УДК 517.432

Ю. Е. Бохонов

Коммутирующие самосопряженные расширения систем эрмитовых операторов

Вопросы о возможности построения коммутирующих самосопряженных расширений коммутирующих в некотором смысле эрмитовых операторов давно изучался в связи с проблемой продолжения положительно определенных ядер и их интегральных представлений. До настоящего времени рассматривались, как правило, случаи, когда такие продолжения возможны в том пространстве, в котором действуют операторы [1—3]. В предлагаемой работе коммутирующее самосопряженное расширение строится с выходом в более широкое гильбертово пространство. Рассуждения достаточно проводить для двух операторов.

Пусть имеются цепочки гильбертовых сепарабельных пространств над полем комплексных чисел $\mathbf{C}: H_-^{(j)} \supseteq H_0^{(j)} \supseteq H_+^{(j)}$, $j = 1, 2$, с инволюцией $h \to \bar{h}$. По ним образуем пространства $H_- = H_-^{(1)} \otimes H_-^{(2)}$, $H_0 = H_0^{(1)} \otimes H_0^{(2)}$, $H_+ = H_+^{(1)} \otimes H_+^{(2)}$, и цепочку $H_- \otimes H_- \supseteq H_0 \otimes H_0 \supseteq H_+ \otimes H_+$. Обобщенным положительно определенным (п. о.) ядром называется элемент $K \in H_- \otimes H_-$ такой, что $(K, u \otimes \bar{u})_0 \geqslant 0$ для $u \in H_+$. В дальнейшем будем предполагать, что K невырождено, т. е. из $(K, u \otimes \bar{u})_0 = 0$ для $u \in H_+$ следует $u = 0$. Построим новое гильбертово пространство H, пополнив

H_+ по новому скалярному произведению

$$\langle u, v\rangle = (K_1 v \otimes \bar{u})_0, \quad u, v \in H_+. \tag{1}$$

Замыкание в H будем обозначать $[\cdot]$.

Пусть в $H_+^{(j)}$ действует оператор B_j с плотной в $H_+^{(j)}$ областью определения $D(B_j)$, $j = 1, 2$. Построим операторы

$$C_1 = B_1 \otimes \mathbf{1}, \quad C_2 = \mathbf{1} \otimes B_2, \quad D(C_1) = D(B_1) \otimes H_+^{(2)}, \quad D(C_2) = H_+^{(1)} \otimes D(B_2). \tag{2}$$

Будем считать, что операторы C_1 и C_2 эрмитовы в H. Они в определенном смысле коммутируют: $C_1C_2u = C_2C_1u$, если $u \in D(C_1) \cap D(C_2)$. Задача состоит в построении их коммутирующих самосопряженных расширений.

Зафиксируем $w \in H_+^{(1)}$, $w \neq 0$ и рассмотрим для u, $v \in H_+^{(2)}$ скалярное произведение

$$\langle u, v\rangle_w = \langle w \otimes u, w \otimes v\rangle. \tag{3}$$

(В силу невырожденности ядра K из $\langle u, u\rangle_w = 0$ следует $u = 0$.) Пополнив $H_+^{(2)}$ по новой норме, определяемой (3), получим гильбертово пространство, которое обозначим $H_w^{(2)}$. Аналогично определяется пространство $H_u^{(1)}$, где $u \in H_+^{(2)}$.

Введем следующие обозначения: $\mathfrak{R}^{(2)}(z) = H_+^{(1)} \otimes (B_2 - z\mathbf{1})D(B_2)$, $\mathfrak{R}_w^{(2)}(z) = w \otimes (B_2 - z\mathbf{1})\,D(B_2)$, $w \in H_+^{(1)}$, $\mathfrak{N}^{(2)}(z)$ — ортогональное дополнение к $\mathfrak{R}^{(2)}(z)$, дефектное подпространство оператора C_2, $\mathfrak{N}_w^{(2)}(z)$ — дефектное подпространство сужения замыкания C_2 в $[w \otimes H_+^{(2)}]$, $N_w^{(2)}(z)$ — дефектное подпространство замыкания B_2 в $H_w^{(2)}$. Аналогичные обозначения вводятся в случае операторов C_1 и B_1.

Определим линейный оператор $S_w : H_w^{(2)} \to [w \otimes H_+^{(2)}]$ при $u \in H_+^{(2)}$: $S_w u = w \otimes u$, $w \in H_+^{(1)}$. По определению $H_w^{(2)}$ он является изометрическим и по непрерывности продолжается до унитарного оператора (см., например, [4, с. 139]). Отсюда следует, что, если A — оператор с плотной в $H_+^{(2)}$ областью определения и $C = \mathbf{1} \otimes A$ допускает замыкание в H, то при $u \in D(A)$

$$S_w A u = C S_w u. \tag{4}$$

Замыкая операторы, убеждаемся в справедливости равенства при $u \in H_w^{(2)}$.

Лемма 1. *Если $u \in N_w^{(2)}(z)$ при $w \in H_+^{(1)}$, то $S_w u \in \mathfrak{N}_w^{(2)}(z)$.*

Доказательство. Из $B_2^* u = \bar{z} u$ и (4) следует $C_2^* S_w u = S_w B_2^* u = \bar{z} S_w u$.

Заметим, что справедливо также обратное утверждение.

Теорема. *Пусть операторы C_1 и C_2 эрмитовы в H, причем при любом $w_2 \in H_+^{(2)}$ замыкание в $[H_+^{(1)} \otimes w_2]$ сужения C_1 на $D(B_1) \otimes w_2$ является максимальным оператором при некотором невещественном z_1 и одно из его дефектных чисел равно нулю при всех $w_2 \in H_+^{(2)}$.*

Тогда существует коммутирующее самосопряженное расширение этих операторов с выходом в более широкое гильбертово пространство.

Доказательство. Из максимальности сужения замыкания C_1 в $[H_+^{(1)} \otimes w_2]$ при любом $w_2 \in H_+^{(2)}$ следует максимальность замыкания C_1 в H (для доказательства следует повторить рассуждения [1, с. 634]).

Рассмотрим преобразования Кэли операторов C_1 и C_2: $V_j(z_j) = (C_j - \bar{z}_j\mathbf{1})(C_j - z_j\mathbf{1})^{-1}$, $\operatorname{Im} z_j \neq 0$, $j = 1, 2$. Они осуществляют изометрические отображения следующих множеств:

$$V^{(j)}(z_j) : (C_j - z_j\mathbf{1})\,D(C_j) \to (C_j - \bar{z}_j\mathbf{1})\,D(C_j). \tag{5}$$

Множество $(C_1 - z_1\mathbf{1})\,D(C_1)$ по условию плотно в H, поэтому $V^{(1)}(z_1)$ по непрерывности продолжается на все H. Если же замыкание C_1 является самосопряженным оператором, то указанное продолжение будет унитарным.

Пусть $w_1 \in D(B_1)$. Положим $x = (B_1 - z_1\mathbf{1})\,w_1$, $y = (B_1 - \bar{z}_1\mathbf{1})\,w_1$. При этом $V^{(1)}(z_1)\,(x \otimes w_2) = y \otimes w_2$ для $w_2 \in H_{+}^{(2)}$. Сужение оператора $V^{(1)}(z_1)$, действующее из $[x \otimes H_{+}^{(2)}]$ в $[y \otimes H_{+}^{(2)}]$, является унитарным оператором. Определим оператор

$$V_{x,y}^{(1)}(z_1) \equiv S_y^{-1} V^{(1)}(z_1)\, S_x : H_x^{(2)} \to H_y^{(2)}. \tag{6}$$

Он будет унитарным, причем для $u \in H_{+}^{(2)}$ $V_{x,y}^{(1)}(z_1)\,u = u$. Из унитарности $V_{x,y}^{(1)}(z_1)$ следует эквивалентность норм в $H_x^{(2)}$ и $H_y^{(2)}$, причем в этих пространствах плотно множество $H_{+}^{(2)}$, поэтому можно считать, что они совпадают [5, с. 25 — 27]. Таким образом, можно отождествить элементы $u_x \in H_x^{(2)}$ и $u_y = V_{x,y}^{(1)}(z_1)\,u_x \in H_y^{(2)}$.

Из равенства $V^{(1)}(z_1)\,(x \otimes (B_2 - z_2\mathbf{1})\,w_2) = y \otimes (B_2 - z_2\mathbf{1})\,w_2$ следует инвариантность $\mathfrak{R}^{(2)}(z_2)$ относительно $V^{(1)}(z_1)$, так как в $\mathfrak{R}^{(2)}(z_2)$ плотны линейные комбинации векторов $x \otimes (B_2 - z_2\mathbf{1})\,w_2$, когда w_1 пробегает $D(B_1)$, а w_2 — $D(B_2)$. Аналогично доказывается инвариантность $\mathfrak{R}^{(2)}(\bar{z}_2)$.

На векторах из линейного множества $(B_1 - z_1\mathbf{1})\,D(B_1) \otimes (B_2 - z_2\mathbf{1})D(B_2)$, плотного в $\mathfrak{R}^{(2)}(z_2)$, операторы $V^{(1)}(z_1)$ и $V^{(2)}(z_2)$ коммутируют (доказательство такое же, как в [1, с. 643]).

Докажем инвариантность $\mathfrak{N}^{(2)}(z_2)$ относительно $V^{(1)}(z_1)$. Прежде всего заметим, что из $u \in \mathfrak{N}_w^{(2)}(z_2)$, где $w \in H_{+}^{(1)}$, следует $u \in \mathfrak{N}^{(2)}(z_2)$. Для этого достаточно доказать ортогональность u любому вектору $(C_2 - z_2\mathbf{1})\,(v \otimes w_2)$ при $v \in H_{+}^{(1)}$, $v \in D(B_2)$. Это следует из равенства

$$\langle (C_2 - z_2\mathbf{1})\,(v \otimes w_2),\, u\rangle = \langle v \otimes w_2,\, (C_2^{*} - \bar{z}_2\mathbf{1})\,u\ = 0.$$

Пусть теперь $S_x u_x \in \mathfrak{N}_x^{(2)}$, $w_2 \in D(B_2)$. Из (6) следует $V^{(1)}(z_1)\,S_x u_x = S_y V_{x,y}^{(1)}(z_1)\,u_x \in H_y$. Из изометричности $V^{(1)}(z_1)$ и инвариантности $\mathfrak{R}^{(2)}(z_2)$ относительно $V^{(1)}(z_1)$ вытекает

$$0 = \langle V^{(1)}(z_1)\,(C_2 - z_2\mathbf{1})\,(x \otimes w_2),\quad V^{(1)}(z_1)\,S_x u_x\rangle = \langle y \otimes w_2,$$
$$(C_2^{*} - \bar{z}_2\mathbf{1})\,V^{(1)}(z_1)\,S_x u_x\rangle,$$

откуда $V^{(1)}(z_1)\,S_x u_x \in \mathfrak{N}_y^{(2)}$, что и завершает доказательство. Аналогично доказывается инвариантность $\mathfrak{N}^{(2)}(\bar{z}_2)$ относительно $V^{(1)}(z_1)$. Отсюда следует, что если $P(\bar{z}_2)$ — ортопроектор в H на $\mathfrak{N}^{(2)}(\bar{z}_2)$, то $P(\bar{z}_2)\,V^{(1)}(z_1) = V^{(1)}(z_1)\,P(\bar{z}_2)$. Пусть $Q(\bar{z}_2)$ — сужение $P(\bar{z}_2)$ на $\mathfrak{N}^{(2)}(z_2)$. Тогда $\tilde{V} = V^{(2)}(z_2) \oplus Q(\bar{z}_2)$ — сжимающий оператор, являющийся продолжением $V^{(2)}(z_2)$ на все H. Согласно результату [6, с. 54] существует коммутирующее унитарное расширение $V^{(1)}(z_1)$ и $V^{(2)}(z_2)$ (причем все целые положительные степени этих продолжений являются продолжениями соответствующих степеней исходных операторов) с выходом в более широкое гильбертово пространство.

Обратное преобразование Кэли дает самосопряженное коммутирующее расширение исходных эрмитовых операторов.

З а м е ч а н и е. Результат справедлив для не более чем счетного множества операторов, где все максимальны, кроме одного. В случае счетного множества операторов нужно применять технику бесконечных тензорных произведений [7].

Можно рассматривать произвольное множество максимальных коммутирующих операторов, не представляющихся в виде тензорных произведений, причем их коммутируемость нужно понимать в смысле коммутируемости преобразований Кэли. Из упомянутого результата [6] следует существование коммутирующего унитарного расширения преобразований Кэли и, следовательно, коммутирующее самосопряженное расширение исходных эрмитовых операторов (с выходом из пространства, где они определены).

Пример. Ограничимся примером п. о. ядра, являющегося обычной функцией $K: \mathbf{R}_+^4 \to \mathbf{C}$, где $\mathbf{R}_+^n = \{(\xi_1, \ldots, \xi_n): \xi_i \geqslant 0, \ i = 1, \ldots, n\}$. Пусть $K \in W_{2,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_+^4)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. Справедливо соотношение

$$(K, \bar{u} \otimes u)_0 \equiv \int\limits_{\mathbf{R}_+^4} K(x, y)\, u(y)\, \bar{u}(x)\, dxdy \geqslant 0. \tag{7}$$

где $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $u \in L_{2,p}(R_+^2) \equiv H_+$, $p(x) = p_1(x_1)\, p_2(x_2) = \exp \sigma N(x_1 + x_2)$, $\sigma > 2$, $N > 0$ (см. [1, с. 669—670]), причем будем предполагать, что вырождения нет, т. е. равенство нулю левой части (7) возможно лишь при $u = 0$.

2. Выполняется оценка

$$|K(x_1, x_2, y_1, y_2)| \leqslant C \exp N(x_1 + x_2 + y_1 + y_2), \ C, N > 0, \tag{8}$$

3. Функция K удовлетворяет уравнениям

$$(\partial/\partial x_1 + \partial/\partial y_1)\, K = 0, \tag{9а}$$

$$(\partial^3/\partial x_2^3 + \partial^3/\partial y_2^3)\, K = 0. \tag{9б}$$

В таком случае справедливо представление

$$K(x, y) = \sum_{k,j=1}^{3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp i(y_1 - x_1)\, \chi_k(y_2, \lambda_2)\, \overline{\chi_j(x_2, \lambda_2)}\, d\sigma_{kj}(\lambda_1, \lambda_2), \tag{10}$$

где χ_j удовлетворяют уравнению $-iu''' = \lambda_2 u$ и начальным условиям $u_k^{(m)}(0, \lambda_2) = \delta_{km}$; $d\sigma_{kj}(\lambda_1, \lambda_2)$ — конечная положительная мера, определяющаяся по K, вообще говоря, неоднозначно.

Из интегрального представления (10) следует возможность продолжения K на все пространство $\mathbb{R}^4$, и такое продолжение не будет, вообще говоря, однозначным. Заметим, что каждое χ_j является линейной комбинацией функций $\psi_r(x_2, \lambda_2) = \exp \alpha_r \sqrt[3]{\bar{\lambda}_2} x_2$, $r = 1, 2, 3$, где α — кубические корни из i.

Убедимся в справедливости представления (10). Заметим, что условия (9а), (9б) обеспечивают эрмитовость в H операторов

$$C_1 = B_1 \otimes \mathbf{1} = -i \frac{\partial}{\partial x_1} \otimes \mathbf{1}, \quad C_2 = \mathbf{1} \otimes B_2 = \mathbf{1} \otimes \left(-i \frac{\partial^3}{\partial x_2^3}\right), \tag{11}$$

$(D(B_j) = C_0^\infty(\mathbf{R}_+),\ j = 1, 2)$, скалярное произведение в H определяется по формуле

$$\langle u, v \rangle = (K, v \otimes \bar{u})_0 = \int\limits_{\mathbf{R}_+^4} K(x, y)\, v(y)\, \bar{u}(x)\, dxdy \tag{7а}$$

на функциях из $H_+ = H_+^{(1)} \otimes H_+^{(2)} = L_{2,p_1}(\mathbf{R}_+) \otimes L_{2,p_2}(\mathbf{R}_+) = L_{2,p}(\mathbf{R}_+^2)$, а затем H_+ пополняется по норме (7) (см., например [1, с. 708]).

Покажем, что замыкания B_1 в $H_{w_2}^{(1)}$ и B_2 в $H_{w_1}^{(2)}$ имеют индексы детекта соответственно (0, 1) (максимальный оператор) и (1, 2) при любых $w_2 \in H_+^{(2)}$, соответственно $w_1 \in H_+^{(1)}$. Будем использовать рассуждения [1, с. 669 — 670].

Пусть $0 \neq h \in L_{2,p_1}(\mathbf{R}_+)$ ортогонально в $H_+^{(1)} \otimes \omega_2$ к $(B_1 - z\mathbf{1})\, D(B_1) \otimes \omega_2$, $\operatorname{Im} z > 0$, т. е. для $u \in D(B_1)$ $\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty (B_1 - z\mathbf{1})\, u(x_1)\, \bar{h}(x_1)\, |w_2(x_2)|^2 p(x)\, dx_1 dx_2 = 0$. Отсюда следует, что $(B_1^* - \bar{z}\mathbf{1})(hp) = 0$, поэтому $h(x_1)\, p_1(x_1) = C \exp i\bar{z}x_1$ и $|h(x_1)|^2 p_1(x_1) = C \times \exp(2i\bar{z} - N)\, x_1$. Выбирая z так, что $\operatorname{Im} z > \sigma N/2 > N$, получаем $\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty |h(x_1)|^2\, |w_2 \times (x_2)|^2 p(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \infty$, а это противоречит выбору $h \in L_{2,p_1}(\mathbf{R}_+)$, поэтому $(B_1 - z\mathbf{1})\, D(B_1) \otimes w_2$ плотно в $H_+^{(1)} \otimes w_2$ и $(B_1 - z\mathbf{1})\, D(B_1)$ — в $H_{w_2}^{(1)}$. Следовательно, $N_{w_2}^{(1)}(z) = \{0\}$. $N_{w_2}(\bar{z})$ порождается функцией $u = \exp(izx_1)$, являющейся решением уравнения $(B_1^* - z\bar{\mathbf{1}})\, u = 0$, $\operatorname{Im} z > 0$, так как при $\operatorname{Im} z > N$

$$\int_{\mathbf{R}_+^4} K(x, y)\, \overline{\exp(izx_1)} \exp(izy_1)\, \overline{w_2(x_2)}\, w_2(y_2)\, dxdy \leqslant C \int_{\mathbf{R}_+^4} \exp(N - \operatorname{Im} z)(x_1 + y_1) \times$$

$$\times \exp N(x_2 + y_2) \left| \overline{w_2(x_2)}\, w_2(y_2) \right| dxdy < \infty.$$

Индекс дефекта оператора B_2 в $H_{w_1}^{(2)}$ вычисляется аналогично.

Согласно доказанной теореме операторы C_1 и C_2 допускают коммутирующее самосопряженное расширение с выходом в более широкое гильбертово пространство. Представление (10) получим теперь, применив, например, теорему 4.1 [1, с. 704].

З а м е ч а н и е. Можно рассматривать примеры п. о. ядер, удовлетворяющих по второй паре переменных уравнениям типа (9б) произвольных порядков, и получать для них интегральные представления типа (10).

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев: Наук. думка, 1965.— 800 с.
2. *Исмагилов Р. С.* Самосопряженные расширения системы коммутирующих симметрических операторов // Докл. АН СССР.— 1960.— **133**, № 3.— С. 511—514.
3. *Исмагилов Р. С.* Самосопряженные расширения коммутирующих симметрических операторов // Успехи мат. наук.— 1962.— **17**, № 1.— С. 177—181.
4. *Морен К.* Методы гильбертова пространства.— М. : Мир, 1965.— 570 с.
5. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций.— М. : Физматгиз, 1958.— 307 с.
6. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве.— М. : Мир, 1970.— 431 с.
7. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных.— Киев : Наук. думка, 1978.— 360 с.

Киев. политехн. ин-т

Получено 17.06.85,
после доработки — 08.09.87