УДК 519.21

В. С. Королюк, Ю. В. Боровских

Асимптотическая теория U-статистик

1. Определение U-статистики. Начало теории U-статистик восходит к фундаментальной работе В. Гефдинга [1], в которой была доказана центральная предельная теорема. В течение последующих лет интерес к этому классу случайных величин постоянно возрастал, и в теории вероятностей сформировалось интенсивно развивающееся направление. U-статистики являются одним из универсальных объектов современной теории суммирования, который, с одной стороны, более сложен, чем суммы независимых случайных величин и векторов, а с другой — содержит в себе существенные элементы зависимости, проявляющиеся в мартингальных свойствах. Кроме того, U-статистики имеют обширную область применения в статистических задачах [1—3].

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, принимающие значения в некотором измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$ и имеющие распределение P. Иногда $X_1, \ldots, X_n$ трактуется как выборка объема n из совокупности с распределением P.

Регулярный функционал. Пусть $\mathcal{P} = \{P\}$ — некоторый класс вероятностных распределений на $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$. Обозначим θ: $P \to \theta(P)$ — функционал, заданный на $\mathcal{P}$ и принимающий значения в R. Функционал $\theta(P)$ называется регулярным, если для него существует несмещенная оценка, т. е. $\theta(P)$ может быть представлен в виде

$$\theta(P) = \int\limits_{\mathfrak{X}} \ldots \int\limits_{\mathfrak{X}} \Phi(x_1, \ldots, x_m) P(dx_1) \ldots P(dx_m) \tag{1}$$

с некоторой функцией Φ: $(x_1, \ldots, x_m) \to \Phi(x_1, \ldots, x_m)$, которая называется ядром $\theta(P)$, а целое число $m \geqslant 1$ — степенью $\theta(P)$. Без потери общности можно предполагать, что Φ является симметрической функцией относительно своих аргументов, так как в противном случае можно ввести в рассмотрение симметрическое ядро Φ_0 по формуле $\Phi_0(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{m!} \Sigma \Phi(x_{i_1}, \ldots$ $\ldots, x_{i_m})$, где суммирование осуществляется по всем $m!$ перестановкам $(i_1, \ldots$ $\ldots, i_m)$ чисел $(1, \ldots, m)$.

Определение U-статистики. Для симметрического ядра $\Phi(x_1, \ldots, x_m)$ регулярного функционала $\theta(P)$ U-статистика определяется так:

$$U_n = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n} \Phi(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}), \tag{2}$$

где $n \geqslant m$. Очевидно, что U_n является симметрической несмещенной оценкой $\theta(P)$, ибо $EU_n = \theta(P)$ для всех $P \in \mathcal{P}$ и $n \geqslant m$.

Пример 1. Выборочное среднее:

$$\theta(P) = \mu(P) = \int xP(dx), \quad \Phi(x) = x, \quad U_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j = \overline{X}.$$

Пример 2. Выборочная дисперсия:

$$\theta(P) = \int (x - \mu)^2 P(dx),$$

$$\Phi(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2,$$

$$U_n = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \Phi(X_i, X_j) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j^2 - n\overline{X}^2\right) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2.$$

Пример 3. Статистика Джини:

$$\theta(P) = E|X_1 - X_2|, \quad \Phi(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|, \; U_n = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |X_i - X_j|.$$

Пример 4. Одновыборочная статистика Вилкоксона:

$$\theta(P) = P(X_1 + X_2 \leqslant 0), \quad \Phi(x_1, x_2) = I(x_1 + x_2 \leqslant 0),$$

$$U_n = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} I(x_i + x_j \leqslant 0).$$

2. Обзор результатов. Развитие теории U-статистик с самого начала определялось влиянием классической теории суммирования независимых случайных величин: были доказаны закон больших чисел, центральная предельная теорема, оценки скорости сходимости, закон повторного логарифма и т. д. Асимптотическая теория U-статистик имеет свою специфику и качественно отличается от теории сумм независимых случайных величин. Многие асимптотические свойства U-статистик зависят от ранга r ядра Φ и моментных ограничений на ядро. Для невырожденного ядра ранга $r = 1$ асимптотика U-статистик по существу может быть сведена к асимптотике сумм случайных величин. Если ранг $r \geqslant 2$ (вырожденное ядро), то класс возможных предельных распределений для U-статистик расширяется и в него входят безгранично делимые законы, распределения функционалов от конечномерных и бесконечномерных гауссовских векторов, определяемых по ядру и др. Такая природа U-статистик порождает новые идеи в области предельных теорем и требует развития имеющихся методов исследования.

В настоящей работе в сжатой форме сформулированы основные идеи и результаты теории U-статистик, на базе которых развивается современная теория. В п. 3 вводится понятие ранга U-статистики (ядра Φ), от которого зависит ее асимптотика. Дано каноническое разложение (16) U-статистики, которое в 1961 г. ввел Гефдинг [4]. Непосредственно из этого представления следует, что при подходящих моментных условиях на ядро Φ невырожденная U-статистика асимптотически эквивалентна сумме независимых случайных величин. Именно это обстоятельство использовал Гефдинг [1] для доказательства асимптотической нормальности. В п. 4 приведены мартингальные свойства U-статистик. Представление U-статистики в виде суммы мартингал-разностей позволяет применять различные мартингальные предельные теоремы [5]. В случае $m = 2$ Холл [6] этим путем получил центральную предельную теорему для U-статистик с переменным ядром Φ (т. е. $\Phi = \Phi_n$ зависит от n, причем так, что параметр n существенно влияет на асимптотику). В [7] доказана мартингальная центральная предельная теорема при любом $m \geqslant 1$. Ранее в [8] было показано, что U-статистика с переменным ядром возникает в вопросах исследования асимптотических свойств среднеквадратических мер качества оценки плотности распределения. На последовательности $\{U_n\}$, $n \geqslant m$, можно определить процессы $\xi_n(t) = U_{[nt]}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, со значениями в пространстве $D[0, 1]$. В [9] мартингальными методами доказаны различные функциональные предельные теоремы для $\xi_n(t)$, в том числе слабая сходимость к винеровскому процессу. В п. 5 мартингальные свойства используются для оценки моментов $E|U_n - \theta|^p$ при всех $p \geqslant 1$ с помощью общих мартингальных неравенств из [10, 11]. В п. 6 приведен закон больших чисел для U-статистик. При условии $E|\Phi| < \infty$ он был доказан сначала Гефдингом [4] с помощью (16) и мартингального свойства (22) и затем Берком [12]. Данное здесь доказательство принадлежит Берку. В этом же пункте центральная предельная теорема доказана при наиболее слабых условиях на ядро Φ [13]. Вопросу о предельном распределении U-статистик при любом значении ранга посвящен п. 7. Здесь сформулирован координатный метод, суть которого состоит в представлении U-статистики U_{nr} с ядром $g_r \in L^2$ в виде (55), где случайные коэффициенты удовлетворяют (56). В результате получается предельное соотношение (51). Первоначально в [4] координатным методом было получено (57) для $m = r = 2$ (следствие 2). При любых m и r соотношение (51) координатным методом было доказано в [15, 16]. В [17] результаты работы [16] обобщены на неполные U-статистики. При этом в [15—17] предполагалось, что ядро $\Phi \in L^2$. При условии (50) теорема 3 является новой и получена в [18]. Для $r < m$ существуют примеры, которые показывают, что условия (50) выполняются, но $E\Phi^2 = \infty$. Если ядро U-статистики является переменным, то соотношение (51) может и не выполняться. Это вытекает из результатов работ [19—21]. Более того, можно показать, что для любого заданного полинома степени m от стандартной нормальной случайной величины существует U-статистика с переменным ядром, которая слабо сходится к нему. В качестве такой U-статистики достаточно взять, например (ср. с [22, 23]), линейную комбинацию элементарных симметрических многочленов степени m от независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ таких, что $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = 1$.

При других моментных условиях симметрические многочлены обладают иными асимптотическими свойствами. Случай $m = m(n) \to \infty$ в зависимости от $n \to \infty$ изучался в [25]. Ситуация, когда $X_1, \ldots, X_n$ принадлежат области притяжения устойчивого закона, рассматривалась в [25]. Исследованы [26, 27] вопросы слабой сходимости симметрических полиномов общего вида от независимых случайных величин без предположения одинаковой распределенности и при различных моментных ограничениях.

Во многих задачах возникают случайные величины типа

$$T_n = \sum_{(i_1,\ldots,i_m)=1}^{n} \Phi_{n,i_1,\ldots,i_m}(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}),$$

которые можно рассматривать как обобщенный вариант U-статистики (2). Конечно вопрос о предельном распределении T_n гораздо сложнее, чем для (2). Однако когда T_n совпадает с функционалом Мизеса [28], условия те же, что и в теореме 3, за исключением моментных ограничений на ядро Φ [2, 16]. В п. 8 показано, что случайная величина η_∞ из (49). выражается в виде r-кратного стохастического интеграла Винера — Ито. Такая форма слабого предела η_∞ была найдена в [29]. Приведенное здесь доказательство дано по работе [30] и основано на формуле Ито [31]. Для функционалов Мизеса аналогичные результаты имеются в [32]. В [33] в форме стохастических интегралов доказан принцип инвариантности для симметрических статистик, содержащих в себе U-статистики. В п. 9 приведены теоремы о скорости сходимости по работе [34]. В [35] рассмотрен вопрос об асимптотическом разложении для линейной комбинации U-статистик и функционалов Мизеса.

Для U-статистик с ядром $\Phi : \mathfrak{X}^m \to H$, где H — сепарабельное вещественное гильбертово пространство, в [36] исследованы основные вероятностные свойства: закон больших чисел, центральная предельная теорема, слабая сходимость к многократному стохастическому интегралу, скорость сходимости, закон повторного логарифма и др. Кроме того, в [36] рассмотрены U-статистики от переставляемых и слабо зависимых случайных величин.

Систематическое изложение асимптотической теории U-статистик, а также различные обобщенные варианты U-статистик (многовыборочные, с переменным ядром, от зависимых величин и др.), закон повторного логарифма, большие уклонения, скорость сходимости, асимптотические разложения, функциональные предельные теоремы для U-статистик и др., будут даны в монографии авторов настоящего обзора.

3. Каноническое разложение (представление Гефдинга) U-статистики. При условии $E|\Phi| < \infty$ определим функции

$$\Phi_c(x_1, \ldots, x_c) = E\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_c, x_{c+1}, \ldots, x_m) =$$
$$= E(\Phi(X_1, \ldots, X_m) \mid X_1 = x_1, \ldots, X_c = x_c), \quad c = 0, 1, \ldots, m, \tag{3}$$

положив $\Phi_0 = \theta(P)$, $\Phi_m = \Phi$. Отметим, что для $1 \leqslant c \leqslant m-1$, $\Phi_c(x_1, \ldots$ $\ldots, x_c) = E\Phi_{c+1}(x_1, \ldots, x_c, X_{c+1})$ положим для удобства $\tilde{\Phi} = \Phi - \theta(P)$ и $\tilde{\Phi}_c = \Phi_c - \theta(P)$, $0 \leqslant c \leqslant m$.

Целое число r, $1 \leqslant r \leqslant m$, удовлетворяющее условиям

$$0 = \tilde{\Phi}_0 = \tilde{\Phi}_1 = \ldots = \tilde{\Phi}_{r-1}, \quad \tilde{\Phi}_r \neq 0, \tag{4}$$

называется *рангом* U-статистики (ядра Φ). При $r = 1$ U-статистика (ядро Φ) называется невырожденной; при $r \geqslant 2$ — вырожденными, r — порядок вырожденности. Если $r = m$, то говорят, что U-статистика (ядро Φ) обладает свойством полной вырожденности.

Многие свойства U-статистик зависят от ранга r.

Симметрическое ядро $\Phi(x_1, \ldots, x_m)$ в (2) с помощью δ-меры $\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \,\overline{\in}\, A \end{cases}$ представимо в виде

$$\Phi(x_1, \ldots, x_m) = \int \cdots \int \Phi(y_1, \ldots, y_m) \prod_{j=1}^{m} d\delta_{x_j}(y_j). \tag{5}$$

Воспользуемся мультипликативными свойствами подынтегрального выражения в (5) следующим образом. Известно, что для любых чисел $(a_1, \ldots, \ldots, a_m)$ и $(b_1, \ldots, b_m)$ справедлива формула

$$\prod_{s=1}^{m} (a_s + b_s) = \prod_{s=1}^{m} a_s + \sum_{c=1}^{m} \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_c \leqslant m} \prod_{s=1}^{c} b_{j_s} \prod_{s=1}^{m-c} a_{i_s}, \tag{6}$$

где $\{i_1, \ldots, i_{m-c}\} = \{1, \ldots, m\} - \{j_1, \ldots, j_c\}$.

В (6) положим $a_s = dP(y_s)$, $b_s = d(\delta_{x_s}(y_s) - P(y_s))$. В результате с учетом обозначений (3) и свойства симметрии функций Φ_c получим формулу

$$\Phi(x_1, \ldots, x_m) = \theta + \sum_{c=1}^{m} \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_c \leqslant m} \int \cdots \int \Phi_c(y_{j_1}, \ldots, y_{j_c}) \times$$
$$\times \prod_{s=1}^{c} d(\delta x_{j_s}(y_{j_s}) - P(y_{j_s})). \tag{7}$$

Введем обозначение для канонических функций

$$g_c(x_1, \ldots, x_c) = \int \cdots \int \Phi_c(y_1, \ldots, y_c) \prod_{s=1}^{c} d(\delta_{x_s}(y_s) - P(y_s)), \quad 1 \leqslant c \leqslant m. \tag{8}$$

Из (8) очевидным образом вытекает свойство полной вырожденности

$$Eg_c(x_1, \dots, x_{c-1}, X_c) = 0 \tag{9}$$

для всех $c = 1, \dots, m$. Если воспользоваться формулой (6) при $a_{x_s} = -dP(y_s)$, $b_s = d\delta x_s(y_{x_s})$, $s = 1, \dots, m$, то из (8) получим

$$g_c(x_1, \dots, x_c) = \sum_{d=1}^{c} (-1)^{c-d} \sum_{1 \leqslant j_1 < \dots < j_d \leqslant c} \tilde{\Phi}_d(x_{j_1}, \dots, x_{j_d}). \tag{10}$$

Формула, «обратная» по отношению к (10), имеет вид

$$\tilde{\Phi}_c(x_1, \dots, x_c) = \sum_{d=1}^{c} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_d \leqslant c} g_d(x_{i_1}, \dots, x_{i_d}) \tag{11}$$

для всех $c = 1, \dots, m$.

Из (10) и (11) следует, что ранг r U-статистики можно определить условием

$$0 = g_0 = g_1 = \dots = g_{r-1}, \quad g_r \neq 0. \tag{12}$$

Подставляя (7) с учетом (8) и (12) в (2), получаем

$$U_n - \theta = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{c=r}^{m} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_m \leqslant n} \sum_{1 \leqslant j_1 < \dots < j_c \leqslant m} g_c(X_{i_{j_1}}, \dots, X_{i_{j_c}}). \tag{13}$$

Приведя подобные члены в (13), получим

$$U_n - \theta = \sum_{c=r}^{m} \binom{n}{c}^{-1} \binom{m}{c} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_c \leqslant n} g_c(X_{i_1}, \dots, X_{i_c}). \tag{14}$$

Обозначим

$$U_{nc} = \binom{n}{c}^{-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_c \leqslant n} g_c(X_{i_1}, \dots, X_{i_c}). \tag{15}$$

Тогда (14) имеет вид

$$U_n - \theta = \sum_{c=r}^{m} \binom{m}{c} U_{nc}, \tag{16}$$

и называется *каноническим разложением* (представление Гефдинга) U-статистики. Функции g_c из (8) (или из (10)) со свойством полной вырожденности (9) в разложении (16) называются каноническими. В (16) r обозначает ранг U-статистики из (4). Таким образом, U-статистика (2) с ядром $E\,|\,\Phi\,| < \infty$ является линейной комбинацией U-статистик (15), ядра которых g_c обладают свойством полной вырожденности (9).

Для U-статистики U_{nc} в каноническом представлении Гефдинга (16) можно получить выражение в виде интеграла по случайной мере. Действительно, представим U_{nc} в (15) в виде

$$U_{nc} = n^{-[c]} \sum_{1 \leqslant i_1 \neq \dots \neq i_c \leqslant n} g_c(X_{i_1}, \dots, X_{i_c}), \tag{17}$$

где $n^{[c]} = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-c+1)$. Введем в рассмотрение мартингальную меру

$$\gamma_n(dy_1, \dots, dy_c) = \sum_{1 \leqslant i_1 \neq \dots \neq i_c \leqslant n} (\delta_{X_{i_1}}(dy_1) - P(dy_1)) \dots (\delta_{X_{i_c}}(dy_c) - P(dy_c)). \tag{18}$$

Из (8), (17) и (18) получаем

$$U_{nc} = n^{-[c]} \int_{\mathfrak{X}} \dots \int_{\mathfrak{X}} g_c(y_1, \dots, y_c)\, \gamma_n(dy_1, \dots, dy_c). \tag{19}$$

Меру γ_n в (18), (19) будем называть перманентной случайной мерой в силу того, что в ее определении выражение справа в (18) представляет собой перманент матрицы размера $c \times n$ и с общим элементом $\delta_{X_j}(dy_i) - P(dy_i)$, $1 \leqslant i \leqslant c$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

4. Мартингальная структура U-статистик. Положим

$$S_{nc} = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_c \leqslant n} g_c(X_{i_1}, \ldots, X_{i_c}). \tag{20}$$

В этих обозначениях перепишем формулу (16):

$$U_n - \theta = \sum_{c=r}^{m} \binom{m}{c} \binom{n}{c}^{-1} S_{nc}. \tag{21}$$

Лемма 1 (Гефдинг). *Пусть* $E|\Phi| < \infty$ *и* $\mathcal{F}_k = \sigma\{\omega: X_1, \ldots, X_k\}$ — *σ-алгебра, порожденная* $X_1, \ldots, X_k$, $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$. *Тогда при каждом* $c = 1, \ldots, m$

$$E(S_{nc} | \mathcal{F}_k) = S_{kc}, \quad c \leqslant k \leqslant n, \tag{22}$$

т. е. стохастическая последовательность $(S_{nc}, \mathcal{F}_n)$, $n \geqslant c$, *образует мартингал.*

Доказательство. По свойству (9) имеем $E(g_c(X_{i_1}, \ldots, X_{i_c}) | X_1, \ldots, X_k) = 0$, если хотя бы один из индексов $i_1, \ldots, i_c$ не содержится в $\{1, \ldots, k\}$. Поэтому

$$E(S_{nc} | X_1, \ldots, X_k) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_c \leqslant k} g_c(X_{i_1}, \ldots, X_{i_c}) = S_{kc}.$$

Представим U-статистику (2) в виде суммы мартингал-разностей

$$U_n - \theta = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \ldots + \xi_{nn}, \tag{23}$$

где $\xi_{nk} = E(U_n | X_1, \ldots, X_k) - E(U_n | X_1, \ldots, X_{k-1})$. Из (21) и (22) следует

$$E(U_n | X_1, \ldots, X_k) = \theta + \sum_{c=r}^{m} \binom{m}{c} \binom{n}{c}^{-1} S_{kc}.$$

Так что

$$\xi_{nk} = \sum_{c=r}^{m} \binom{m}{c} \binom{n}{c}^{-1} (S_{kc} - S_{k-1,c}).$$

При $k \geqslant c$, $k = 1, \ldots, n$; $c = 1, \ldots, m$ обозначим

$$\eta_{kc} = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{i-1} \leqslant k-1} g_c(X_{i_1}, \ldots, X_{i_{c-1}}, X_k),$$

считая по определению, что $\eta_{k1} = g_1(X_k)$. Поскольку $S_{kc} - S_{k-1,c} = \eta_{kc}$, то

$$\xi_{nk} = \sum_{c=r}^{m} \binom{m}{c} \binom{n}{c}^{-1} \eta_{kc}. \tag{24}$$

Лемма 2. *Пусть* $E|\Phi| < \infty$. *Тогда* U*-статистика* (2) *представима в виде суммы* (23) *мартингал-разностей* (24).

Можно показать, что U-статистика (2) относительно подходяще выбранного невозрастающего потока σ-алгебр $\mathcal{B}_n$, $n \geqslant 1$, является обращенным мартингалом. Пусть

$$\mathcal{B}_n = \sigma\{\omega: U_n, U_{n+1}, \ldots\} \tag{25}$$

обозначает σ-алгебру, порожденную последовательностью U-статистик U_n, $U_{n+1}, \ldots$ вида (2), где $n \geqslant m$. Очевидно, что $\mathcal{B}_n \supseteq \mathcal{B}_{n+1}$ для всех $n = m$, $m+1, \ldots$ и что U_n является $\mathcal{B}_n$-измеримой случайной величиной.

Лемма 3 (Берк). *Последовательность* $(U_n, \mathcal{B}_n)$, $n \geqslant m$, *с* $\mathcal{B}_n$ из

(25), *образует регулярный обращенный мартингал, причем*

$$U_n = E(\Phi(X_1, \dots, X_m) \mid \mathcal{B}_n). \tag{26}$$

5. Оценки моментов. Дисперсия U-статистики. Пусть симметрическое ядро Φ удовлетворяет условию $E\Phi^2 < \infty$ и $\sigma_c^2 = E\tilde{\Phi}_c^2(X_1, \dots, X_c)$, $c = 0, 1, \dots, m$, считая, что $\sigma_0 = 0$. Рассмотрим два множества $(i_1, \dots, i_m)$ и $(j_1, \dots, j_m)$, состоящее из m различных целых чисел, $1 \leqslant i_k$, $j_k \leqslant n$, и пусть c есть целое число, равное числу совпадающих элементов среди этих двух множеств. Тогда в силу симметрии $\tilde{\Phi}$ и независимости $X_1, \dots, X_n$ имеем $\sigma_c^2 = E(\tilde{\Phi}(X_{i_1}, \dots, X_{i_m})\tilde{\Phi}(X_{j_1}, \dots, X_{j_m}))$. По определению дисперсия U-статистики равна

$$\sigma^2(U_n) = E(U_n - \theta)^2 = \binom{n}{m}^{-2} \sum_{c=0}^{m} \sum_{(c)} E(\tilde{\Phi}(X_{i_1}, \dots, X_{i_m})\tilde{\Phi}(X_{j_1}, \dots, X_{j_m})),$$

где $\sum_{(c)}$ обозначает суммирование по всем индексам таким, что $1 \leqslant i_1 < \dots$ $\dots < i_m \leqslant n$, $1 \leqslant j_1 < \dots < j_m \leqslant n$, и выполняется в точности c равенств $i_k = j_k$, при этом каждое слагаемое равно σ_c^2. Число таких слагаемых в $\sum_{(c)}$ равно $\binom{n}{m}\binom{m}{c}\binom{n-m}{m-c}$. Таким образом,

$$\sigma^2(U_n) = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{c=r}^{m} \binom{m}{c}\binom{n-m}{m-c}\sigma_c^2. \tag{27}$$

Здесь r — ранг U-статистики.

Аналогичное представление дисперсии U-статистики можно получить через величины $\delta_c^2 = Eg_c^2$. Используя

$$E(S_{nc}S_{nd}) = \begin{cases} \binom{n}{c}\delta_c^2, & c = d, \\ 0, & c \neq d, \end{cases} \tag{28}$$

с учетом (21) находим

$$\sigma^2(U_n) = \sum_{c=r}^{m} \binom{m}{c}^2 \binom{n}{c}^{-1} \delta_c^2. \tag{29}$$

Из (11) и (28) видим, что

$$\sigma_c^2 = \delta_c^2 + \binom{c}{1}\delta_{c-1}^2 + \dots + \binom{c}{c-1}\delta_1^2. \tag{30}$$

Отсюда по индукции (или с помощью (10) и (28)) выводим

$$\delta_c^2 = \sigma_c^2 - \binom{c}{1}\sigma_{c-1}^2 + \binom{c}{2}\sigma_{c-2}^2 + \dots + (-1)^{c-1}\binom{c}{c-1}\sigma_1^2. \tag{31}$$

Заметим, что при $n \to \infty$

$$\sigma^2(U_n) = r!\binom{m}{r}^2 \sigma_r^2 n^{-r} + O(n^{-r-1}). \tag{32}$$

Неравенства для моментов. Будем предполагать, что $E|\Phi|^p < \infty$, $p \geqslant 1$. При этом условии приведем некоторые оценки для $E|U_n - \theta|^p$, опираясь на мартингальные свойства U_n.

Лемма 4. *Если* $E|\Phi|^p < \infty$ *для всех* $1 \leqslant p \leqslant 2$, *то*

$$E|U_n - \theta|^p \leqslant (m - r + 1)^{p-1} \sum_{c=r}^{m} \binom{m}{c}^p \binom{n}{c}^{-p+1} \alpha_p^{c+1} E|g_c|^p, \tag{33}$$

где $\alpha_p = \sup_x (|x|^{-p}(|1 + x|^p - 1 - px)) \leqslant 2^{2-p}$.

Доказательство. Используя мартингальное неравенство из [10], для (23) имеем

$$E|U_n-\theta|^p\leqslant\alpha_p\sum_{k=1}^{n}E|\xi_{nk}|^p. \tag{34}$$

Сначала оценим $E|\xi_{nk}|^p$ с помощью (24):

$$E|\xi_{nk}|^p\leqslant(m-r+1)^{p-1}\sum_{c=r}^{m}\binom{m}{c}^p\binom{n}{c}^{-p}E|\eta_{kc}|^p. \tag{35}$$

Так как функции g_c обладают свойством (9), то последовательность $\{\eta_{kc}\}$, $k\geqslant 1$, также удовлетворяет мартингальному свойству. Поэтому после $(c-1)$-кратного применения неравенства из [10] получим

$$E|\eta_{kc}|^p\leqslant\alpha_p^cE|g_c|^p\binom{k-1}{c-1}. \tag{36}$$

Из (34) — (36) вытекает (33).

Лемма 5. *Если* $E|\Phi|^p<\infty$ *при* $p\geqslant 2$, *то*

$$E|U_n-\theta|^p\leqslant(m-r+1)^{p-1}\sum_{c=r}^{m}\binom{m}{c}^p\binom{n}{c}^{-p+1}n^{(p-2)c/2}\gamma_p^{c+1}E|g_c|^p, \tag{37}$$

где $\gamma_p=(8(p-1)\max(1,2^{p-3}))^p$.

Доказательство. По мартингальному неравенству из [11] при $p\geqslant 2$ имеем

$$E|U_n-\theta|^p\leqslant\gamma_pn^{(p-2)/2}\sum_{k=1}^{n}E|\xi_{nk}|^p. \tag{38}$$

Очевидно, что (35) справедливо и при $p\geqslant 2$. Поэтому следует оценить $E|\eta_{kc}|^p$. Для этого применим $(c-1)$ раз неравенство из [11] с учетом соотношения (9). В результате простых вычислений получаем

$$E|\eta_{kc}|^p\leqslant\gamma_p^cn^{(p-2)(c-1)/2}\binom{k-1}{c-1}E|g_c|^p,$$

что совместно с (35) и (38) приводит к (37).

6. Закон больших чисел и центральная предельная теорема.

Теорема 1. *Пусть ядро* Φ *U-статистики в* (2) *удовлетворяет условию* $E|\Phi(X_1,\ldots,X_m)|<\infty$. *Тогда при* $n\to\infty$

$$U_n\to\theta \tag{39}$$

с вероятностью 1 *и в* L^1.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}_n=\sigma\{\omega:U_n,U_{n+1},\ldots\}$ — σ-алгебра из (25). Обозначим $\mathcal{B}_\infty=\bigcap_{n=m}^{\infty}\mathcal{B}_n$. По формуле (26) и теореме о сходимости обращенного мартингала при $n\to\infty$ имеем

$$U_n\to E(\Phi\mid\mathcal{B}_\infty) \tag{40}$$

с вероятностью 1 и в L^1.

Поскольку случайные величины $X_1,\ldots,X_n$ независимы и одинаково распределены, то по закону 0 или 1 σ-алгебра $\mathcal{B}_\infty=\{\varnothing,\mathcal{A}\}$ тривиальна. Следовательно, предел в (40) равен $E(\Phi\mid\mathcal{B}_\infty)=E\Phi(X_1,\ldots,X_m)=\theta$.

Предположим, что $Eg_1^2<\infty$ и ранг $r=1$. По центральной предельной теореме имеет место слабая сходимость

$$(n\sigma_1^2)^{-1/2}(g_1(X_1)+\ldots+g_1(X_n))\xrightarrow{d}\tau, \tag{41}$$

где τ — стандартная нормальная случайная величина.

Теорема 2. *Пусть ядро Φ удовлетворяет условиям*

$$Eg_1^2 < \infty, \tag{42}$$

$$E|\Phi|^{4/3} < \infty \tag{43}$$

и ранг $r = 1$. Тогда при $n \to \infty$ справедливо соотношение

$$n^{1/2}(m\sigma_1)^{-1}(U_n - \theta) \xrightarrow{d} \tau. \tag{44}$$

Доказательство. Запишем представление (16) в виде

$$U_n - \theta = mn^{-1}\sum_{j=1}^{n} g_1(X_j) + \binom{m}{2}\binom{n}{2}^{-1}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} g_2(X_i, X_j) + R_n, \tag{45}$$

где $R_n = \sum_{c=3}^{m}\binom{m}{c}U_{nc}$, при этом $R_n \equiv 0$, если $m = 1, 2$.

Сначала покажем, что

$$\sqrt{n}R_n \xrightarrow{P} 0. \tag{46}$$

В соответствии с определением величины R_n имеем

$$E|R_n|^{4/3} \leqslant (m-2)^{1/3}\sum_{c=3}^{m}\binom{m}{c}^{4/3}E|U_{nc}|^{4/3}.$$

Отсюда с учетом (33) следует

$$E|R_n|^{4/3} \leqslant (m-2)^{1/3}\sum_{c=3}^{m}\binom{m}{c}^{4/3}\binom{n}{c}^{-1/3}\alpha_{4/3}^{c+1}E|g_c|^{4/3}.$$

Таким образом, при условии (43)

$$E|\sqrt{n}R_n|^{4/3} = O(n^{-1/3}), \quad n \to \infty. \tag{47}$$

Из (47) и неравенства Чебышева получаем (46).

Далее аналогично можно оценить сумму справа в (45), содержащую $g_2(x, y)$. Это совместно с (41) приводит к (44).

7. Ортогональные разложения U-статистик (координатный метод). Рассмотрим вопрос о предельном распределении U-статистики (2). В пространстве $L^2(\mathfrak{X}, P)$ выберем ортонормированный базис $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ такой, что $\varphi_0 \equiv 1$, и положим $\varphi_{i_1\ldots i_r}(x_1, \ldots, x_r) = \varphi_{i_1}(x_1)\ldots\varphi_{i_r}(x_r)$. Система функций $\{\varphi_{i_1\ldots i_r}\}_{i_1,\ldots,i_r=0}^{\infty}$ образует в пространстве $L^2(\mathfrak{X}^r, P^r)$ ортонормированный базис. Относительно этого базиса определим ряд Фурье функции $g_r \in L^2(\mathfrak{X}^r, P^r)$:

$$g_r = \sum_{(i_1,\ldots,i_r)=1}^{\infty} f_r(i_1, \ldots, i_r)\,\varphi_{i_1\ldots i_r}, \tag{48}$$

с коэффициентами Фурье $f_r(i_1, \ldots, i_r) = E(g_r(X_1, \ldots, X_r)\,\varphi_{i_1}(X_1)\ldots\varphi_{i_r}(X_r))$. Положим

$$\eta_\infty = \binom{m}{r}\sum_{(i_1,\ldots,i_r)=1}^{\infty} f_r(i_1, \ldots, i_r)\prod_{i=1}^{\infty} H_{\gamma(i)}(\tau_i), \tag{49}$$

где $H_k(x)$ — полином Эрмита порядка k, $\tau_1, \tau_2, \ldots$ — независимые стандартные нормальные случайные величины, $\gamma(i)$ есть число появлений индекса i в последовательности $i_1, \ldots, i_r$. Так как $g_r \in L^2$, то ряд в (49) сходится в L^2.

Теорема 3. *Пусть ядро Φ ранга $r \geqslant 1$ удовлетворяет при всех $c \geqslant r$ условиям*

$$E|g_c|^{\gamma_{rc}} < \infty, \tag{50}$$

где $\gamma_{rc} = 2c/(2c-r)$. *Тогда при* $n \to \infty$ *имеет место слабая сходимость*

$$n^{r/2}(U_n - \theta) \xrightarrow{d} \eta_\infty. \tag{51}$$

Доказательство. Запишем (16) в виде

$$U_n - \theta = \binom{m}{r} U_{nr} + Q_n, \tag{52}$$

где $Q_n = \sum\limits_{c=r+1}^{n} \binom{m}{c} U_{nc}$.

Можно показать, что при $n \to \infty$

$$n^{r/2} Q_n \xrightarrow{P} 0. \tag{53}$$

Тогда для справедливости (51) достаточно установить, что

$$n^{r/2} U_{nr} \xrightarrow{d} \sum_{(i_1, \dots, i_r)=1}^{\infty} f_r(i_1, \dots, i_r) \prod_{i=1}^{\infty} H_{\gamma(i)}(\tau_i). \tag{54}$$

Заметим, что в (50) $\gamma_{rr} = 2$. Так что условие (50) при $c = r$ редуцируется к условию $Eg_r^2 < \infty$.

Для доказательства (54) воспользуемся разложением (48). В определении U_{nr} заменим ядро g_r на выражение справа в (48). Тогда

$$n^{r/2} U_{nr} = \alpha_n \sum_{(i_1, \dots, i_r)=1}^{\infty} f_r(i_1, \dots, i_r) S_n(\varphi_{i_1 \dots i_r}), \tag{55}$$

где

$$S_n(\varphi_{i_1 \dots i_r}) = n^{-r/2} \sum_{1 \leqslant j_1 \neq \dots \neq j_r \leqslant n} \varphi_{i_1}(X_{j_1}) \dots \varphi_{i_r}(X_{j_r}),$$

$$\alpha_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1} \dots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right)^{-1}, \quad n \geqslant r.$$

В (55) при $n \to \infty$ имеет место слабая сходимость

$$S_n(\varphi_{i_1 \dots i_r}) \xrightarrow{d} \prod_{i=1}^{\infty} H_{\gamma(i)}(\tau_i). \tag{56}$$

Так как $\alpha_n \to 1$ и ряд в (55) сходится в L^2, то из (55), (56) следует (54), что и доказывает (51).

Следствие 1. *Пусть* $r = 1$ (*невырожденное ядро*). *В этой ситуации предельная случайная величина* η_∞ *в* (49) *равна*

$$\eta_\infty = m \sum_{i=1}^{\infty} f_1(i) H_1(\tau_i) = m \sum_{i=1}^{\infty} f_1(i) \tau_i.$$

Так как $\tau_1, \tau_2, \dots$ — независимые стандартные нормальные случайные величины, то данная сумма также имеет нормальное распределение с дисперсией $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_1^2(i) = Eg_1^2$, что соответствует теореме 6.2.

Следствие 2. *Если* $r = 2$, *то*

$$nU_n \xrightarrow{d} \binom{m}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (\tau_i^2 - 1), \tag{57}$$

где $\{\lambda_i\}$ — *собственные числа оператора*

$$S : f \to E(g_2(X_1, X_2) f(X_2) \mid X_1 = x), \tag{58}$$

действующего из L^2 *в* L^2, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 = Eg_2^2$.

8. Слабая сходимость к многократному стохастическому интегралу. Обозначим через w гауссовскую случайную меру на измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$ с нулевым средним значением и ковариацией $Ew(A)\,w(B) = P(A \cap B)$ для любых множеств A, $B \in \mathcal{A}$. Пусть $g_r \in L^2$, при этом r — ранг ядра Φ. Тогда для g_r существует r-кратный стохастический интеграл Винера—Ито

$$\mathcal{J}_r(g_r) = \int\limits_{\mathfrak{X}} \dots \int\limits_{\mathfrak{X}} g_r(x_1, \dots, x_r)\, w(dx_1) \dots w(dx_r) \tag{59}$$

относительно данной гауссовской случайной меры w.

Выразим слабый предел η_∞ в (51) через $\mathcal{J}_r(g_r)$. Подставляя (48) в правую часть (59), получаем

$$\mathcal{J}_r(g_r) = \sum_{(i_1, \dots, i_r)=1}^{\infty} f_r(i_1, \dots, i_r)\, \mathcal{J}_r(\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_r}). \tag{60}$$

Рассмотрим стохастический интеграл

$$\mathcal{J}_r(\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_r}) = \int\limits_{\mathfrak{X}} \dots \int\limits_{\mathfrak{X}} \varphi_{i_1}(x_1) \dots \varphi_{i_r}(x_r)\, w(dx_1) \dots w(dx_r). \tag{61}$$

Так как суммирование в (60) происходит по всем индексам $i_1, \dots, i_r$ от 1 до ∞, то среди функций $\varphi_{i_1}(x), \dots, \varphi_{i_r}(x)$ в (61) есть совпадающие. Заметим, что значение интеграла $\mathcal{J}_r(\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_r})$ не зависит от перестановки чисел $i_1, \dots, i_r$. Поэтому в последующих промежуточных вычислениях предположим для простоты, что $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_r$. Поскольку в ряду $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_r$ имеются совпадения, то $i_1 = i_2 = \dots = i_{p_1} < i_{p_1+1} = i_{p_1+2} = \dots = i_{p_1+p_2} < i_{p_1+p_2+1} = \dots < i_{p_1} + \dots + p_{k-1}+1 = i_{p_1+ \dots + p_k}$ где $p_1 + p_2 + \dots + p_k = r$, $p_0 = 0$. Следовательно, (61) можно представить в виде

$$\mathcal{J}_r(\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_r}) = \int\limits_{\mathfrak{X}} \dots \int\limits_{\mathfrak{X}} \varphi_{i_1}(x_1) \dots \varphi_{i_1}(x_{p_1})\, \varphi_{i_{p_1+1}}(x_{p_1+1}) \dots \varphi_{i_{p_1+p_2}}(x_{p_1+1}) \dots$$

$$\dots \varphi_{i_{p_1+\dots+p_{k-1}}}(x_{p_1+\dots+p_{k-1}+1}) \dots \varphi_{i_{p_1+\dots+p_{k-1}}}(x_{p_1+\dots+p_k})\, w(dx_1) \dots w(dx_{p_1+\dots+p_k}). \tag{62}$$

К интегралу в (62) применим формулу Ито [31]. В результате получим

$$\mathcal{J}_r(\varphi_1 \dots \varphi_r) = \prod_{s=1}^{k} H_{p_s}\left(\int \varphi_{i_{p_1+\dots+p_{s-1}+1}}(x)\, w(dx)\right). \tag{63}$$

Очевидно, что

$$\prod_{s=1}^{k} H_{p_s}\left(\int \varphi_{i_{p_1+\dots+p_{s-1}+1}}(x)\, w(dx)\right) = \prod_{j=1}^{\infty} H_{\nu(i_1, \dots, i_r, j)}\left(\int \varphi_j(x)\, w(dx)\right), \tag{64}$$

где $\nu(i_1, \dots, i_r; j)$ — число появлений индекса j среди $i_1. \dots, i_r$ и выражение справа не зависит от перестановки индексов $i_1, \dots, i_r$. Так как

$$\tau_j \overset{d}{=} \int\limits_{\mathfrak{X}} \varphi_j(x)\, w(dx), \quad j \geqslant 1,$$

то из (63) и (64) получаем

$$\mathcal{J}_r(\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_r}) \overset{d}{=} \prod_{j=1}^{\infty} H_{\nu(i_1, \dots, i_r; j)}(\tau_j). \tag{65}$$

Подставляя (65) в (60), видим, что

$$\mathcal{J}_r(g_r) \overset{d}{=} \sum_{(i_1, \dots, i_r)=1}^{\infty} f_r(i_1, \dots, i_r) \prod_{j=1}^{\infty} H_{\nu(i_1, \dots, i_r; j)}(\tau_j). \tag{66}$$

Сравнивая (49) и (66), получаем следующее утверждение.

Лемма 6. *Для ядра Φ ранга r и $g_r \in L^2$ в соотношении* (51)

$$\eta_\infty \overset{d}{=} \binom{m}{r} \mathcal{J}_r(g_r), \tag{67}$$

где $\mathcal{J}_r(g_r)$ — многократный стохастический интеграл из (59).

Для вычисления предельного выражения η_∞ по формуле (49) при $r \geqslant 3$ можно применять соотношение

$$\prod_{j=1}^{\infty} H_{\nu(i_1,\ldots,i_r;j)}(\tau_j) =: \tau_{i_1} \ldots \tau_{i_r}:, \tag{68}$$

в котором $:\tau_{i_1} \ldots \tau_{i_r}:$ обозначает полином Вика; при этом

$$:\tau_1^{p_1}\tau_2^{p_2} \ldots \tau_k^{p_k}: = H_{p_1}(\tau_1) H_{p_2}(\tau_2) \ldots H_{p_k}(\tau_k). \tag{69}$$

9. Скорость сходимости. Невырожденное ядро. Вопрос об оценке скорости сходимости в этой ситуации равносилен задаче об оценке скорости сходимости в одномерной центральной предельной теореме для сумм независимых случайных величин.

Теорема 4. *Пусть $r = 1$ и выполнены условия*

$$E\,|g_1(X_1)|^3 < \infty, \tag{70}$$

$$E\,|\Phi(X_1, \ldots, X_m)|^{5/3} < \infty. \tag{71}$$

Тогда при всех $n \geqslant m$ справедливо неравенство

$$\sup_x |P(\sqrt{n}(m^2\sigma_1)^{-1/2}(U_n - \theta) < x) - \Phi(x)| \leqslant C_\Phi n^{-1/2}, \tag{72}$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона, C_Φ — положительная постоянная, зависящая только от m и Φ. В частности, при $m = 2$ $C_\Phi \leqslant 12!\,(a + b)$, где $a = \sigma_1^{-3/2} E\,|g_1(X_1)|^3$, $b = \sigma_1^{-5/3} \times \times E\,|g_2(X_1, X_2)|^{5/3}$.

Доказательство см. в [34]. В основе этого доказательства лежит представление (45) и метод характеристических функций. Так как $r = 1$, то в (45) справа выделяется сумма независимых одинаково распределенных случайных величин $g_1(X_1) + \ldots + g_1(X_n)$. Применительно к этой сумме неравенство Эссеена при условии (70) дает оценку порядка $O(n^{-1/2})$. Условие (71) также гарантирует оценку порядка $O(n^{-1/2})$ при обработке характеристической функции, содержащей все другие слагаемые справа в (45), кроме $g_1(X_1) + \ldots + g_1(X_n)$.

Вырожденное ядро. Если $r \geqslant 2$, то вопрос об оценке скорости сходимости редуцируется к задаче об оценке скорости сходимости в бесконечномерных пространствах [3]. Для простоты предположим, что $m = r = 2$, и приведем основной результат.

Теорема 5. *Если ядро $\Phi(x, y)$ вырожденно и удовлетворяет условию*

$$E\,|\Phi(X_1, X_2)|^3 < \infty, \tag{73}$$

то при $n \to \infty$

$$\sup_x |P(nU_n < x) - P(\eta_\infty < x)| = o(n^{-1/2}). \tag{74}$$

Для доказательства сначала U-статистика (2) с помощью собственных чисел $\{\lambda_j\}$ и собственных функций $\{\varphi_j\}$ интегрального оператора (58) представляется в виде

$$(n-1)U_n = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (S_{nj}^2 - C_{nj}), \tag{75}$$

где $S_{nj} = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} \varphi_j(X_i)$, $C_{nj} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \varphi_j^2(X_i)$. Из (75) видим, что (57) имеет место при $n \to \infty$ в силу того, что $S_{nj} \overset{d}{\to} \tau_j$, $C_{nj} \to 1$ (п. н.).

Представление (75) дает возможность приспособить «характеристический вариант» метода композиций для оценки разности между допредельной характеристической функцией случайной величины $(n-1)\ U_n$ и предельной характеристической функцией, соответствующей выражению справа в (57).

1. *Hoeffding W.* A class of statistics with asymptotically normal distribution // Ann. Math. Statist.— 1948.— **19**, N 3.— P. 293—325.
2. *Serfling R. J.* Approximation theorems of mathematical statistics.— New York : Wiley, 1980.— 371 p.
3. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Асимптотический анализ распределений статистик.— Киев : Наук. думка, 1984.— 304 с.
4. *Hoeffding W.* The strong law of large numbers for U-statistics // Inst. Statist. Mimeo Ser. Univ. North Carolina.— 1961.— N 302.— P. 1—10.
5. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Теория мартингалов.— М. : Наука, 1986.— 512 с.
6. *Hall P.* Central limit theorem for integrated square error of multivariate nonparametric density estimators // J. Multivar. Anal.— 1984.— **14**, N 1.— P. 1—16.
7. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Мартингальная теория U-статистик.— Киев, 1984.— 56 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84. 63).
8. *Боровских Ю. В.* Проблема аппроксимации распределений U-статистик и функционалов Мизеса. I, II.— Киев, 1980.— 52 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 80.6; 80.7).
9. *Sen P. K.* Sequential Nonparametrics: invariance principles and statistical inference.— New York : Wiley, 1981.— 421 p.
10. *Chatterji S. D.* An L^p-convergence theorem // Ann. Math. Statist.— 1969.— **40**, N 6.— P. 1068—1070.
11. *Dharmadhikari S. M., Fabian V., Jogdeo K.* Bounds on the moments of martingales // Ibid.— 1968.— **39**, N 6.— P. 1719—1723.
12. *Berk R. H.* Limiting behavior of posterior distributions when the model is incorrect // Ibid.— 1966.— **37**, N 1.— P. 51—58.
13. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Центральная предельная теорема для U-статистик в гильбертовом пространстве // Докл. АН УССР.— 1987.— № 3.— С. 16—19.
14. *Gregory G. G.* Large sample theory for U-statistics and tests of fit // Ann. Statist. 1977.— **5**, N 1.— P. 110—123.
15. *Rubin H., Vitale R. A.* Asymptotic distribution of symmetric statistics // Ibid.— 1980.— **8**, N 1.— P. 165—170.
16. *Janson S.* The asymptotic distribution of degenerate U-statistics // Uppsala Univ., Dep. Math., Techn.— Rept.— 1979.— N 5.— P. 1—17.
17. *Janson S.* The asymptotic distribution of incomplete U-statistics // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.— 1984.— **66**, N 4.— P. 495—505.
18. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Слабая сходимость U-статистик к многократному стохастическому интегралу в гильбертовом пространстве // Докл. АН УССР.— 1987.— № 4.— С. 9—13.
19. *Weber N. C.* Central limit theorems for a class of symmetric statistics // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1983.— **94**, N 2.— P. 307—313.
20. *Rosen B.* A note on asymptotic normality of sums of higher dimensionally indexed random variables // Ark. mat.— 1969.— **8**, N 1.— P. 33—43.
21. *Rosenblatt M.* Polinomials in Gaussian variables and infinite divisibility? // Contribs Probab.— New York: Acad. press, 1981.— P. 139—142.
22. *Гирко В. Л.* Предельные теоремы для функций случайных величин.— Киев : Вища шк., 1983.— 207 с.
23. *Mori T. F.* On a Hoeffding — type problem // Lect. Notes Statist.— 1981.— 8.— P. 174—181.
24. *Es van Bert.* On the weak limits of elementary symmetric polinomials // Ann. Probab.— 1986.— **14**, N 2.— P. 677—695.
25. *Avram F., Taqqu M. S.* Symmetric polynomials of random variables attracted to an infinitely divisible law // Probab. Theor. Rel. Fields.— 1986.— **71**, N 4.— P. 491—500.
26. *Золотарев В. М.* О случайных симметрических полиномах // Вероятност. распределения и мат. статистика.— Ташкент: Фан, 1986.— С. 170—188.
27. *Сейдель Л.* К вопросу о предельных распределениях случайных симметрических функций // Теория вероятностей и ее применения.— 1986.— **31**, № 4.— С. 671—684.
28. *Mises R.* On the asymptotic distributions of differentiable statistical functions // Ann. Math. Statist.— 1947.— **18**, N 2.— P. 309—348.
29. *Dynkin E. B., Mandelbaum A.* Symmetric statistics, Poisson point processes and multiple Wiener integrals // Ann. Statist.— 1983.— **11**, N 3.— P. 739—745.
30. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Предельное выражение U-статистики многократным интегралом Винера—Ито // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1987.— № 2.— С. 16—18.
31. *Ito K.* Multiple Wiener integral // J. Math. Soc. Jap.— 1951.— **3**, N 1.— P. 157—169.
32. *Филиппова А. А.* Теорема Мизеса о предельном поведении функционалов от эмпирических функций распределения и ее статистические применения // Теория вероятностей и ее применения.— 1962.— **7**, № 1.— С. 26—60.
33. *Mandelbaum A., Taqqu M. S.* Invariance principle for symmetric statistics // Ann. Statist.— 1984.— **12**, N 2.— P. 483—496.

34. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Аппроксимация невырожденных U-статистик // Теория вероятностей и ее применения.— 1985.— **30**, № 3.— С. 417—426.
35. *Götze F.* Expansions for von Mises functionals // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.— 1984.— **65**, N 4.— P. 599—625.
36. *Боровских Ю. В.* Теория U-статистик в гильбертовом пространстве.— Киев, 1986.— 56 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.78).

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 19.03.87