УДК 517.944

С. А. Беликов

О наблюдаемости линейных и билинейных систем в гильбертовом пространстве

1. Задача о наблюдаемости управляемых систем, описываемых эволюционными дифференциальными уравнениями, имеет важное значение для математической теории систем и теории оптимального управления. В случае конечномерного пространства она с достаточной полнотой описана, например, в монографии [1] для линейных и в статье [2] для билинейных систем. В случае гильбертова пространства эта задача имеет свои особенности.

В настоящей работе показано, что даже для линейной автономной системы в гильбертовом пространстве (в отличие от конечномерного) свойство наблюдаемости зависит, вообще говоря, от интервала наблюдения (в известных автору публикациях этот интервал явно или неявно полагается либо сколь угодно малым, либо бесконечным). С учетом интервала наблюдения для билинейных систем вводятся различные понятия наблюдаемости в зависимости от постановки задачи наблюдения. Эти задачи, эквивалентные в конечномерном случае, принципиально различны для систем в гильбертовом пространстве.

Отметим, что формулируемые в данной статье и доказываемые элементарно теоремы обобщают некоторые нетривиальные результаты об управляемости и наблюдаемости. Это говорит о целесообразности введенных в статье определений и приводимых постановок задач наблюдения.

2. Рассматривается система

$$dy(t)/dt = \left(A_0 + \sum_{i=1}^{m} v_i(t) A_i\right) y(t), \ y(0) = y_0, \tag{1}$$

$$z(t) = By(t), \tag{2}$$

где $y(t) \in \mathcal{H}$, $z(t) \in \mathcal{H}_0$, $t \in [0, T]$; $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_0$ — гильбертовы пространства; A_0: $\mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — линейный оператор с плотной в $\mathcal{H}$ областью определения, для которого задача Коши равномерно корректна [3]; $y_0 \in \mathcal{D}(A_0)$; $v_i(\cdot)$, $i = 1, \ldots, m$ — кусочно-постоянные управления со значениями в R; $A_i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_0$ — линейные ограниченные операторы.

В терминологии теории управления пространство кусочно-постоянных функций со значениями в R^m называется пространством входов; пространство непрерывных функций со значениями в $\mathcal{H}_0$ — пространством выходов; $\mathcal{H}$ — пространством состояний. Система (2) называется также измерительным прибором.

При каждом начальном состоянии $y_0 \in \mathcal{D}(A_0)$ система (1), (2) задает отображение $IO_{y_0,[0,T]}$ пространства входов в пространство выходов.

В неформальной постановке задача наблюдения за время T состоит в том, чтобы, распоряжаясь входами $v_i(t)$ по показаниям измерительного прибора $z(t)$, $t \in [0, T]$, определить начальное состояние y_0.

Рассмотрим следующие точные постановки задачи.

1. Задача параллельного наблюдения состоит в том, чтобы определить y_0 по известным наборам $\{z_v(t), t \in [0, T]\}$ выходов, соответствующих всевозможным входам v из пространства входов.

Параллельно ненаблюдаемым ядром за время T $\mathfrak{N}''(T)$ назовем множество начальных состояний y_0, для которых $IO_{y_0,[0,T]} \equiv 0$.

Легко показать, что

$$\mathfrak{N}''(T) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{\{(t_1,\ldots,t_n)|\ \sum\limits_{k=1}^{n} t_k \leqslant T\}} \bigcap_{\{v^k \in \mathscr{V} | k=1,\ldots,n\}} \operatorname{Ker} B \prod_{k=1}^{n} U_{\mathcal{A}_{v^k}}(t_k), \quad T > 0,$$

где t_1, $t_1 + t_2$, ... — моменты разрыва управлений; $\mathcal{V} = \{(v_1, \ldots, v_m) | v_i \in R\}$; $U_{\mathcal{A}_v}(\cdot)$ — полугруппа, порожденная оператором $\mathcal{A}_v = A_0 + \sum\limits_{i=1}^{m} v_i A_i$.

Очевидно, что два состояния, имеющие одинаковые проекции на подпространство, ортогональное $\mathfrak{N}''(T)$, задают одинаковые отображения вход—выход и, следовательно, их нельзя различить, решая задачу параллельного наблюдения.

Система (1), (2) называется параллельно наблюдаемой за время T, если $\mathfrak{N}''(T) = 0$.

В дальнейшем понадобится следующее описание подпространства $\mathfrak{N}_0^{*''}(T)$, ортогонального $\mathfrak{N}''(T)$:

$$\mathfrak{N}_0^{*''}(T) = \overline{\operatorname{sp}} \left\{ \prod_{k=1}^{n} U_{\mathcal{A}^*_{v^k}}(t_k) \operatorname{Im} B^* \,|\, v^k \in \mathcal{V}; \quad \sum_{k=1}^{n} t_k \leqslant T;\ n = 1, 2, \ldots \right\},$$

где $\overline{\operatorname{sp}}$ означает замыкание линейной оболочки; $\mathcal{A}^*_{v^k}$ и B^* — сопряженные операторы.

2. Задача наблюдения в момент τ состоит в том, чтобы определить y_0 по известным наборам ростков z_v в точке τ (т. е. классов эквивалентности выходов по отношению $z_1(\cdot) \sim z_2(\cdot)$, если найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $z_1(t) \equiv z_2(t)$ при $t \in [\tau, \tau + \varepsilon]$), соответствующих всевозможным входам v, тождественно равных нулю на $[0, \tau]$.

Ненаблюдаемым ядром в момент τ $\mathfrak{N}'(\tau)$ назовем замыкание множества начальных состояний y_0 таких, что для любого входа v найдется $\varepsilon > 0$, для которого $IO_{U_{A_0}(\tau) y_0, [0,\varepsilon]} v = 0$. Очевидно, что

$$\mathfrak{N}'(\tau) = \overline{\operatorname{sp}} \left\{ \bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{\{(t_1,\ldots,t_n)|\ \sum\limits_{k=1}^{n} t_k \leqslant \varepsilon\}} \times \right.$$

$$\left. \times \bigcap_{\{v^k \in \mathscr{V} | k=1,\ldots,n\}} \operatorname{Ker} B \prod_{k=1}^{n} U_{\mathcal{A}_{v^k}}(t_k)\, U_{A_0}(\tau) \right\},$$

где $\overline{\operatorname{sp}}$ означает замыкание линейной оболочки.

Система (1), (2) называется наблюдаемой в момент τ, если $\mathfrak{N}'(\tau) = 0$.

Выражение для подпространства $\mathfrak{N}_0^{*'}(\tau)$, ортогонального $\mathfrak{N}'(\tau)$, имеет вид

$$\mathfrak{N}_0^{*'}(\tau) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\operatorname{sp}} \left\{ U_{A_0^*}(\tau) \prod_{k=1}^{n} U_{\mathcal{A}^*_{v^k}}(t_k) \operatorname{Im} B^* \,|\, v^k \in \mathcal{V}; \ \sum_{k=1}^{n} t_k \leqslant \varepsilon;\ n = 1, 2, \ldots \right\}.$$

3. Задача последовательного наблюдения состоит в том, чтобы определить y_0 по наборам ростков z_v в точке t, описанных в предыдущей задаче, заданных при всех $t \in [0, T]$.

Последовательно ненаблюдаемым ядром за время T называется подпространство $\mathfrak{N}(T) = \bigcap\limits_{t \in [0, T]} \mathfrak{N}'(t)$. Система (1), (2) называется последовательно наблюдаемой за время T, если $\mathfrak{N}(T) = 0$.

Очевидно, что подпространство $\mathfrak{N}_0^*(T) = \overline{\operatorname{sp}} \{\mathfrak{N}_0^{*'}(t) | t \in [0, T]\}$ ортогонально $\mathfrak{N}(T)$. Непосредственно из определений вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Справедливы следующие разложения гильбертова пространства:* $\mathscr{H} = \mathfrak{N}(T) \oplus \mathfrak{R}_0^*(T) = \mathfrak{N}'(\tau) \oplus \mathfrak{R}_0^{*'}(\tau) = \mathfrak{N}''(T) \oplus \mathfrak{R}_0^{*''}(T)$.

Эта теорема называется теоремой двойственности. Ее смысл и следствия будут рассмотрены ниже.

Справедливы включения $\mathfrak{N}''(T) \subseteq \mathfrak{N}(T) \subseteq \mathfrak{N}'(T)$, $T > 0$.

Естественно определить $\mathfrak{N}''(0) \overset{\mathrm{df}}{=} \mathfrak{N}'(0)$ и тогда $\mathfrak{N}''(0) = \mathfrak{N}(0) = \mathfrak{N}'(0)$. В случае, когда A_0 — ограниченный оператор, все три определения ненаблюдаемого ядра совпадают и не зависят от T. Поэтому для таких систем сформулированные задачи наблюдения эквивалентны и в конечномерном случае совпадают с классической.

3. В дальнейшем будем предполагать, что для системы (1) выполняются условия, при которых справедлива теорема 1 работы [4], т. е.

1) операторы $\mathrm{ad}_{A_0}^k L$, где L — оператор, принадлежащий семейству, порождаемому из $\{A_1, \ldots, A_m\}$ коммутированием, расширяются до ограниченных операторов в $\mathscr{H}$ (по определению $\mathrm{ad}_{A_0}^0 L = L$; $\mathrm{ad}_{A_0}^{k+1} L = A_0 \cdot \mathrm{ad}_{A_0}^k L - \mathrm{ad}_{A_0}^k L \cdot A_0$);

2) алгебра Ли $\mathscr{L}$, порожденная семейством ограниченных операторов $\{\mathrm{ad}_{A_0}^k A_i \mid i = 1, \ldots, m;\ k = 0, 1, \ldots\}$ является $\mathcal{U}$-регулярной [4] в некоторой окрестности $y_0 \neq 0$ ($\mathcal{U}$-регулярность в конечномерном случае совпадает с понятием регулярности);

3) для каждого оператора $L \in \mathscr{L}$ полугруппа оператора $\alpha A_0 + L$ при $\alpha \to 0$ сильно сходится к полугруппе оператора L.

Можно показать, что условие 3 заведомо выполняется, если операторы A_0 и A_0^* ограничены справа [3, с. 112].

Вместо описания остальных условий, которые не будут использоваться, сформулируем в качестве условия необходимое для дальнейшего следствие указанной теоремы:

4) Множество $\mathfrak{R}_{y_0}(0)$ достижимости системы (1) из $y_0 \neq 0$ за сколь угодно малое время совпадает с интегральным многообразием вполне интегрируемой системы, порожденной алгеброй Ли $\mathscr{L}$, проходящим через y_0. (По определению $\mathfrak{R}_{y_0}(0) = \overline{\bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{0 < t \leqslant \varepsilon} \mathfrak{R}_{y_0}(t)}$, где $\mathfrak{R}_{y_0}(t)$ — множество достижимости системы (1) из y_0 за время t [4].)

4. Установим физический смысл задачи последовательного наблюдения. Для этого сформулируем два очевидных утверждения.

1. Все точки многообразия $\mathfrak{R}_{y_0}(0)$ достижимы одна из другой за сколь угодно малое время, т. е. если $y_1, y_2 \in \mathfrak{R}_{y_0}(0)$, то $y_2 \in \mathfrak{R}_{y_1}(0)$

Утверждение очевидно следует из условия 4, поскольку лежат на одном и том же интегральном многообразии инволютивной системы, порожденной алгеброй Ли $\mathscr{L}$.

2. Ненаблюдаемое ядро $\mathfrak{N}'(t)$ совпадает с замыканием множества начальных состояний y_0 таких, что $\mathfrak{R}_{U_{A_0}(t) y_0}(0) \subseteq \operatorname{Ker} B$.

Используя эти утверждения, легко доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *и* $y \notin \mathfrak{N}(T)$ *найдется вход* $v = (v_1(\cdot), \ldots, v_m(\cdot))$ *такой, что* $\| U_{\mathcal{A}_v}(T, 0) y - U_{A_0}(T) y \| < \varepsilon$ *и* $B \times U_{\mathcal{A}_v}(t, 0) y \not\equiv 0$, $t \in [0, T]$. *Если для любого* $y_0 \in \mathscr{D}(A_0)$ *из условия* $y_1 \notin \mathfrak{R}_{y_0}(0)$ *следует, что* $U_{A_0}(t) y_1 \notin \mathfrak{R}_{U_{A_0}(t) y_0}(0)$ *при* $t \in [0, T]$, *то* $\mathfrak{N}(T)$ *является минимальным подпространством, обладающим этим свойством. При этом вход* v *можно выбрать тождественно равным* 0 *вне сколь угодно малой окрестности некоторой точки* $t_0 \in [0, T]$ *и так, что вне этой окрестности* $\| U_{\mathcal{A}_v}(t, 0) y - U_{A_0}(t) y \| < \varepsilon$.

Замечание. Эта теорема означает, грубо говоря, что можно решить задачу определения начального состояния по модулю $\mathfrak{N}(T)$ за время T, используя лишь один вход. За интервалом наблюдения $[0, T]$ можно вы-

*$U_{\mathcal{A}_v}(t, \tau)$ — эволюционный оператор, порожденный оператором $\mathcal{A}_v(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{m} v_i(t) A_i$.

вести систему на исходную траекторию (так называем траекторию $U_{A_0}(\cdot)y_0$), которая стала известной (если $y_0 \perp \mathfrak{N}(T)$) после решения задачи последовательного наблюдения. Вопросы корректности в этой статье не рассматриваются.

5. Нам понадобится теорема о структуре множества $\mathfrak{R}_0(0)$ системы

$$dy(t)/dt = A_0 y(t) + \sum_{i=1}^{m} v_i(t) A_i y(t) + Cw(t). \tag{3}$$

Теорема 3. *Пусть в системе* (3) y; A_0; A_i, $v_i(\cdot)$, $i = 1, \ldots, m$, *такие, как в системе* (1); $w(\cdot)$ — *кусочно-постоянное управление со значениями в* $\mathcal{H}_0$; $C: \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}$ — *линейный ограниченный оператор. При этом выполняется условие* 3 *и*

$$\operatorname{Im} \prod_{k=1}^{n} A_{i_k} C \subseteq \mathcal{D}(A_0), \quad i_k \in \{0, 1, \ldots, m\}; \quad n = 0, 1, \ldots$$

Тогда множество $\mathfrak{R}_0(0)$ *системы* (4) *совпадает с подпространством* $\overline{\mathrm{sp}}\left\{\operatorname{Im} \prod_{k=1}^{n} A_{i_k} C \mid i_k \in \{0, 1, \ldots, m\};\ n = 0, 1, \ldots\right\}$.

Доказательство. Обозначим это подпространство через $\mathcal{L}$. Воспользуемся теоремой работы [5], из которой следует, что если из любой точки $y \in \mathfrak{R}_0(0) \cap \mathcal{D}(A_0)$ возможен инфинитезимальный сдвиг в направлении вектора $\xi \in \mathcal{D}(A_0)$ (т. е. найдется непрерывно дифференцируемая (в норме графика A_0) кривая $\gamma: [0, \varepsilon] \to \mathfrak{R}_0(0) \cap \mathcal{D}(A_0)$ такая, что $\gamma(0) = y$, $\gamma'(0) = \xi$), то $\xi \in \mathfrak{R}_0(0) \cap \mathcal{D}(A_0)$. Векторы, в направлении которых возможен инфинитезимальный сдвиг из любой точки $y \in \mathfrak{R}_0(0) \cap \mathcal{D}(A_0)$, будем называть допустимыми. Очевидно, что множество допустимых векторов образует подпространство пространства $\mathcal{D}(A_0)$ с нормой графика. Легко показать, что векторы $\xi \in \operatorname{Im} C$ допустимы.

Зафиксируем постоянные $(v_1, \ldots, v_m) = v$ и пусть $\mathcal{A}_v = A_0 + \sum_{i=1}^{m} v_i A_i$. Покажем, что если $\xi \in \mathcal{D}(A_0)$ — допустимый вектор, то $\mathcal{A}_v \xi$ — также допустимый вектор. Для этого введем малый параметр $\alpha > 0$ и рассмотрим систему (3) относительно быстрого времени $\tau = \alpha^{-1} t$. Пусть $\gamma_\alpha(\cdot)$ — выходящая из $y \in \mathfrak{R}_0(0) \cap \mathcal{D}(A_0)$ траектория системы (3) относительно быстрого времени. Тогда при конечных $\tau = T$ $\gamma_\alpha(T)$ сходится к точке из $\mathfrak{R}_0(0)$ при $\alpha \to 0$.

Рассмотрим уравнение

$$dy(\tau)/d\tau = \alpha \mathcal{A}_v y(\tau) + p(\tau), \ p(\tau) \in \operatorname{Im} C, \tag{4}$$

и кривую $\gamma_\alpha(\tau) = U_{\alpha \mathcal{A}_v}(\tau)[\alpha^{-1}\xi + y] - \alpha^{-1}\xi$. Вектор ξ/α является допустимым для системы (4) с быстрым временем при любом $\alpha > 0$ и, следовательно, при фиксированном $\tau = t/\alpha$ имеем $\gamma_\alpha(\tau) \in \mathfrak{R}_y(\alpha\tau) \cap D(A_0)$. Так как $y \in \mathfrak{R}_0(0) \cap D(A_0)$, то $\gamma_\alpha(\tau) \in \mathfrak{R}_0(\alpha\tau) \cap D(A_0)$ и $\lim_{\alpha \to 0} \gamma_\alpha(\tau) \in \mathfrak{R}_0(0) \cap D(A_0)$. Далее, $\gamma_\alpha(0) = y$, $d\gamma(\tau)/d\tau|_{\tau=0} = \alpha \mathcal{A}_v y + \mathcal{A}_v \xi$. При $\alpha \to 0$ получаем кривую γ такую, что $\gamma(0) = y$, $\gamma'(0) = \mathcal{A}_v \xi$. Таким образом, $\mathcal{A}_v \xi$ — допустимый вектор. Теперь легко показать, что все векторы из $\mathcal{L} \cap \mathcal{D}(A_0)$ допустимые и, следовательно, $\mathcal{L} \subseteq \mathfrak{R}_0(0)$. Точно так же показывается, что $\{y_0 + \mathcal{L}\} \subseteq \mathfrak{R}_{y_0}(0)$ при любом $y_0 \in \mathcal{D}(A_0)$.

Заметим, что $\mathcal{L}$ является подпространством в $\mathcal{H}$, инвариантным относительно операторов A_i, $i = 0, 1, \ldots, m$. Поэтому в фактор-пространстве $\mathcal{H}/\mathcal{L}$ корректно определены фактор-операторы $\tilde{A}_i$, $i = 0, 1, \ldots, m$, и можно рассмотреть фактор-уравнение, получаемое из (3):

$$d\tilde{y}/dt = \left(\tilde{A}_0 + \sum_{i=1}^{m} v_i(t) \tilde{A}_i\right)\tilde{y}, \quad \tilde{y} \in \mathcal{H}/\mathcal{L}. \tag{5}$$

Из инфинитезимальности A_0 следует, что уравнение $\tilde{y}'_t = \tilde{A}_v \tilde{y}$ имеет решение с любым начальным данным из $\mathcal{D}(A_0)$, получаемым проектированием $\mathcal{D}(A_0)$ на $\mathcal{H}/\mathcal{L}$, хотя может не обладать свойством единственности решений.

Покажем теперь, что $\mathfrak{R}_0(0) \subseteq \mathcal{L}$. Действительно, если $\xi \in (\mathfrak{R}_0(0) \cap \cap \mathcal{D}(A_0)) \setminus \mathcal{L}$ и $\pi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}/\mathcal{L}$ — каноническая проекция, то $\pi\xi \neq 0$ и принадлежит множеству достижимости системы (5) из 0 за сколь угодно малое время. Однако это множество принадлежит, очевидно, подпространству $\bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\mathrm{sp}} \left\{ \prod_{k=1}^{n} U_{\mathcal{A}_{v^k}}(t_k)\, \mathcal{L} \mid v^k \in \mathcal{V};\ \sum_{k=1}^{n} t_k \leqslant \varepsilon;\ n = 0, 1, \ldots \right\} / \mathcal{L}$, состоящему лишь из 0. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Очевидно, что, если $\mathcal{L}$ инвариантно относительно операторов $U_{A_0}(t)$, $t \in [0, T]$, то для системы (3) $\mathfrak{R}_0(t) = \mathcal{L}$ при любом $t \in [0, T]$. Это всегда выполняется при любом T, если A_0 порождает аналитическую полугруппу [3]. В конечномерном случае отсюда следует теорема о множестве достижимости из 0 билинейной системы за время $t > 0$ [6].

6. Рассмотрим систему, двойственную системе (1), (2):

$$dy(t)/dt = \left(A_0^* + \sum_{i=1}^{m} v_i(t) A_i^* \right) y(t) + B^* w(t), \tag{6}$$

где $w(\cdot)$ — кусочно-постоянное управление со значениями в $\mathcal{H}_0$; $A_0^* : \mathcal{D}(A_0^*) \to \to \mathcal{H}$; $A_i^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$; $B^* : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}$ — сопряженные операторы.

Для системы (6) введенное при постановке задачи параллельного наблюдения подпространство $\mathfrak{R}^{*\prime\prime}(T)$ представляет собой подпространство в $\mathcal{H}$, порожденное множеством достижимости системы (6) за время T. Этот результат можно получить, анализируя интегральную формулу решения линейного неоднородного уравнения.

Систему (6) назовем параллельно управляемой за время T, если ее множество достижимости из 0 за время T не содержится ни в одном собственном подпространстве пространства состояний $\mathcal{H}$.

Пусть система (6) удовлетворяет условиям теоремы 3. Тогда $\mathfrak{R}_0^*(0) = = \overline{\mathrm{sp}} \left\{ \mathrm{Im} \prod_{k=1}^{n} A_{i_k}^* B^* \mid i_k \in \{0, 1, \ldots, m\};\ n = 0, 1, \ldots \right\}$. Система (6) называется управляемой за сколь угодно малое время, если $\mathfrak{R}_0^*(0) = \mathcal{H}$. Далее, очевидно, что $\mathfrak{R}_0^*(T) = \overline{\mathrm{sp}} \{ U_{A_0}(t) \mathfrak{R}_0^*(0) | t \in [0, T] \}$.

Легко показать, что это подпространство принадлежит множеству достижимости из 0 за время T системы (6). Система (6) называется последовательно управляемой за время T, если $\mathfrak{R}_0^*(T) = \mathcal{H}$.

Теперь становится ясен смысл теоремы 1, устанавливающей связь между наблюдаемостью системы (1), (2) и управляемостью системы (6). Заметим, что для линейных систем (т. е. $A_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$) понятия последовательной и параллельной наблюдаемости (а значит, и управляемости) совпадают, и мы будем говорить просто об управляемости и наблюдаемости за время T. Для этого случая $\mathfrak{R}_0^*(T) = \overline{\mathrm{sp}} \{ U_{A_0^*}(\nu) A_0^{*n} \mathrm{Im}\, B^* \mid n = 0, 1, \ldots;\ \nu \in \in [0, T] \}$, а если $U_{A_0^*}(\cdot)$ — аналитическая полугруппа [3], то $\mathfrak{R}_0^*(T) = \mathfrak{R}_0^*(0) = = \overline{\mathrm{sp}} \{ A^{*n} \mathrm{Im} B^* \mid n = 0, 1, \ldots \}$, и условие, что это подпространство совпадает с $\mathcal{H}$, является критерием наблюдаемости линейной системы

Этот критерий совпадает с обобщенным ранговым условием наблюдаемости, полученным в работе [7].

7. П р и м е р 1. Рассмотрим в пространстве $L_2(0, 1)$ линейную систему

$$\partial y(t, x)/\partial t = -\partial y(t, x)/\partial x, \quad y(0, x) = y_0(x), \tag{7}$$

$$z(t) = \int_0^1 \varphi(x)\, y(t, x)\, dx. \tag{8}$$

Здесь $\mathscr{H} = L_2(0, 1)$; $A_0 = -\partial/\partial x$; $\mathscr{D}(A_0) = \{y(\cdot) \mid y(\cdot) \in W_2^1(0, 1),\ y(0) = y(1)\}$; $\mathscr{H}_0 = R$; $By(\cdot) = \int\limits_0^1 \varphi(x) y(x)\, dx$; $A_0^* = \partial/\partial x$, $\mathscr{D}(A_0^*) = \mathscr{D}(A_0)$; $B^*v = \varphi(\cdot) v$, $v \in R$; $\varphi(\cdot) \in C^\infty[0, 1]$, $\varphi^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}(1)$, $k = 0, 1, \ldots$

Сопряженная система примет вид

$$\partial y(t, x)/\partial t = \partial y(t, x)/\partial x + \varphi(x) v(t). \tag{9}$$

Для того чтобы система (7), (8) была наблюдаемой (а система (9) — управляемой) за сколь угодно малое время, необходимо и достаточно, чтобы система функций $\{\varphi^{(k)}(\cdot) \mid k = 0, 1, \ldots\}$ была полной в $L_2(0,1)$. Если функции из этой системы образуют полную систему на интервале $(1 - \alpha, 1)$ и равны нулю вне его ($\alpha < 1$), то система (7), (8) наблюдаема при $T \geqslant 1 - \alpha$ и ненаблюдаема при $T < 1 - \alpha$. Как видим, свойство наблюдаемости линейной системы, в отличие от конечномерного случая, зависит от периода наблюдения.

Пример 2. Рассмотрим в пространстве $L_2(0,1)$ билинейную систему

$$\partial y(t, x)/\partial t = -\partial y(t, x)/\partial x + v(t)\, p(x)\, y(t, x), \tag{10}$$

$$z(t) = \int\limits_0^1 y(t, x)\, dx. \tag{11}$$

Здесь $\mathscr{H}$, A_0, $\mathscr{D}(A_0)$, $\mathscr{H}_0$ как в примере 1; $p(\cdot) \in C^\infty[0, 1]$, $p^{(k)}(0) = p^{(k)}(1)$, $k = 0, 1, \ldots$

Сопряженная система принимает вид

$$\partial y(t, x)/\partial t = \partial y(t, x)/\partial x + v(t)\, p(x)\, y(t, x) + w(t) \cdot 1. \tag{12}$$

Можно показать, что $\mathfrak{R}_0^*(T) = \overline{\mathrm{sp}} \left\{ \prod\limits_{k=0}^{n} (p^{(k)}(\cdot + \nu))^{i_k} \mid \nu \in [0, T];\ i_k \in \{0, 1, \ldots\};\ n = 0, 1, \ldots \right\}$; $\mathfrak{R}_0^{*''}(T) = \overline{\mathrm{sp}} \left\{ \prod\limits_{k=0}^{n} (p^{(l_k)}(\cdot + \nu_k))^{i_k} \mid \nu_k \in [0, T];\ l_k, i_k \in \{0, 1, \ldots\};\ n = 0, 1, \ldots \right\}$.

Построенные подпространства дают полную информацию о наблюдаемости системы (10), (11). Так, для ее наблюдаемости (или управляемости системы (12)) за сколь угодно малое время необходимо и достаточно, чтобы система функций $\left\{ \prod\limits_{k=0}^{n} (p^{(k)}(\cdot))^{i_k} \mid i_k \in \{0, 1, \ldots\};\ n = 0, 1, \ldots \right\}$ была полной в $L_2(0, 1)$.

1. *Уонем М.* Линейные многомерные системы управления, геометрический подход.— М. : Наука, 1980.— 376 с.
2. *Sussman H. F.* Minimal Realization and Canonical Forms for Bilinear Systems // J. Franklin Inst.— 1976.— **301**.— N 6.— P. 593—604.
3. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1967.— 464 с.
4. *Беликов С. А., Самборский С. Н.* Области достижимости для систем, описываемых уравнениями с частными производными // Сиб. мат. журн.— 1983.— **24**, № 4.— С. 3—12.
5. *Дудников П. И., Самборский С. Н.* О замкнутых подмножествах в банаховом пространстве.— Киев, 1981.— С. 19—21.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 81.49).
6. *Брокетт Р. У.* Алгебры Ли и группы Ли в теории управления // Мат. методы в теории систем.— М. : Мир, 1976.— С. 174—220.
7. *Triggiani R.* Extensions of Rank Conditions // SIAM J. Contr. and Optim.— 1976.— **14**, N 2.— P. 313—338.

Киев. геофиз. отд-ние УкрНИГРИ

Получено 13.11.85