УДК 512.546

В. Г. Пестов

Признак уравновешенности локально компактной группы

Следующий вопрос, сформулированный Ицковичем [1], был также приведен в сборнике [2] Ю. Н. Мухиным (задача IV. 27). Пусть G — локально компактная группа, левая и правая равномерные структуры которой различны. Содержит ли G открытую σ-компактную подгруппу с тем же свойством? Ниже получен положительный ответ.

Если A, B — два подмножества группы G, то будем обозначать, следуя [3], $A^B = \{b^{-1}ab : a \in A,\ b \in B\}$; $A_B = \bigcap \{bAb^{-1} : b \in B\}$.

Подмножество A отделимой топологической группы (далее для краткости «t-группы») G называется тонким в G [4], если для любой окрестности единицы V в группе G найдется окрестность единицы W, для которой $W^A \subset V$. Если это свойство выполняется в t-группе G при $A = G$, то говорят, что группа G уравновешенна [5]; другими словами, t-группа уравновешенна, если она тонка в себе как подмножество. Отметим, что уравновешенные группы называют также группами с инвариантным базисом, локально инвариантными группами, SIN-группами. Хорошо известный факт — любое компактное подмножество t-группы тонко в ней ([6], теорема 2.4.9). Заметим, что уравновешенность t-группы равносильна совпадению ее левой и правой равномерных структур [6].

Л е м м а. *Пусть A — подмножество t-группы G. Тогда A тонко в G, если и только если для каждой окрестности единицы V множество V_A — также окрестность единицы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о непосредственно следует из того, что для любого подмножества группы G и, в частности, для произвольной окрестности единицы W выполняются включения $W \subset (W^A)_A$, $(W_A)^A \subset W$.

Обозначим через $\langle A \rangle$ внутренность (открытое ядро), а через $\mathrm{cl}\, A$ — замыкание множества A.

Т е о р е м а. *Локально компактная группа G уравновешенна, если и только если любое счетное подмножество группы G тонко в ней.*

Доказательство. Необходимость очевидна: подмножество любого тонкого множества тонко. Достаточность в силу леммы будет немедленно вытекать из следующего утверждения.

(*) *Пусть любое счетное подмножество локально компактной группы G тонко в ней. Тогда для каждой компактной окрестности единицы V в t-группе G из любого множества $A \subset G$ можно извлечь счетное подмножество $B \subset A$ со свойством $\langle V_B \rangle = \langle V_A \rangle$. В частности, само множество A тонко* в G.

Докажем утверждение (*) индукцией по мощности множества A; для $\operatorname{Card} A = \aleph_0$ оно выполняется тривиальным образом. Пусть (*) доказано для всех подмножеств t-группы G, имеющих мощность $< \lambda$, где λ — кардинал, и пусть $A \subset G$, $\operatorname{Card} A = \lambda$. Фиксируем компактную окрестность единицы V в G. Если $\operatorname{cf} \lambda = \aleph_0$ (см., например, [7, с. 29]), то представим множество A в виде $A = \bigcup \{A_n : n < \omega_0\}$, где $\operatorname{Card} A_n < \lambda$ при всех $n < \omega_0$. Пользуясь индуктивным предположением, извлечем из каждого множества A_n счетное подмножество B_n со свойством $\langle V_{A_n} \rangle = \langle V_{B_n} \rangle$. Положим $B = \bigcup \{B_n : n < \omega_0\}$. Нетрудно проверить, что $\langle V_A \rangle = \langle V_B \rangle$; и, в частности, множество A тонко в G.

Пусть теперь $\operatorname{cf} \lambda = \alpha > \aleph_0$. Представим множество A в виде $A = \bigcup \{A_\gamma : \gamma < \alpha\}$, где $A_\gamma \subset A_\delta$ и $\operatorname{Card} A_\gamma < \alpha$ при $\gamma < \delta < \alpha$, $\gamma, \delta \in \mathrm{Ord}$ (мы отождествляем регулярный кардинал α с соответствующим начальным ординалом). Если убывающая по включению трансфинитная последовательность множеств $\{\langle V_{A_\gamma} \rangle : \gamma < \alpha\}$ (являющихся окрестностями единицы в силу индуктивного предположения) стабилизируется на каком-то допредельном шаге $\delta < \alpha$, то в качестве множества B можно выбрать счетное множество $B_\delta \subset A_\delta$ со свойством $\langle V_{B_\delta} \rangle = \langle V_{A_\delta} \rangle (= \langle V_A \rangle)$. Предположив, что цепь $\{\langle V_{A_\gamma} \rangle : \gamma < \alpha\}$ не стабилизируется, получим противоречие. В самом деле, в этом случае можно без потери общности считать, что при всех $\gamma < \alpha$ $\langle V_{A_\gamma} \rangle \supsetneqq \langle V_{A_{\gamma+1}} \rangle$. Отсюда следует, что при каждом $\gamma < \alpha$ $\operatorname{cl} \langle V_{A_\gamma} \rangle \supsetneqq \operatorname{cl} \langle V_{A_{\gamma+1}} \rangle$ (в самом деле, каждое множество V_{A_γ} замкнуто, а внутренность замкнутого множества является каноническим открытым множеством, т. е. совпадает с внутренностью своего замыкания — см. [7, с. 62] II.1.55 (б)). Нетрудно видеть, что для каждого $\gamma < \alpha$ найдется элемент $x_\gamma \in \langle V_{A_\gamma} \rangle \setminus \operatorname{cl} \langle V_{A_{\gamma+1}} \rangle$, иначе было бы $\operatorname{cl} \langle V_{A_\gamma} \rangle = \operatorname{cl} \langle V_{A_{\gamma+1}} \rangle$. Поэтому каждое из открытых множеств $U_\gamma = \langle V_{A_\gamma} \rangle \setminus \operatorname{cl} \langle V_{A_{\gamma+1}} \rangle$, $\gamma < \alpha$, непусто. Далее, семейство множеств U_γ, $\gamma < \alpha$, дизъюнктно; в самом деле, если $\gamma < \delta < \alpha$, то $U_\delta \subset \langle V_{A_\delta} \rangle$, в то время как $U_\gamma \subset \langle V_{A_\gamma} \rangle \setminus \langle V_{A_\delta} \rangle$. Каждое из множеств U_γ, $\gamma < \alpha$, лежит в компактном множестве V и, следовательно, в группе $\operatorname{gp} V$, порожденной этим множеством: в самом деле, для каждого $\gamma < \alpha$ имеет место цепочка включений $U_\gamma \subset \langle V_{A_\gamma} \rangle \subset V_{A_\gamma} \subset V$.

Однако любая компактно порожденная t-группа обладает свойством Суслина [8], т. е. каждое дизъюнктное семейство непустых открытых множеств в ней не более, чем счетно — противоречие с существованием семейства U_γ, $\gamma < \alpha$, где $\alpha > \aleph_0$.

Следствие. *Локально компактная группа G, левая и правая равномерные структуры которой различны, содержит открытую σ-компактную подгруппу с тем же свойством.*

Доказательство. В группе G, согласно теореме, найдутся компактная окрестность единицы V и счетное множество A, для которых множество V_A — не окрестность единицы в G. Рассмотрим подгруппу $H = \operatorname{gp} (V \cup A)$ группы G, порожденную множеством $V \cup A$. Группа H открыта в G, ибо ее внутренность непуста: $V \subset H$ (см. [6], теорема 2.5.5); группа H σ-компактна, потому что она алгебраически порождается множеством $V \cup A$, которое σ-компактно (t-группа, алгебраически порождаемая своим σ-компактным подпространством, сама σ-компактна — это немедленно следует, например, из леммы 3.2 [9]). Наконец, группа H не уравновешенна, поскольку множество A не тонко в ней. В самом деле, множество V —

окрестность единицы в H, а множество V_A — нет: если бы это было так, то в силу открытости H в G множество V_A было бы окрестностью единицы и в G, что не так по выбору V и A.

Замечания. 1. Вопрос о справедливости следствия был сформулирован Г. Ицковичем после того, как он в [1] доказал более слабый вариант приведенной выше теоремы.

2. Наша теорема остается верной и в классе локально σ-компактных t-групп — доказательство то же самое. В то же время автору неизвестно, верна ли теорема в классе всех t-групп, пространство которых имеет счетную тесноту [7, с. 57], или хотя бы в классе всех метризуемых t-групп.

Для произвольных t-групп данная теорема не имеет места. Пусть $\mathrm{GL}_n(K)$ — группа всех обратимых $(n \times n)$-матриц над упорядоченным полем K с естественной топологией, индуцированной из K^{n^2}, причем $n \geqslant 2$ и тип конфинальности поля K [10] несчетен. Тогда группа $\mathrm{GL}_n(K)$ не уравновешенна [11], но в то же время является P-пространством (там же), т. е. пересечение любого счетного семейства открытых множеств в ней открыто; отсюда следует, что каждое счетное подмножество тонко в GL_n (K). Отметим, что топологические свойства группы $\mathrm{GL}_n(K)$ достаточно хороши: эта группа, в частности, наследственно паракомпактна (это вытекает из того, что левая равномерная структура t-группы $\mathrm{GL}_n(K)$ обладает базой, линейно упорядоченной по включению, так же, как и аддитивная равномерность поля K [10]; теперь используем [12]). Заметим, что любое упорядоченное поле в порядковой топологии, имеющее несчетный тип конфинальности, наследственно паракомпактно (из тех же соображений), но не совершенно нормально (ибо недискретное P-пространство не может быть таковым), и поэтому является примером топологического поля, доставляющим положительный ответ на вопрос Д. Б. Шахматова из [2] (задача IV. 38).

1. *Itzkowitz G.* Uniform structure in topological groups // Proc. Amer. Math. Soc.— 1976.— **54**, N 2.— P. 363—366.
2. *Нерешенные* задачи топологической алгебры.— Кишинев, 1985.— 38 с.
3. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.— М. : Наука, 1982.— 288 с.
4. *Ткаченко М. Г.* О полноте топологических групп // Сиб. мат. журн.— 1984.— **25**, № 1.— С. 146—158.
5. *Архангельский А. В.* Классы топологических групп // Успехи мат. наук.— 1981.— **36**, вып. 3.— С. 127—146.
6. *Хьюитт Э., Росс К. А.* Абстрактный гармонический анализ : В 2-х т.— М. : Наука, 1975.— Т. 1.— 656 с.
7. *Архангельский А. В., Пономарев В. И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях.— М. : Наука, 1974.— 424 с.
8. *Ткаченко М. Г.* О свойстве Суслина в свободных топологических группах над бикомпактами // Мат. заметки.— 1983.— **34**, вып. 4.— С. 601—607.
9. *Архангельский А. В.* О соотношениях между инвариантами топологических групп и их подпространств // Успехи мат. наук.— 1980.— **35**, вып. 3.— С. 3—22.
10. *Hafner P., Mazzola G.* The cofinal character of uniform spaces and ordered fields // Z. math. Log. und Grundl. Math.— 1971.— **17**.— S. 377—384.
11. *Пестов В. Г.* О вложениях и уплотнениях топологических групп // Мат. заметки.— 1982.— **31**, вып. 3.— С. 443—446.
12. *Hayes A.* Uniformities with totally ordered bases have paracompact topologies // Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1973.— **74**.— P. 67—68.

Томск. ун-т

Получено 19.11.85,
после доработки — 17.04.86