УДК 519.21

А. Я. Дороговцев, А. Г. Кукуш

Асимптотическое поведение решения задачи Коши для стохастического уравнения параболического типа

В настоящей работе приведены условия сходимости с вероятностью 1 к 0 при $t \to +\infty$ решений и некоторых функций от решений уравнения параболического типа с «белым шумом» в правой части. Работа является продолжением статей [1], где получены условия стабилизации с вероятностью 1 решений одномерного параболического уравнения, и [2], в которой изучалось поведение решений абстрактных стохастических уранений. Проблемы стабилизации решений уравнений в частных производных представляют значительный интерес, обзор большого числа работ, относящихся к детерминированным задачам, содержится в [3]. Поведение решений стохастических уравнений изучено меньше; кроме работ, описанных в [1, 2], отметим статью [4], содержащую условия стабилизации статистических решений гиперболических уравнений.

1. Уравнение с постоянным оператором. Пусть H, X — сепарабельные гильбертовы пространства; $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$ — полное вероятностное пространство, $\{\mathfrak{F}_t$ — поток σ-алгебр, пополненных по мере P; $\{w(t)\}$ — винеровский процесс со значениями в X и ковариационным оператором S [5, с. 46], согласованный с потоком σ-алгебр $\{\mathfrak{F}_t\}$ (здесь S — ядерный положительный оператор). Пусть заданы также положительный самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ в H с плотной областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ и дискретным спектром; функции $f: [0, +\infty) \times H \to H$, $\sigma: [0, +\infty) \times H \to \mathcal{L}(X, H)$.

Обозначим через $\|\cdot\|$ как норму в H, так и обычную операторную норму; $\|\cdot\|_2$ есть операторная норма Гильберта — Шмидта в H. Рассмотрим в пространстве H задачу Коши

$$dx(t)/dt + \mathcal{A}x(t) = f(t, x(t)) + \sigma(t, x(t))\dot{w}(t), \qquad t > 0, \tag{1}$$

$$x(0) = x_0. \tag{2}$$

Здесь x_0 есть $\mathfrak{F}_0$-измеримый случайный элемент в H, с вероятностью 1 принадлежаций $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ и такой, что $E\|x_0\|^2 < +\infty$.

Существует несколько подходов к математически корректной постановке задачи (1), (2). Следуя [2, 6], дадим несколько определений ее решений. Отметим, что конструкция используемого при этом стохастического интеграла по процессу $\{w(t)\}$ содержится, например, в [5].

Определение 1. *Сильным решением задачи* (1), (2) *называется случайный процесс* $\{x(t), t \geqslant 0\}$, $\mathfrak{F}_t$ *-согласованный и такой, что при каждом* $t \geqslant 0$ *с вероятностью* 1 *выполнены соотношения*:

1) $x(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$;

2) $x(t) = x_0 - \int\limits_0^t \mathcal{A}x(s)\,ds + \int\limits_0^t f(s, x(s))\,ds + \int\limits_0^t \sigma(s, x(s))\,dw(s)$.

Определение 2. *Обобщенным решением задачи* (1), (2) *называется случайный процесс* $\{x(t), t \geqslant 0\}$, $\mathfrak{F}_t$*-согласованный и такой, что при каждом* $t \geqslant 0$ *с вероятностью* 1 *выполнены условия*:

1) $x(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$;

2) *справедливо равенство*

$$x(t) = e^{-\mathcal{A}t}x_0 + \int\limits_0^t e^{-\mathcal{A}(t-s)}f(s, x(s))\,ds + \int\limits_0^t e^{-\mathcal{A}(t-s)}\sigma(s, x(s))\,dw(s); \tag{3}$$

3) *процесс* $\{\sqrt{\mathcal{A}}x(t)\}$ *сильно непрерывен*.

Предположим, что спектр оператора $\mathcal{A}$ отделен от нуля, т. е. при некотором $a > 0$ $(\mathcal{A}h, h) \geqslant a\|h\|^2$, $h \in H$, где $(\cdot, \cdot)$ есть скалярное произведение в H. Введем пространство $V = \mathcal{D}(\sqrt{\mathcal{A}})$ с нормой $\|f\|_V = \|\sqrt{\mathcal{A}}f\|$, $f \in V$. Оператор $\mathcal{A}$ порождает непрерывный оператор $\tilde{\mathcal{A}}: V \to V^*$, действующий по правилу $\langle\tilde{\mathcal{A}}v_1, v_2\rangle = (\sqrt{\mathcal{A}}v_1, \sqrt{\mathcal{A}}v_2)$, $\{v_1, v_2\} \subset V$. Рассмотрим на $[0, +\infty) \times \Omega$ эволюционное стохастическое уравнение

$$v(t, \omega) = x_0(\omega) - \int\limits_0^t \tilde{\mathcal{A}}v(s, \omega)\,ds +$$

$$+ \int\limits_0^t f(s, v(s, \omega))\,ds + \int\limits_0^t \sigma(s, v(s, \omega))\,dw(s, \omega). \tag{4}$$

Определение 3. *V-решением задачи* (1), (2) *называется функция* v *со значениями в* V, *определенная на* $[0, +\infty) \times \Omega$, *измеримая по* (t, ω), $\mathfrak{F}_t$*-согласованная и удовлетворяющая неравенству*

$$\forall T > 0: E\int\limits_0^T \|v(t, \omega)\|_V^2 dt < +\infty$$

и равенству (4), *понимаемому как равенство элементов* V^* *при почти всех* $(t, \omega) \in [0, +\infty) \times \Omega$ $(\mathrm{mod}\ \lambda \times P)$, *где* λ *мера Лебега*.

Определение. 4. *H-решением задачи* (1), (2) *называется функция* u *со значениями в* H, *определенная на* $[0, +\infty) \times \Omega$, *с вероятностью* 1 *сильно непрерывная в* H *по* t, $\mathfrak{F}_t$*-согласованная и такая, что*: 1) *для почти всех* (t, ω) $u(t, \omega) \in V$ *при каждом* $T > 0$ $E\int\limits_0^T \|u(t)\|_V^2 dt < \infty$; 2) *существует множество* $\Omega' \subset \Omega$ *полной вероятности, на котором при всех* $t \geqslant 0$ *функция* u *удовлетворяет уравнению* (4), *где равенство понимается как равенство элементов* V^*

Введем следующие ограничения на коэффициенты уравнения (1):

1) при каждом $x \in H$ функция σ непрерывна по t, причем $\| f(t, \bar{0}) \|^2 + \| \sigma(t, \bar{0}) \|^2 \leqslant c_1(t)$, $t \geqslant 0$; $c_1 \in L_\infty([0, +\infty)) \cap L_1([0, +\infty))$, $\bar{0}$ — нулевой элемент в H;

2) $\| f(t, x) - f(t, y) \|^2 + \| \sigma(t, x) - \sigma(t, y) \|^2 \leqslant c_2 \| x - y \|^2$, $t \geqslant 0$, $\{x, y\} \subset H$, c_2 не зависит от t;

3) $\| f(t, x) - f(s, x) \| \leqslant c_3(T) | t - s |^\theta$, $\{t, s\} \subset [0, T]$, $x \in H$, $T > 0$, где $\theta > 0$ — некоторый фиксированный показатель;

4) при $t > 0$, $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ $\sigma(t, x) y \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, причем $\| \mathcal{A}\sigma(t, x) \| \leqslant \varphi_1(t) \| \mathcal{A}x \| + \varphi_2(t)$, $t > 0$, $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, где $\varphi_i \in L_1^{\mathrm{loc}}$, $i = 1, 2$;

5) при $t > 0$, $x \in V$ $(f(t, x) y \in V$, $\sigma(t, x) \in V$, причем $\| \sqrt{\mathcal{A}}\sigma(t, x) \|^2 \leqslant \alpha_1 \| \sqrt{\mathcal{A}} x \|^2 + \alpha_2(t)$, $\| \sqrt{\mathcal{A}} f(t, x) \| \leqslant \beta_1(t) \| \sqrt{\mathcal{A}} x \| + \beta_2(t)$, $t > 0$, $x \in V$, где α_1 от t не зависит, $\{\alpha_2, \beta_2\} \subset L_1([0, +\infty))$, $\beta_1 \in L_2([0, +\infty))$.

Мы будем использовать также следующее усиление условия 2:

2′) $\| f(t, x) - f(t, y) \|^2 + \| \sigma(t, x) - \sigma(t, y) \|^2 \leqslant c_2(t) \| x - y \|^2$, $\{x, y\} \subset H$, $t \geqslant 0$; $c_2 \in L_\infty([0, +\infty))$, $c_2(t) \to 0$, $t \to +\infty$.

Условия 1—4 обеспечивают существование, единственность и совпадение сильного и обобщенного решений задачи (1), (2). Обобщенное решение в смысле [2] отличается от обобщенного решения в смысле определения 2 тем, что в [2] требуется непрерывность процесса $\{x(t)\}$, а не процесса $\{\sqrt{A}\, x(t)\}$. Мы покажем в дальнейшем, что при наших ограничениях обобщенное решение в смысле [2] станет обобщенным в смысле определения 2. Воспользуемся ниже результатами [2], где условия 1—4 обеспечивали сходимость с вероятностью 1 $\| x(t) \| \to 0$, $t \to +\infty$. Условие 5 позволит получить более сильный результат — сходимость $\| \sqrt{\mathcal{A}} x(t) \| \to 0$, $t \to +\infty$. При этом полезными оказываются свойства V- и H- решений. Формулируемый ниже результат обобщает теорему 4 [1].

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1, 2′, 3—5. *Тогда все* 4 *решения задачи Коши* (1), (2) *существуют, единственны и совпадают с точностью до стохастической эквивалентности, причем для обобщенного решения* $\{x(t)\}$ *с вероятностью* 1 *справедливы соотношения*

$$\| \sqrt{\mathcal{A}} x(t) \| \to 0, \quad t \to +\infty, \quad \int_0^{+\infty} \| \sqrt{\mathcal{A}} x(t) \|^2 dt < +\infty. \tag{5}$$

Доказательство проведем в несколько этапов.

1.1. Совпадение решений. Существование и единственность решений в смысле определений 1, 3, 4 и обобщенного в смысле [2] доказаны в [2, 6]. Совпадение сильного и обобщенного в смысле [2] решения доказано в [2]. V- и H-решения совпадают согласно [6, с. 106]. Сильное решение и V-решение совпадают по замечанию к теореме 2.1 [6, с. 106].

1.2. Сходимость интеграла (5). Пусть $\{v(t)\}$, $\{u(t)\}$ — соответственно V- и H-решения. По формуле Ито для квадрата нормы [6, с. 119] на множестве полной вероятности справедливо равенство

$$\| u(t) \|^2 = \| x_0 \|^2 - 2 \int_0^t \langle \tilde{\mathcal{A}} v(s), v(s) \rangle ds + 2 \int_0^t (f(s, v(s)), v(s))\, ds +$$

$$+ 2 \int_0^t (\sigma(s, v(s)), u(s))\, dw(s) + \int_0^t \| \sigma(s, v(s))\, S^{1/2} \|_2^2 ds, \quad t > 0.$$

Переходя к математическому ожиданию и устремляя $t \to +\infty$, имеем

$$2E \int_0^{+\infty} \| v(s) \|_V^2 ds \leqslant E \| x_0 \|^2 + C \int_0^{+\infty} E \| v(s) \|^2 ds < +\infty, \tag{6}$$

где C — некоторая постоянная. Здесь мы воспользовались совпадением решений и тем, что для сильного решения $\{x(t)\}$, как доказано в [2],

$\int_0^{+\infty} E\|x(s)\|^2 ds < +\infty$. Из (6) следует теперь сходимость интеграла (5).

1.3. Совпадение обобщенных решений. Пусть $\{x(t)\}$ — обобщенное решение в смысле [2]. Оно удовлетворяет условиям 1 и 2 определения 2 и непрерывно с вероятностью 1 по норме в H. Применим оператор $\sqrt{\mathcal{A}}$ к слагаемым правой части (3). Получим следующие процессы:

$$\eta_1(t) = \sqrt{\mathcal{A}} e^{-\mathcal{A}t} x_0 = e^{-\mathcal{A}t} (\sqrt{\mathcal{A}} x_0),$$

$$\eta_2(t) = \sqrt{\mathcal{A}} \int_0^t e^{-\mathcal{A}(t-s)} f(s, x(s))\, ds, \tag{7}$$

$$\eta_3(t) = \sqrt{\mathcal{A}} \int_0^t e^{-\mathcal{A}(t-s)} \sigma(s, x(s))\, dw(s), \quad t \geqslant 0.$$

Процесс $\{\eta_1(t)\}$ непрерывен с вероятностью 1. Чтобы исследовать процесс $\{\eta_2(t)\}$, рассмотрим математическое ожидание

$$E \int_0^t \| \sqrt{\mathcal{A}} e^{-\mathcal{A}(t-s)} f(s, x(s)) \|\, ds \leqslant c_1 \int_0^t \frac{e^{-a(t-s)}}{\sqrt{t-s}} E \| f(s, x(s) \|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant c_2 (1 + \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} E \| x(s) \|) \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{t-s}} < +\infty, \quad \{c_1, c_2\} \subset \mathbf{R}.$$

Здесь использованы оценки для нормы $\| \sqrt{\mathcal{A}} e^{-\mathcal{A}\tau} \|$, $\tau > 0$ [7, с. 34]. Отсюда следует корректность определения процесса $\{\eta_2(t)\}$ и справедливость с вероятностью 1 равенства

$$\eta_2(t) = \int_0^t \sqrt{\mathcal{A}} e^{-\mathcal{A}(t-s)} f(s, x(s))\, ds, \quad t > 0,$$

из которого по свойствам интеграла Бохнера следует непрерывность процесса $\{\eta_2(t)\}$. Далее, из принадлежности стохастического интеграла в (7) множеству $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ [2] получаем равенство

$$\eta_3(t) = \int_0^t \sqrt{\mathcal{A}} e^{-\mathcal{A}(t-s)} \sigma(s, x(s))\, dw(s), \quad t > 0, \tag{8}$$

причем данный стохастический интеграл существует в силу условия 5 и совпадения $\{x(t)\}$ с V-решением. Поскольку $\mathcal{A}$ имеет дискретный спектр, существует полная система конечномерных ортопроекторов, коммутирующих с разложением единицы оператора $\mathcal{A}$. С помощью неравенства Дуба и оценок [5, с. 49] можно свести вопрос о существовании непрерывной модификации интеграла (8) к аналогичному вопросу для одномерных стохастических интегралов. Итак, процесс $\{\eta_3(t)\}$ можно также считать непрерывным, а обобщенное решение в смысле [2] совпадает с точностью до стохастической эквивалентности с обобщенным решением в смысле определения 2.

1.4. Сходимость к нулю. Пусть $\{x(t)\}$ — обобщенное решение. Из (3) следует представление $\sqrt{\mathcal{A}} x(t) = \eta_1(t) + \eta_2(t) + \eta_3(t)$, $t \geqslant 0$. Далее все время речь идет о сходимости с вероятностью 1. Процесс $\{\|\eta_1(t)\|\}$ сходится к 0 при $t \to +\infty$ в силу принадлежности $x_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(\sqrt{\mathcal{A}})$ и отделенности спектра $\mathcal{A}$ от нуля.

Из сходимости интеграла (5), условия 5 и совпадения обобщенного и V-решений нетрудно по теореме Лебега получить такую же сходимость для процесса $\{\|\eta_2(t)\|\}$. Наконец, легко проверить, что непрерывный процесс

$$z(t) = \| \eta_3(t) \|^2 - \int_0^t \| \sqrt{\mathcal{A}} \sigma(s, x(s)) \|^2 ds, \quad t \geqslant 0,$$

является субмартингалом. Кроме того, из условия 5 и оценок п. 1.2 доказательства можно заключить, что $\sup_{t\geqslant 0} E|z(t)| < +\infty$. Тогда по теореме о сходимости субмартингалов $z(t)\to z_\infty$, $t\to+\infty$. Отсюда $\|\eta_3(t)\|\to y_\infty$, $t\to +\infty$. С другой стороны, с помощью условия 5 и соотношения (5) легко показать, что $E\|\eta_3(t)\|^2\to 0$, $t\to+\infty$. Следовательно, $\|\eta_3(t)\|\to 0$, $t\to + \infty$, $y_\infty=0$, и теорема полностью доказана.

С помощью теоремы 4 [2] аналогично можно получить следующий результат.

Теорема 2. *Утверждение теоремы* 1 *остается справедливым, если условие* 2′ *заменить условием* 2 *и дополнительно потребовать, чтобы*

$$3c_2(2/a^2+\operatorname{tr} S/a)<1.$$

Замечание 1. Дискретность спектра оператора $\mathcal{A}$ нужна для того, чтобы обеспечить непрерывность процесса $\{\eta_3(t)\}$. Если отбросить это ограничение на спектр, то можно утверждать лишь сходимость $\|\sqrt{\mathcal{A}}x(t)\|\to 0$, $t\to+\infty$ по вероятности. При этом для произвольной последовательности $t(n)\to+\infty \|\sqrt{\mathcal{A}}\,x(t(n))\|\to 0$, $n\to\infty$ с вероятностью 1.

2. Уравнение с переменным оператором. Рассмотрим задачу Коши в H

$$dx(t)/dt+\mathcal{A}(t)x(t)=f(t,x(t))+\sigma(t,x(t))\dot{w}(t),\quad t>0, \tag{9}$$

$$x(0)=x_0. \tag{10}$$

Здесь f, σ, x_0 и $\{w(t)\}$ — объекты, удовлетворяющие тем же ограничениям, что и в начале п. 1; вероятностное пространство можно не предполагать полным, а поток σ-алгебр $\{\mathfrak{F}_t\}$ пополненным по мере P. Предположим, что семейство $\{\mathcal{A}(t),\ t>0\}$ операторов в H удовлетворяет следующему условию:

6) операторы $\{\mathcal{A}(t)\}$ имеют общую область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}(t))=\mathcal{D}$, $t>0$, являются самосопряженными, причем при некотором $a>0$ $\forall t>0$ $\forall h\in\mathcal{D}$: $(\mathcal{A}(t)h,h)\geqslant a\|h\|^2$ и операторная функция $\mathcal{A}$ сильно дифференцируема в $\mathcal{D}$. При этом $\mathcal{A}(t)$ является производящим оператором сильно непрерывного эволюционного семейства операторов $\{U(t,s),\ s\leqslant t\}$ [8, с. 334]. Справедливо неравенство $\|U(t,s)\|\leqslant e^{-a(t-s)}$, $0\leqslant s\leqslant t<+\infty$.

Определение 5. *Сильным решением задачи* (9), (10) *называется случайный процесс* $\{x(t),\ t\geqslant 0\}$, $\mathfrak{F}_t$-*согласованный и такой, что при каждом* $t\geqslant 0$ *с вероятностью 1 выполнены соотношения*:

1) $x(t)\in\mathcal{D}$;

2) $x(t)=x_0-\int_0^t\mathcal{A}(s)x(s)\,ds+\int_0^t f(s,x(s))\,ds+\int_0^t\sigma(s,x(s))\,dw(s)$;

3) *процесс* $\{x(t)\}$ *сильно непрерывен.*

Определение 6. *Обобщенным решением задачи* (9), (10) *называется случайный процесс* $\{x(t),\ t\geqslant 0\}$, $\mathfrak{F}_t$-*согласованный и такой, что при каждом* $t\geqslant 0$ *с вероятностью* 1 *выполнено равенство*

$$x(t)=U(t,0)x_0+\int_0^t U(t,s)f(s,x(s))\,ds+\int_0^t U(t,s)\sigma(s,x(s))\,dw(s). \tag{11}$$

Введем следующие ограничения:

7) при некоторых $\beta>0$, $\gamma>1/2$ $\forall\ x\in H$ $\forall\ t>0$

$$\|\mathcal{A}^\beta(t)f(t,x)\|+\|\mathcal{A}^\gamma(t)\sigma(t,x)\|\leqslant c_4(t),$$

где $c_4\in L_\infty^{\text{loc}}$;

8) $\forall x\in H$ $\forall t>0$:

$$\|f(t,x)\|\leqslant f_1(t)+f_2(t)\|x\|,\quad \|\sigma(t,x)\|^2\leqslant\sigma_1(t)+\sigma_2(t)\|x\|^2,$$

где $\{f_1, \sigma_1, \sigma_2\} \subset L_1([0, +\infty)) \cap L_\infty^{\mathrm{loc}}$, $\quad f_2 \in L_1([0, +\infty)) \cap L_\infty([0, +\infty))$; $\operatorname{tr} S > 0$, $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\ \sigma_2(t) < 2a(\operatorname{tr} S)^{-1}$;

9) $\| f(t, x) - f(t, y)\|^2 + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\|^2 \leqslant k(t)\|x - y\|^2$, $t > 0$, $\{x, y\} \subset H$, где $k \in L_\infty^{\mathrm{loc}}$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* 6—9. *Тогда сильное и обобщенное решения задачи Коши* (9), (10) *существуют, единственны и совпадают с точностью до стохастической эквивалентности, причем для сильного решения* $\{x(t)\}$ *имеет место сходимость с вероятностью* 1 $\|x(t)\| \to 0$, $t \to +\infty$.

Доказательство. Существование, единственность и совпа: ен:е решений доказаны в [8, с. 334]. Осталось доказать сходимость к нулю ı о :мы обобщенного решения. Идейно доказательство этого утверждения напоминает доказательство теоремы 1, а также теоремы 2 [1]. Мы выделим лишь основные моменты.

2.1. Ограниченность моментов $u(t) = E\|x(t)\|^2$, $t \geqslant 0$. Локальная ограниченность этих моментов следует из построения обобщенного решения [8]. Пусть $L > 0$, $\varepsilon > 0$. Оценим вторые моменты слагаемых в правой части (11) при $t > L$. Имеем

$$E\|U(t, 0)x_0\|^2 \leqslant e^{-2at} E\|x_0\|^2,$$

$$E\left\|\int_L^t U(t, s) f(s, x(s))\, ds\right\|^2 \leqslant \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\int_L^t e^{-a(t-s)} f_1(s)\, ds\right)^2 + (1+\varepsilon)\int_L^{+\infty} f_2(s)\, ds \int_L^t e^{-2a(t-s)} f_2(s) E\|x(s)\|^2 ds,$$

$$E\left\|\int_l^t U(t, s)\sigma(s, x(s))\, dw(s)\right\|^2 \leqslant \int_L^t \|\sigma(s, x(s))\|^2 e^{-2a(t-s)} ds \operatorname{tr} S.$$

Из (11) и данных оценок имеем

$$u(t) \leqslant ca(t) + \int_L^t b(t, s) u(s)\, ds, \quad t > L. \tag{12}$$

Здесь c не зависит от t;

$$a(t) = e^{-2at} + \left(\int_0^t e^{-a(t-s)} f_1(s)\, ds\right)^2 + \left(\int_0^L e^{-a(t-s)} f_2(s)\, ds\right)^2 + \int_0^t e^{-2a(t-s)}\sigma_1(s)\, ds + \int_0^L e^{-2a(t-s)}\sigma_2(s)\, ds,$$

$$b(t, s) = (1+\varepsilon)\left(\int_L^{+\infty} f_2(s)\, ds\right) e^{-2a(t-s)} f_2(s) + \sigma_2(s) e^{-2a(t-s)} \operatorname{tr} S.$$

В неравенстве (12) сделаем замену $u(s)e^{2as} = v(s)$, $s > 0$. Получим

$$v(t) \leqslant c\tilde{a}(t) + \int_L^t b(s) v(s)\, ds, \quad t \geqslant L.$$

Здес: $\tilde{a}(t) = a(t)e^{2at}$,

$$b(s) = (1+\varepsilon)\left(\int_L^{+\infty} f_2(s)\, ds\right) f_2(s) + \sigma_2(s)\operatorname{tr} S.$$

Пользуясь условием 8, выберем L так, чтобы при $s \geqslant L$ $b(s) \leqslant 2a$. Имеем

$$v(t) \leqslant c\tilde{a}(t) + 2a\int_L^t v(s)\, ds, \quad t \geqslant L.$$

Применяя к функции v обобщенное неравенство Гронуолла [7, с. 206] и возвращаясь к моментной функции u, получаем

$$u(t) \leqslant ca(t) + 2ace^{-2aL} \int_L^t a(s)\, ds, \quad t \geqslant L. \tag{13}$$

Наконец, из условий теоремы нетрудно вывести, что $a \in L_1([0, +\infty)) \cap \cap L_\infty([0, +\infty))$. Ограниченность функции u следует теперь из (13).

2.2. Сходимость $E\|x(t)\|^2 \to 0$, $t \to +\infty$ выводится из (12) по теореме Лебега об интегрируемой мажоранте.

2.3. Сходимость $\|x(t)\| \to 0$, $t \to +\infty$. С вероятностью 1 имеем

$$\|U(t, 0)x_0\| \leqslant e^{-at}\|x_0\| \to 0, \quad t \to +\infty,$$

$$\left\| \int_0^t U(t, s) f(s, x(s))\, ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t e^{-a(t-s)} (f_1(s) + f_2(s)\|x(s)\|)\, ds \to 0, \quad t \to +\infty,$$

по теореме Лебега, поскольку $f_1 \in L_1([0, +\infty))$ и почти наверное

$$\int_0^{+\infty} f_2(s)\|x(s)\|\, ds < +\infty.$$

Этот интеграл сходится, так как

$$E \int_0^{+\infty} f_2(s)\|x(s)\|\, ds \leqslant \sup_{s \geqslant 0} E\|x(s)\| \int_0^{+\infty} f_2(s)\, ds < +\infty.$$

Далее, из п. 2.2 и равенства (11) следует, что процесс

$$\eta(t) = \left\| \int_0^t U(t, s)\sigma(s, x(s))\, dw(s) \right\|^2, \quad t \geqslant 0,$$

сходится к нулю по вероятности при $t \to +\infty$. С другой стороны, точно так же, как и в п. 1.4, по свойствам субмартингалов $\eta(t) \to \eta_\infty$ почти наверное. Значит, $\eta_\infty = 0$, и обращение к равенству (11) завершает доказательство теоремы.

З а м е ч а н и е 2. Требование принадлежности $x_0 \in \mathcal{D}$ в условиях теоремы 3 можно отбросить. При этом под обобщенным решением следует понимать непрерывный, $\mathfrak{F}_t$ -согласованный процесс $\{(x(t), t > 0\}$ со значениями в $\mathcal{D}$ и при каждом $t > 0$ с вероятностью 1 удовлетворяющий равенству (11). Для такого решения сходимость $\|x(t)\| \to 0$, $t \to +\infty$ также будет иметь место. Обобщенное решение существует, единственно и совпадает с сильным решением в том смысле, что для произвольных $0 < \tau < t$ с вероятностью 1

$$x(t) - x(\tau) = \int_\tau^t \mathcal{A}(s)x(s)\, ds + \int_\tau^t f(s, x(s))\, ds + \int_\tau^t \sigma(s, x(s))\, dw(s).$$

Доказательство последнего утверждения содержится в [8, с. 334].

З а м е ч а н и е 3. Теоремы 1—3 могут применяться к параболическим задачам математической физики с возмущением типа «белого шума» и однородными граничными условиями. При этом оператор $\mathcal{A}(t)$ есть дифференциальный оператор порядка $2s$, $s \in \mathbf{N}$, $t > 0$, удовлетворяющий требованию сильной эллиптичности [3]. Теоремы 1, 2 позволяют получать сходимость решения к нуль-функции в норме соболевского пространства W_2^s.

1. *Дороговцев А. Я., Ивасишен С. Д., Кукуш А. Г.* Асимптотическое поведение решений уравнения теплопроводности с «белым шумом» в правой части//Укр. мат. журн.—1985.— **37**, № 1.— С. 13—20.
2. *Дороговцев А. Я.* Асимптотическое поведение решений задачи Коши для абстрактных стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1988.— Вып. 39.— С. 31—34.
3. *Крейн С. Г., Хазан М. И.* Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве // Итоги науки и техники. Мат. анализ / ВИНИТИ.— 1983.— **21**.— С. 130—264.
4. *Ратанов Н. Е.* Стабилизация статистических решений гиперболических уравнений второго порядка // Успехи мат. наук.— 1984.— **235**, № 1.— С. 151—152.
5. *Розовский Б. Л.* Эволюционные стохастические системы.— М. : Наука, 1983.— 208 с.
6. *Крылов Н. В., Розовский Б. Л.* Об эволюционных стохастических уравнениях // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. математики./ ВИНИТИ.— 1979.— **14**.— С. 71—146.
7. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений.— М. : Мир, 1985.— 376 с.
8. *Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах.— М. : Наука, 1983.— 383 с.

Киев. ун-т Получено 10.06.86