УДК 517.5

А. И. Степанец, Н. Л. Пачулиа

О поведении группы уклонений на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций

В настоящей работе продолжаются исследования аппроксимативных свойств множеств (ψ, β)-дифференцируемых функций, начатые в работах [1—5].

Пусть $f(x)$, $f \in L(0, 2\pi)$, — суммируемая 2π-периодическая функция и

$$S[f] = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f, x)$$

— ее ряд Фурье. Пусть, далее, $\psi(k)$ — произвольная функция натурального аргумента и β — фиксированное число. Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} (a_k \cos(kx + \beta\pi/2) + b_k \sin(kx + \beta\pi/2))$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции, то обозначим ее $f_\beta^\psi(\cdot)$ и назовем (ψ, β)-производной функции $f(\cdot)$. Множество функций $f(\cdot)$, у которых существуют (ψ, β)-производные, обозначим L_β^ψ, а подмножество непрерывных функций из L_β^ψ — через C_β^ψ.

Если $f \in L_\beta^\psi$ и при этом $f_\beta^\psi \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество и $L(0, 2\pi)$, то пишем $f \in L_\beta^\psi \mathfrak{N}$. Аналогично определяются и множества (классы) $C_\beta^\psi \mathfrak{N}$.

В дальнейшем при рассмотрении классов $C_\beta^\psi \mathfrak{N}$ в качестве $\mathfrak{N}$ будут выступать множество C непрерывных функций с нормой $\|\varphi\|_C = \max\limits_x |\varphi(x)|$, а также его подмножества

$$S_C = \{\varphi : \|\varphi\|_C \leqslant 1\} \text{ и } H_\omega = \{\varphi : |\varphi(t + h) - \varphi(t)| \leqslant \omega(|h|), h \in R\},$$

где $\omega = \omega(t)$ — фиксированный модуль непрерывности. Будем также считать, что числа $\psi(k)$ являются значениями функции непрерывного аргумента $\psi(v)$, $v \in [1, +\infty)$, которая выпукла вниз при всех $v \in [1, +\infty)$ и, кроме того, $\lim\limits_{v \to \infty} \psi(v) = 0$. Множество таких функций $\psi(\cdot)$ обозначим $\mathfrak{M}$.

Каждой функции $\psi \in \mathfrak{M}$ поставим в соответствие функцию $\eta(t) = \eta(\psi, t) = \psi^{-1}\left[\frac{1}{2}\psi(t)\right]$. Тогда если $f \in L_\beta^\psi$, $\psi \in \mathfrak{M}$, то при каждом натуральном n и любом $p > 0$ положим$=R_n^{(p)}(f; x) = R_n^{(p)}(f; x; \psi) = \left\{\frac{1}{\gamma_n} \sum_{k=n}^{[\eta(n)]} |\rho_k = (f; x)|^p\right\}^{1/p}$, где $\rho_k(f; x)$ — уклонение частной суммы Фурье $S_{k-1}(f; x)$ функции $f(\cdot)$ порядка $k-1: \rho_k(f; x) = f(x) - S_{k-1}(f; x)$ и $\gamma_n = [\eta(n)] - n + 1$, $[\alpha]$ — целая часть числа α.

Выясним порядок стремления к нулю при $n \to \infty$ величины $R_n^{(p)}(f; x)$, когда $f \in C_\beta^\psi C$ и $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$, где $\mathfrak{M}_{C,\infty} = \mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_\infty$, $\mathfrak{M}_C$ — множество функций $\psi(\cdot)$ из $\mathfrak{M}$, для которых величина $\mu(t) = \mu(\psi; t) = t/(\eta(t) - t)$ ограничена сверху и снизу некоторыми положительными постоянными: $\mathfrak{M}_C = \{\psi \in \mathfrak{M} : K_1 \leqslant \mu(t) \leqslant K_2\ K_1, K_2 > 0\}$, а $\mathfrak{M}_\infty$ — множество функций из $\mathfrak{M}$, для которых эта величина монотонно неограниченно возрастает $\mathfrak{M}_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M} : \mu(t) \uparrow \infty\}$.

Основной результат данной работы содержится в следующем утверждении.

Теорема 1. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$. *Тогда* $\forall f \in C_\beta^\psi C$ *при любых* $n \in N$, $p > 0$ *и* $\beta \in R$ *справедливо неравенство*

$$R_n^{(p)}(f; x) \leqslant C_p \psi(n) E_n(f_\beta^\psi), \tag{1}$$

где C_p — *постоянная, зависящая только от* p, *а* $E_n(\varphi)$ — *величина наилучшего приближения функции* $\varphi(\cdot)$ *в равномерной метрике при помощи тригонометрических полиномов* $T_{n-1}(\cdot)$ *порядка* $n-1$, $E_n(\varphi) = \inf_{T_{n-1}} \| \varphi(x) - T_{n-1}(x) \|_C$.

Выражение $\frac{1}{\gamma_n} \sum_{k=n}^{[\eta(n)]} S_k(f; x)$ совпадает с суммой Валле Пуссена $V_{s,q}(f; x)$, $V_{s,q}(f; x) = \frac{1}{q+1} \sum_{k=s-q}^{s} S_{k-1}(f; x)$ при $s = [\eta(n)]$ и $q = \gamma_n - 1$.

В принятых обозначениях из теоремы 1 вытекает такое следствие.

Следствие 1. *Если* $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$, *то* $\forall f \in C_\beta^\psi C$ *при любых* $n \in N$ *и* $\beta \in R$

$$\| f(x) - V_{s,q}(f; x) \|_C \leqslant C\psi(n) E_n(f_\beta^\psi), \quad s = [\eta(n)], \quad q = \gamma_n - 1, \tag{2}$$

где C — *абсолютная постоянная.*

Действительно, в силу (1)

$$\| f(x) - V_{s,q}(f; x) \|_C = \left\| f(x) - \frac{1}{q+1} \sum_{k=s-q}^{s} S_{k-1}(f; x) \right\|_C = \left\| \frac{1}{\gamma_n} \sum_{k=n}^{[\eta(n)]} (f(x) - S_{k-1}(f; x)) \right\|_C \leqslant \frac{1}{\gamma_n} \left\| \sum_{k=n}^{[\eta(n)]} |\rho_k(f; x)| \right\|_C \leqslant C\psi(n) E_n(f_\beta^\psi). \tag{3}$$

Величина $V_{s,q}(f; x)$ является тригонометрическим полиномом степени $s - 1$. Поэтому из неравенства (2) заключаем, что если $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$, то $\forall f \in C_\beta^\psi C$ при любых $s \in N$ и $\beta \in R$

$$E_s(f) \leqslant C\psi(n) E_n(f_\beta^\psi), \quad s = [\eta(n)]. \tag{4}$$

Но $2\psi(\eta(n)) = \psi(n)$. Стало быть,

$$E_s(f) \leqslant 2C\psi(s) E_n(f_\beta^\psi). \tag{5}$$

В качестве другого примера приложения неравенства (1) получим оценку величины $H_n^{(p)}(f; x; \lambda) = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k |\rho_k(f; x)|^p$, где λ_k — некоторая числовая последовательность. Впервые функционалы такого вида введены в работах Харди и Литлвуда [6, 7], где были заложены основы теории сильной суммируемости рядов Фурье.

Теорема 2. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$, $p > 0$ *и последовательность* λ_k, $\lambda_k \geqslant 0$, $k \in N$, *такова, что числа* $\lambda_k \psi^p(k)$ *не возрастают при всех* $k \geqslant n$. *Тогда* $\forall f \in C_\beta^\psi C$ *при любых* $n \in N$ *и* $\beta \in R$

$$\| H_n^p(f; x, \lambda) \|_C \leqslant C_p \left\{ \lambda_n (\eta(n) - n) \psi^p(n) E_n^p(f_\beta^\psi) + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \psi^p(k) E_k^p(f_\beta^\psi) \right\}, \tag{6}$$

где $\eta(n)=\eta(\psi, n)=\psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(n)\right)$, *а* C_p — *постоянная, которая может зависеть только от* p.

Доказательство. Пусть $n_0=n$, $n_i=\eta(n_{i-1})+1$, $i\in N$, и $\bar\lambda_i = \max\{\lambda_k, n_i\leqslant k\leqslant\eta(n_i)\}$. Тогда в силу неравенства (1) имеем

$$\|H_n^{(p)}(f; x; \lambda)\|_C = \left\|\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=n_i}^{[\eta(n_i)]}\lambda_k|\rho_k(f; x)|^p\right\|_C \leqslant \left\|\sum_{i=0}^{\infty}\bar\lambda_i\sum_{k=n_i}^{[\eta(n_i)]}|\rho_k(f; x)|^p\right\|_C \leqslant$$

$$\leqslant C_p\sum_{i=0}^{\infty}\bar\lambda_i\psi^p(n_i)E_{n_i}^p(f_\beta^\psi)\gamma_{n_i}. \tag{7}$$

Обозначим через k_i число, для которого $\bar\lambda_i=\lambda_{k_i}$. Тогда, поскольку числа $\lambda_k\psi^p(k)$ не возрастают, получим

$$\bar\lambda_i\psi^p(n_i)=\lambda_{k_i}2^p\cdot\psi^p(\eta(n_i))\leqslant 2^p\lambda_{k_i}\psi(k_i)\leqslant 2^p\lambda_{n_i}\psi^p(n_i).$$

Поэтому из (7) заключаем, что

$$\|H_n^{(p)}(f; x; \lambda)\|_p\leqslant C_p\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_{n_i}\psi^p(n_i)E_{n_i}^p(f_\beta^\psi)\gamma_{n_i}\leqslant$$

$$\leqslant C_p\left\{\lambda_{n_0}\psi^p(n_0)E_{n_0}^p(f_\beta^\psi)\gamma_{n_0}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\gamma_{n_i}}{\gamma_{n_{i-1}}}\sum_{k=n_{i-1}}^{[\eta(n_{i-1})]}\lambda_k\psi^p(k)E_k^p(f_\beta^\psi)\right\},$$

откуда сразу получаем оценку (6), если воспользоваться доказанным в [5] (см. также [3, с. 111]) фактом, заключающимся в том, что $\forall\psi\in\mathfrak{M}_{C,\infty}$ отношение $\gamma_{n_i}/\gamma_{n_{i-1}}$ равномерно ограниченно.

Величину $H_n^{(p)}(f; x; \lambda)$, по-видимому, впервые рассматривал Л. Д. Гоголадзе [8], показавший, что

$$\|H_{2n-2}^{(p)}(f; x; \lambda)\|_C\leqslant C_p\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k E_k^p(f) \tag{8}$$

при условии, что последовательность λ_k монотонно убывает. Впоследствии в работе [5] (см. также [3, с. 111]) результат Л. Д. Гоголадзе был уточнен для функций из множеств C_β^ψ, когда $\psi\in\mathfrak{M}_\infty$. Были также смягчены условия на числа λ_k. Именно: было показано, что если $\psi\in\mathfrak{M}_\infty$, $\eta(\psi, t)-t\leqslant K$, $\forall t\geqslant 1$, то $\forall p>0$, $\beta\in R$ и для произвольной последовательности λ_k

$$H_n^{(p)}(C_{\beta,\infty}^\psi)=\sup_{f\in C_{\beta,\infty}^\psi}\|H_n^{(p)}(f; x; \lambda)\|_C\leqslant C_p\sum_{k=n}^{\infty}|\alpha_n|\psi^p(k),\quad C_{\beta,\infty}^\psi\overset{\mathrm{df}}{=}C_\beta^\psi S_C.$$

Если же $\psi\in\mathfrak{M}_{C,\infty}$, $p>0$ и последовательность λ_k, $\lambda_k\geqslant 0$, $k\in N$, такова, что числа $\lambda_k\psi^p(k)$ не возрастают при всех $k\geqslant n$, то $\forall\beta\in R$ и $\forall n\in N$

$$H_n^{(p)}(C_{\beta,\infty}^\psi; \lambda)\leqslant C_p\left\{\lambda_n(\eta(n)-n)\psi^p(n)+\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\psi^p(k)\right\}. \tag{9}$$

Неравенство (9) является частным случаем оценки (6). Из (6) с учетом неравенства Джексона получаем также следующий аналог неравенства (9) для классов $C_\beta^\psi H_\omega$.

Теорема 2'. *Пусть* $\psi\in\mathfrak{M}_{C,\infty}$, $p>0$ *и последовательность* λ_k, $\lambda_k\leqslant 0$, $k\in N$, *такова, что числа* $\lambda_k\psi^p(k)$ *не возрастают при всех* $k\geqslant n$. *Тогда* $\forall n\in N$ *и* $\beta\in R$

$$\sup_{f\in C_\beta^\psi H_\omega}\|H_n^{(p)}(f; x; \lambda)\|_C\leqslant C_p\left\{\lambda_n(\eta(n)-n)\psi^p(n)\omega(1/n)+\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\psi^p(k)\omega^p(1/k)\right\}.$$

Доказательство теоремы 1. Будем исходить из полученного в [1] (см. равенство (3.25)) представления величины $\rho_k(f; x)$ для $f \in C_\beta^\psi C$, $\psi \in \mathfrak{M}$:

$$\rho_k(f; x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x + t/n) I_2(t)\, dt + \frac{1}{2} A_n(f; x), \tag{10}$$

в котором

$$I_2(t) = I_2(\omega; n; t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_1^\infty \psi(nv) \cos(vt + \beta\pi/2)\, dv.$$

Если $T_{n-1}(\cdot)$ — произвольный тригонометрический полином порядка $n-1$, а $T_{n-1}^{(1)}(\cdot)$ — его (ψ, β)-производная, то в силу (10) имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} T_{n-1}^{(1)}(x + t/n) I_2(t)\, dt = \rho_k(T_{n-1}; x) - \frac{1}{2} A_n(T_{n-1}; x) \equiv 0.$$

Поэтому, обозначая через $T_{n-1}^*(f; \cdot)$ полином наилучшего приближения степени $n-1$ в равномерной метрике функции $f_\beta^\psi(\cdot)$ и полагая

$$\varphi(x + t/n) = f_\beta^\psi(x + t/n) - T_n^*(x + t/n), \tag{11}$$

так что

$$|\varphi(x + t/n)| \leqslant E_n(f_\beta^\psi), \tag{12}$$

замечая при этом, что

$$A_n(f; x) = \frac{\psi(n)}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x + t) \cos(nt + \beta\pi/2)\, dt,$$

будем иметь

$$\rho_k(f; x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + t/k) I_2(t)\, dt + \frac{\psi(k)}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x + t) \cos(kt + \beta\pi/2)\, dt. \tag{13}$$

В силу соотношений (12) и (13) справедливо следующее утверждение.

Лемма. *Пусть $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$ и $a = a(k)$ — произвольная последовательность, для которой $a(k) \geqslant a_0 > 0$. Тогда $\forall f \in C_\beta^\psi C$ $\forall x$ и $\forall k \in N$*

$$\rho_k(f; x) = -\frac{\psi(k)}{\pi} \int\limits_{|t| \geqslant a(k)} \varphi(x + t/k) \frac{\sin(t + \beta\pi/2)}{t} + b_k^\psi(a; f; x), \tag{14}$$

где

$$|b_k^\psi(a; f; x)| \leqslant K E_k(f_\beta^\psi)(\psi(k) + P_k(a, \psi) + R_k(a, \psi)),$$

$$P_k(a, \psi) = \int\limits_{1/a(k)}^{\infty} \frac{\psi(kt - k)}{t}\, dt, \quad R_k(a, \psi) = \int\limits_{a(k)}^{\infty} \frac{1}{t}(\psi(k) - \psi(k + k/t))\, dt,$$

K — постоянная, зависящая, возможно, только от функции $\psi(k)$.

В [9] показано, что если в качестве $a(k)$ взять последовательность $\mu(K) = \mu(\psi; k) = K/(\eta(k) - k)$, то будут выполняться неравенства $P_k(\mu; \psi) \leqslant K\psi(k)$, $R_k(\mu; \psi) \leqslant k\psi(k)$ $\forall \psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$. Поэтому из леммы получаем такое следствие.

Следствие 2. *Пусть $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$. Тогда $\forall f \in C_\beta^\psi C$, $\forall x$ и $\forall k \in N$*

$$\rho_k(f; x) = -\frac{\psi(k)}{\pi} \int\limits_{\mu(k)/k \leqslant |t| \leqslant \pi} \varphi(x + t) \frac{\sin(kt + \beta\pi/2)}{t}\, dt + d_k^\psi(f; x),$$

где $\varphi(\cdot)$ определяется формулой (11), а $|d_k^\psi(f; x)| \leqslant K\psi(k) E_k(f_\beta^\psi)$, K — постоянная, зависящая, возможно, только от функции $\psi(k)$.

Доказательство теоремы заканчивается повторением рассуждений, посредством которых получено предложение 1 в [5]. Только теперь вместо оценки ess sup $| f_\beta^\psi(x) | \leqslant 1$ и соотношения (13) из [5] следует воспользоваться оценкой (12) и равенством (14).

1. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и приближение их суммами Фурье.— Киев, 1983.— 57 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.69).
2. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР.— 1986.— **50**, № 1.— С. 101—136.
3. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций.— Киев : Наук. думка, 1987.— 268 с.
4. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье // Докл. АН СССР.— 1984.— **277**, № 5.— С. 1074—1077.
5. *Степанец А. И., Пачулиа Н. Л.* О сильной суммируемости рядов Фурье // Вопросы суммирования рядов Фурье.— Киев, 1985.— С. 3—13.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.61).
6. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Sur la serie de Fourier dune function a carre summable // CR.— 1913.— **153**.— P. 1307—1309.
7. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* On the strong summability of Fourier series // PLMS.—1926. — **26**. P. 273—286.
8. *Гоголадзе Л. Д.* О сильной суммируемости простых и кратных тригонометрических рядов Фурье // Некоторые вопросы теории функции.— Тбилиси : Тбилис. ун-т, 1981.— Т. 2.— С. 5—50.
9. *Степанец А. И.* Приближение суммами Фурье функции с медленно убывающими коэффициентами Фурье // Приближение периодических функций суммами Фурье.— Киев, 1984.— С. 3—25.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.43).

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 28.08.86