для всех $j, k \in \mathbb{Z}$

$$\{\gamma_j, \gamma_k\}_{\mathcal{L}} = \{\gamma_j, \gamma_k\}_{\mathcal{M}} = 0. \tag{17}$$

Тем самым гамильтонова динамическая система (1) обладает на M бесконечной инволютивной системой законов сохранения $\{\gamma_j \in \mathcal{D}(M) : j \in \mathbb{Z}\}$, что в случае ее полноты [1] позволяет доказать полную интегрируемость по Лиувиллю рассматриваемой динамической системы. В частности, используя регулярную процедуру градиентно-голономного алгоритма [5], можно найти для динамической системы (1) стандартное представление типа Лакса, позволяющее получить ее решения в явном виде.

4. Функциональное представление алгебры Ли токов $\mathfrak{g}$. Выше при анализе динамической системы (1) мы предположили существование для нее имплектической согласованной $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$-пары нетеровых операторов. Если же динамическая система (1) не бигамильтонова, а только гамильтонова, то, очевидно, уравнение нетеровости (4) обладает только одним (с точностью до умножения на константу) решением. С другой стороны, если динамическая система (1) инвариантна относительно максимальной и универсальной банаховой группы Ли токов $G = \mathcal{G} \otimes \otimes\, \mathrm{Diff}\,(T^n)$, то для соответствующей алгебры Ли симметрий $Q_0 = Q_0\{\alpha\} \oplus \oplus\, Q_0\{\Phi\}$, изоморфной алгебре Ли токов $\mathfrak{g}$ (11), для всех $\alpha \in Q_0\{\alpha\}$ и $\Phi \in Q_0\{\Phi\}$ справедливы соотношения нетеровости

$$L_\alpha\mathcal{L} = L_\Phi\mathcal{L} = 0. \tag{18}$$

При этом, очевидно, рекурсионный оператор $\Lambda^*\colon T(M) \to T(M)$ также уже не существует. Если же группа инвариантности $\exp\{Q_0\}$ системы (1) изоморфна группе токов $G = \mathcal{G} \otimes \mathrm{Diff}\,(T^1)$ на окружности, то роль нерегулярного рекурсионного оператора будут играть элементы подалгебры $\{\Phi_{-1}, \Phi_0, \Phi_1\}$ алгебры Ли симметрий $Q_0\{\Phi\}$, образующие алгебру $\mathrm{sl}\,(2)$. Действительно, из (11) для всех $j \in \mathbb{Z}$ находим

$$\begin{gathered} (j + \varepsilon)\,\alpha_{j+1} = [\Phi_1, \alpha_j], \quad (j + \varepsilon)\,\alpha_{j-1} = [\Phi_{-1}, \alpha_j], \quad (j + \varepsilon)\,\alpha_j = [\Phi_0, \alpha_j], \\ (j - 1)\,\Phi_{j+1} = [\Phi_1, \Phi_j], \quad j\Phi_j = [\Phi_0, \Phi_j], \quad (j + 1)\,\Phi_{j-1} = [\Phi_{-1}, \Phi_j]. \end{gathered} \tag{19}$$

Формулы (19) показывают, что с помощью $\mathrm{sl}\,(2)$-подалгебры Ли $\{\Phi_{-1}, \Phi_0, \Phi_1\}$ и набора начальных однородных симметрий $\{\alpha_{-1}, \alpha_1\}$ при $\varepsilon = 0$ или $\{\alpha_0\}$ при $\varepsilon \notin \mathbb{Z}$, а также неоднородных симметрий $\{\Phi_{-2}, \Phi_2\}$ рекуррентным способом определяется вся бесконечная иерархия симметрий $Q_0 = Q_0\{\alpha\} \oplus \oplus\, Q_0\{\Phi\}$, изоморфная алгебре Ли токов $\mathfrak{g}$ (7) в силу построения. Кроме того, согласно соотношениям нетеровости (18) на многообразии M существуют две иерархии законов сохранения динамической системы (1) — однородных $\gamma_j \in \mathcal{D}(M)$, $j \in \mathbb{Z}$, и неоднородных $\eta_n \in \mathcal{D}(M)$, $n \in \mathbb{Z}$, функционалов, удовлетворяющих условиям

$$\alpha_j = \mathcal{L}\,\mathrm{grad}\,\gamma_j, \quad \Phi_n = \mathcal{L}\,\mathrm{grad}\,\eta_n, \quad \{\gamma_j, \gamma_n\}_{\mathcal{L}} = 0, \quad \{\eta_j, \eta_n\}_{\mathcal{L}} = (j - n)\,\eta_{j+n},$$

$$(j+\varepsilon)\gamma_{j+n} = (\operatorname{grad}\gamma_j, \Phi_n) = \{\gamma_j, \Phi_n\}_{\mathscr{L}}, \quad \partial\eta_n/\partial t + \{H, \eta_n\}_{\mathscr{L}} = 0, \tag{20}$$

$$\{H, \gamma_j\}_{\mathscr{L}} = 0,$$

где, по определению, $u_t = K[u] = -\mathscr{L}\operatorname{grad} H$.

Утверждение 3. *Полупрямая сумма множеств однородных и неоднородных функционалов* $\{\gamma_j \in \mathscr{D}(M) : j \in \mathbb{Z}\} \oplus \{\eta_n \in \mathscr{D}(M) : n \in \mathbb{Z}\}$ *изоморфна алгебре Ли токов* $\mathfrak{g}$ (7) *и тем самым задает ее функциональное представление.*

Проведенный анализ соответствия универсальной алгебры Ли токов $\mathfrak{g}$ (7) функциональным алгебрам Ли симметрий интегрируемых бесконечномерных динамических систем дает возможность сформулировать следующий алгоритм, который можно использовать в качестве критерия интегрируемости произвольной однородной нелинейной динамической системы $u_t = K[u]$ на бесконечномерном многообразии $M \simeq \mathscr{G}(T^1; \mathbb{R}^m)$.

Алгоритм. Если для динамической системы $u_t = K[u]$ на многообразии M существуют нетривиальная $\mathrm{sl}(2)$-подалгебра Ли $\{\Phi_{-1}, \Phi_0, \Phi_1\}$, «начальные» неоднородные $\{\Phi_{-2}, \Phi_2\}$ и однородные $\{\alpha_{-1}, \alpha_1\}$, ($\{\alpha_0\}$ при $\varepsilon \notin \mathbb{Z}$) симметрии, удовлетворяющие соотношениям

$$[\Phi_0, \Phi_2] = 2\Phi_2, \quad [\Phi_0, \Phi_{-2}] = -2\Phi_{-2}, \quad [\Phi_1, \Phi_{-2}] = -3\Phi_{-1},$$

$$[\Phi_{-1}, \Phi_2] = 3\Phi_1, \quad [\alpha_{-1}, \alpha_1] = 0, \quad [\Phi_0, \alpha_0] = \varepsilon\alpha_0, \quad [\Phi_{\pm 1}, \alpha_0] = \varepsilon\alpha_{\pm 1},$$

$$[\Phi_{\pm 1}, \alpha_{\mp 1}] = (\varepsilon \mp 1)\alpha_0, \quad [\Phi_{\pm 2}, \alpha_{\mp 1}] = (\varepsilon \mp 1)\alpha_{\pm 1}, \quad [\Phi_{\pm 2}, \alpha_0] = \varepsilon\alpha_{\pm 2},$$

$$[\Phi_0, \Phi_{\pm 1}] = \pm\Phi_{\pm 1}, \quad [\Phi_{-1}, \alpha_{\pm 1}] = (\varepsilon \pm 1)\alpha_{\pm 2}, \tag{21}$$

не приводящим к общим токовым выражениям (19), то динамическая система $u_t = K[u]$ обладает бесконечномерной алгеброй Ли симметрий $Q_0 = Q_0\{\alpha\} \oplus Q_0\{\Phi\}$, изоморфной алгебре Ли токов $\mathfrak{g}$ (7) банаховой группы Ли токов $G = \mathscr{G} \otimes \operatorname{Diff}(T^1)$ на окружности, и в случае существования нетривиального решения уравнения нетеровости $L_K\mathscr{L} = 0$ задает бесконечномерный вполне интегрируемый гамильтоновый поток на M. Если при этом выполнены соотношения (15), то динамическая система $u_t = K[u]$ на многообразии M является бигамильтоновой, обладает наследственно-рекурсионным оператором $\Lambda = \mathscr{L}^{-1}\mathscr{M}$ и в силу градиентно-голономного алгоритма [5] стандартным представлением типа Лакса.

В случае выполнения условий (18) динамическая система не имеет бигамильтоновой структуры, но взамен появляются новые бесконечномерные неоднородные иерархии законов сохранения, удовлетворяющие условиям (20).

1. *Интегрируемые* динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты / Ю. А. Митропольский, Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский, В. Г. Самойленко.— Киев : Наук. думка, 1987.— 296 с.
2. *Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.* Динамические системы типа Каупа и типа Неймана: полная интегрируемость и точные решения.— Киев, 1986.— 40 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.56).
3. *Нелинейная* модель типа Шредингера. Законы сохранения, гамильтонова структура и полная интегрируемость / Н. Н. Боголюбов (мл.), А. М. Курбатов, А. К. Прикарпатский, В. Г. Самойленко // Теорет. и мат. физика.— 1985.— **65**, № 2.— С. 271—284.
4. *Прикарпатский А. К.* Градиентный алгоритм построения критериев интегрируемости нелинейных динамических систем // Докл. АН СССР.— 1986.— **287**, № 4.— С. 827—832.
5. *Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К.* Полная интегрируемость нелинейных систем Ито и Бени—Каупа: градиентный алгоритм и представление Лакса/ Теорет. и мат. физика.— 1986.— **67**, № 3.— С. 410—425.
6. *Гельфанд И. М., Дорфман И. Я.* Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры // Функцион. анализ и его прил.— 1979.— **13**, № 4.— С. 13—31.
7. *Fuchssteiner B., Fokas A. S.* The hierarchy of the Benjamin — Ono equation // Phys. Lett. A.— 1981.— **86**, N 6/7.— P. 341—345.
8. *Magri F.* A simple model of the integrable Hamiltonian equation // J. Math. Phys.— 1978.— **19**, N 2.— P. 1156—1162.
9. *Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К.* Квантовый метод производящих функционалов Н. Н. Боголюбова в статистической физике: алгебра Ли токов, ее представ-

ление и функциональные уравнения // Элементар. частицы и атом. ядра.— 1986.— **17**, № 4.— С. 423—468.
10. *Goldin G. A.*, *Sharp D. H.* Particle spin from representation of the diffeomorphism group // Communs Math. Phys.— 1983.— **92**, N 2.— P. 284—289.
11. *Боголюбов Н. Н.*, *Боголюбов Н. Н.* (*мл.*) Введение в квантовую статистическую механику.— М. : Наука, 1984.— 387 с.
12. *Olive D. I.* Preprint Imperial College. Cambridge, TP 184—85/14.
13. *McKean H. P.* Boussinesq's equation on the circle // Communs Pure and Appl. Math.— 1981.— **34**, N 5.— P. 599—693.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 15.05.87