УДК 517.535.4

Х. С. Касана

Теорема существования для уточненного порядка аналитических функций

0. Пусть L^0 — класс всех функций h таких, что $h(x)$ положительна, непрерывна и строго возрастает на $[a, \infty)$, $h(x) \to \infty$ при $x \to \infty$ и

$$\lim_{x \to \infty} \frac{h(x(1 + g(x)))}{h(x)} = 1$$

для любой функции $g(x)$ такой, что $g(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

Для функций $\alpha(e^x)$ и $\beta(x)$ из L^0 (α,β)-порядок $\rho(\alpha,\beta)$ функции f, аналитической в $U=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$, определим как $\limsup\limits_{r\to1}\dfrac{\alpha(\log M(r))}{\beta\left(\dfrac{1}{1-r}\right)}$, где $M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$.

1. Докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в U и имеющая (α,β)-порядок $0<\rho<\infty$. Тогда существует положительная функция $\rho(r)$, обладающая следующими свойствами:*

1) *$\rho(r)$ непрерывна и кусочно-дифференцируема;*

2) *$\rho(r)\to\rho(\alpha,\beta)$ при $r\to1$;*

3) $\dfrac{(1-r)^2\beta\left(\dfrac{1}{1-r}\right)\rho'(r)}{\beta'\left(\dfrac{1}{1-r}\right)\rho(r)}\to\gamma-1$ *при $r\to1$, где в качестве $\rho'(r)$ можно рассматривать $\rho'(r^-)$ или $\rho'(r^+)$ там, где они не совпадают;*

4) $\limsup\limits_{r\to1}\dfrac{\exp\{\alpha(\log M(r))\}}{\exp\left\{\beta\left(\dfrac{1}{1-r}\right)\rho(r)\right\}}=T_*$, $0<T_*<\infty$, *где*

$$\limsup_{s\to1}\frac{\log\alpha(\log M(r))}{\log\beta\left(\dfrac{1}{1-r}\right)}=\gamma.$$

Доказательство состоит в проверке утверждений относительно определенной ниже $\rho(r)$ в каждом из рассмотренных ниже случаев.

Если существует r_0 такое, что $\log\alpha(\log M(r))<\gamma\log\left(\beta\left(\dfrac{1}{1-r}\right)\right)$ для $r>r_0>0$, то определим

$$\xi(r)=\begin{cases}\sup\limits_{r_0\leqslant x\leqslant r}\left\{\dfrac{\log\alpha(\log M(x))}{\log\beta\left(\dfrac{1}{1-x}\right)}\right\}-\gamma, & r>r_0,\\ \xi(r_0), & 0\leqslant r\leqslant r_0,\end{cases}\tag{1}$$

в противном случае

$$\xi(r)=\sup_{x\geqslant r}\left\{\frac{\log\alpha(\log M(x))}{\log\beta\left(\dfrac{1}{1-x}\right)}\right\}-\gamma.\tag{2}$$

Если $\limsup\limits_{r\to1}\left\{\xi(r)\log\beta\left(\dfrac{1}{1-r}\right)\right\}=-\infty$, т. е. $\xi(r)$ определено равенством (1), положим

$$\rho(r)=\left\{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}^{\gamma-1}\sup_{x\geqslant r}\left\{\exp\left(\xi(x)\log\beta\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)\right\}.$$

Если $\limsup\limits_{r\to1}\left\{\xi(r)\log\beta\left(\dfrac{1}{1-r}\right)\right\}=\infty$, то

$$\rho(r)=\left\{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}^{\gamma-1}\sup_{x\leqslant r}\left\{\exp\left(\xi(x)\log\beta\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)\right\}.$$

Если $\limsup\limits_{r\to1}\left\{\xi(r)\log\beta\left(\dfrac{1}{1-r}\right)\right\}=\log\delta$, $0<\delta<\infty$, полагаем:

а) $\rho(r)=\left\{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}^{\gamma-1}\left\{\delta+\sup_{r_1\leqslant x\leqslant r}\frac{\log\left[\sup\limits_{t\geqslant x}\left\{\frac{T_*^{-1}\exp\{\alpha(\log M(t))\}}{\exp\left[\delta\left\{\beta\left(\frac{1}{1-t}\right)\right\}^{\gamma}\right]}\right\}\right]}{\left\{\beta\left(\frac{1}{1-x}\right)\right\}^{\gamma}}\right\}$

при $k=0$, где r_1 таково, что $\exp\{\alpha(\log M(r))\}<T_*\exp\left[\delta\left\{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}^{\gamma}\right]$ для всех $r\geqslant r_1$;

б) $\rho(r)=\delta+\dfrac{\log k}{\exp\left\{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}}$, $0<k<\infty$;

в) $\rho(r)=\left\{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}^{\gamma-1}\left\{\delta+\sup\frac{\log\left[\sup\left\{\frac{T_*^{-1}\exp\{\alpha(\log M(t))\}}{\exp\left[\delta\left\{\beta\left(\frac{1}{1-t}\right)\right\}\right]^{\gamma}}\right\}\right]}{\left\{\beta\left(\frac{1}{1-x}\right)\right\}^{\gamma}}\right\}$,

$k=0$, где $k=\limsup\limits_{r\to1}\dfrac{\exp\{\alpha(\log M(r))\}}{\exp\left\{\delta\left\{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}^{\gamma}\right\}}$.

Проиллюстрируем общий подход установлением результата в случае, соответствующем случаю в). Пусть $\varphi(r)=\sup\limits_{r_0\leqslant t\leqslant r}\dfrac{T_*^{-1}\exp\{\alpha(\log M(t))\}}{\exp\left[\delta\left\{\beta\left(\frac{1}{1-t}\right)\right\}^{\gamma}\right]}$, $r>r_0$.

Тогда $\varphi(r)$ непрерывна, неубывает и стремится к бесконечности при $r\to\to1$. Число r_0 выбрано таким образом, что $\log\varphi(r)$ всегда положителен. Пусть A — множество тех r из $[r_0, 1)$, для которых $\varphi(t)=\varphi(r)$ при некотором $t<r$. Тогда A — множество полуоткрытых интервалов $\{(a_n, b_n]\}$ — может быть пустым, отделенным от 1 или может не существовать c, $0<<c<1$, такого, что $\varphi(r)$ возрастает на $(c, 1)$. На дополнении к множеству открытых интервалов $\{(a_n, b_n)\}$ имеем $\varphi(r)=\dfrac{T_*^{-1}\exp[\alpha(\log M(r))]}{\exp\left[\delta\left\{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}^{\gamma}\right]}$. Если r принадлежит интервалу (a_n, b_n), то

$$0\leqslant\frac{\log\varphi(r)}{\left\{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}^{\gamma}}=\frac{\alpha(\log M(a_n))-\delta\{\beta(1/(1-a_n))\}^{\gamma}-\log T_*}{\{\beta(1/(1-r))\}^{\gamma}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\log[T_*^{-1}\alpha(\log M(a_n))]}{\{\beta(1/(1-a_n))\}^{\gamma}}-\delta,$$

а вне этих интервалов

$$0<\frac{\log\varphi(r)}{\left\{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}^{\gamma}}=\frac{\log[T_*^{-1}\exp\{\alpha\log M(r)\}]}{\left\{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}^{\gamma}}-\delta.$$

При этом $\log\varphi(r)/\{\beta(1/(1-r))\}^{\gamma}\to0$, $r\to1$, так как обратное противоречит определению δ. Следовательно,

$$\psi(r)=\sup_{x\geqslant r}\frac{\log\varphi(x)}{\left\{\beta\left(\frac{1}{1-x}\right)\right\}^{\gamma}},\qquad r>r_0,$$

— положительная невозрастающая функция, стремящаяся к нулю при $r\to1$.

Если при некотором $r_n \in (a_n, b_n)$

$$\psi(r_n) = \frac{\log \varphi(r_n)}{\left\{\beta\left(\frac{1}{1-r_n}\right)\right\}^{\gamma}} = \frac{\log \varphi(a_n)}{\left\{\beta\left(\frac{1}{1-r_n}\right)\right\}^{\gamma}},$$

то имеем

$$\psi(r) = \frac{\log \varphi(a_n)}{\left\{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}^{\gamma}}, \quad a_n \leqslant r \leqslant b_n;$$

в частности, это справедливо при $r = a_n$. При этом множество тех r, для которых $\psi(r) = \log \varphi(r)/\{\beta(1-r))\}^{\gamma}$, не может полностью принадлежать интервалу $\{a_n, b_n)\}$. Следовательно, нельзя выбрать c, $0 < c < 1$, такое, чтобы равенство

$$\psi(r) = \frac{\log [T_*^{-1} \exp \{\alpha(\log M(r))\}]}{\left\{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}^{\gamma}}$$

выполнялось на интервале $(0, c)$. В рассматриваемом случае $\rho(r)$ равно $\{\beta(1/(1-r))\}^{\gamma}[\delta + \psi(r)$ и, следовательно, для бесконечного числа r имеем

$$\rho(r) = \frac{\log [T_*^{-1} \exp \{\alpha(\log M(r))\}]}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)}.$$

Таким образом, согласно определению

$$\rho(r) \geqslant \frac{\log [T_*^{-1} \exp \{\alpha(\log M(r))\}]}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)}$$

для всех $r > r_0$, откуда немедленно следуют утверждения 1, 2 и 4 теоремы.

Множество $\{r : r_0 < r < 1\}$ можно разбить на последовательность интервалов, в которых $\psi(r)$ равно постоянной (утверждение 1), постоянной, деленной на $\{\beta(1/(1-r))\}^{\gamma}$ (утверждение 2), и $\dfrac{\log [T_*^{-1} \exp \{\alpha(\log M(r))\}]}{\left\{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}^{\gamma}} - \delta$ (утверждение 3), и, так как $M(r)$ дифференцируема на смежных открытых интервалах, то же справедливо для $\psi(r)$ и, следовательно, для $\rho(r)$. В таких интервалах

$$\rho'(r) = (\gamma - 1)\left\{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}^{\gamma-2} \beta'\left(\frac{1}{1-r}\right)(1-r)^{-2}[\delta + \psi(r)] + \\ + \left\{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}^{\gamma-1} \psi'(r),$$

или

$$\frac{(1-r)^2 \beta\left(\frac{1}{1-r}\right)\rho'(r)}{\beta'\left(\frac{1}{1-r}\right)} = (\gamma - 1)\left\{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}^{\gamma-1}[\delta + \psi(r)] + \\ + \frac{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\gamma}\psi'(r)(1-r)^2}{\beta'\left(\frac{1}{1-r}\right)}.$$

Теперь $\psi'(r)=0$, или

$$\psi'(r)=\frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)\left\{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}^{\gamma}}-\frac{\gamma\log\varphi(r)\,\beta'\left(\frac{1}{1-r}\right)(1-r)^{-2}}{\left\{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}^{\gamma+1}},$$

и, поскольку $\psi'(r)\leqslant 0$ и $\varphi'(r)\geqslant 0$, имеем

$$0\geqslant\frac{(1-r)^2\rho'(r)\,\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)}{\rho(r)\,\beta'\left(\frac{1}{1-r}\right)}-\gamma+1\geqslant\frac{-\gamma\psi(r)}{\delta+\psi(r)}\to 0,\ \ r\to 1.$$

Это устанавливает справедливость утверждения 3 теоремы; результаты для $\rho'(r-)$ и $\rho'(r+)$ можно получить аналогично.

Случай аналитических функций конечного положительного порядка рассмотрен в работе [1].

1. *Juneja O. P., Kapoor G. P.* Analytic functions-growth aspects // Res. Notes Math.— 1985.— 104.

Индия

Получено 23.12.86