УДК 517+519.2

В. И. Мельник

Некоторые применения тауберовых теорем с остатком для преобразования Лапласа в теории вероятностей

1. Пусть функция $f(v)$ измерима на интервале $(0, +\infty)$ и для каждого комплексного s при $\operatorname{Re} s > 0$ существует как несобственный интеграл ее преобразование Лапласа $f^*(s) = \int\limits_0^\infty f(v) \exp(-sv)\, dv$.

Наличие асимптотического разложения у функции $f^*(s)$ при $s \to 0$ при некоторых предположениях позволяет получить асимптотическое представление функции $f(v)$ при $v \to +\infty$. Сначала несколько усилим основную теорему работы [1], полученную в этом направлении.

Теорема 1. *Пусть функции* $f(x)$, $\Phi(x)$ *измеримы на* $(0, +\infty)$ *и* $f(x)$, $\Phi(x) = O((x+1)^c)$ *при* $x > 0$. *Предположим, что функции* $f(x)$,

$\Phi(x)$, $0 < \delta(x) \leqslant 1/9$, $T(x)$, $\Phi^*(s) = \int\limits_0^\infty \Phi(v) \exp(-sv)\, dv$ *удовлетворяют следующим условиям:*

а) $T(x) = \text{const} > 0$ *при* $x \leqslant x_0$, $c_1 T(x) \leqslant T(y) \leqslant c_2 T(x)$ *при* $x \leqslant y \leqslant 2x$, $x \geqslant x_0 > 0$, $0 < c_1 \leqslant c_2$;

б) $\Phi(v) - \Phi(u) = O(T(x))$ *при* $x(1-\delta(x)) \leqslant u \leqslant v \leqslant x(1+\delta(x))$, $x \to +\infty$;

в) $\overline{\lim} \,|\, \mathrm{Arg}\, (f(v) - f(u) + O(T(x))) - a(x) \,| < \pi/2$ *при* $x(1-\delta(x)) \leqslant u \leqslant v \leqslant x(1+\delta(x))$, $x \to +\infty$;

г) *для некоторых натуральных чисел* ν, $H = H(\nu)$, *зависящих от констант, содержащихся в предыдущих условиях теоремы, справедливо неравенство*

$$\sum_{|k| \leqslant 2H/\delta(x)} \left| \Delta^\nu (f^*(s) - \Phi^*(s)) \left(\frac{1 + \nu \ln 2 + ki}{x} \right) \right| = O(xT(x)), \quad x \to +\infty,$$

где $\Delta^\nu (f^*(s) - \Phi^*(s))$ *обозначает конечную разность порядка* ν *в точке* s *с шагом* $\ln 2/x$;

д) $\lim\limits_{x \to +\infty} \delta(x) = 0$.

Тогда $f(x) = \Phi(x) + O(T(x))$, $x \to \infty$, *причем константа в заключении теоремы зависит только от констант в предположениях теоремы.*

Разъясним условие в) теоремы 1. Оно означает, что существует функция $\beta(u, v)$ такая, для которой при подходящем выборе значения $\mathrm{Arg}\,(f(v) - f(u) + \beta(u, v))$ выполняется условие $\overline{\lim}\,|\,\mathrm{Arg}\,(f(v) - f(u) + \beta(u, v)) - a(x)\,| < \pi/2$ при $x(1-\delta(x)) \leqslant u \leqslant v \leqslant x(1+\delta(x))$, $x \to \infty$, причем $\beta(u, v) = O(T(x))$, $x > x_0$. Если же $f(v) - f(u) + \beta(u, v) = 0$, то за $\mathrm{Arg}\,0$ будем принимать любое подходящее число, и условие в) выполняется автоматически. Поэтому условие в) выполнено, если $f(v) - f(u) = O(T(x))$ при $x(1-\delta(x)) \leqslant u \leqslant v \leqslant x(1+\delta(x))$, $x > x_0$. Условие в) выполнено и для всех возрастающих функций (тогда полагаем $\beta(u, v) = 0$).

Если условие а) теоремы 1 дополнить предположением, что $xT(x)$ возрастает при $x > x_0$, то получим теорему 2 работы [1]. Отказ от предположения, что $xT(x)$ возрастает, существенно усиливает теорему. По теореме 2 [1] остаток в формуле $f(x) = \Phi(x) + O(T(x))$ не мог оцениваться лучше, чем $O(1/x)$, а при условиях теоремы 1 возможна оценка остатка $O(1/x^p)$ при любом p (при достаточно жестких допущениях). Так как доказательство теоремы 1 незначительно отличается от доказательства теоремы 2 [1], то приводить его не будем, а сделаем лишь несколько замечаний.

Из условия а) видно, что увеличение аргумента x в два раза приводит к увеличению или уменьшению значения функции $T(x)$ не более, чем в фиксированное число раз. Отсюда следует, что функция $T(x)$ имеет не более чем степенное возрастание или убывание, т. е. найдется константа $a > 0$ такая, что $c_1 x^{-a} < T(x) < c_2 x^a$, $x > x_0$. Более точно, справедливы неравенства

$$T(v) \leqslant \begin{cases} cT(x)\,(v/x)^a, & x \leqslant v, \\ cT(x)\,(x/v)^a, & x_0 \leqslant v \leqslant x. \end{cases} \tag{1}$$

Теперь положим $f_1(x) = f(x) - \Phi(x)$, $f_1^*(s) = f^*(s) - \Phi^*(s)$, $\xi(x) = |\, f_1(x)/T(x)\,|$. Неравенство (1) позволяет для функции $\xi(x)$ получить аналог неравенства (1) [1]. Далее доказательство аналогично [1], только при получении (5) [1] следует учесть, что $P(\exp(-v \ln 2/x)) = O((v/x)^\nu)$, а ν нужно выбрать так, что $\nu > a$.

Если условие в) теоремы 1 выполнено автоматически при любом выборе $\delta(x)$ (как в случае возрастающих функций $f(v)$), то естественно полагать

$$T(x) = \inf_{0<\delta<1/9} \left\{ \sup_{|v-x|\leqslant\delta x} |\Phi(v) - \Phi(x)| + \frac{1}{x} \sum_{|k|\leqslant H/\delta} \left| \Delta^{\nu} \left(f^* \left(\frac{1+ki+\nu \ln 2}{x} \right) - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \Phi^* \left(\frac{1+ki+\nu \ln 2}{x} \right) \right) \right| \right\}, \tag{2}$$

а за $\delta(x)$ принять такое δ, при котором в формуле (2) достигается значение, близкое к инфимуму. Указанный выбор $T(x)$ автоматически обеспечивает выполнение условий б), г) теоремы 1, и остается проверить выполнение условия а). Для произвольных функций $f(v)$ в формуле (2) под знаком inf нужно добавить еще член $\sup\limits_{|v-x|\leqslant\delta x} |f(v) - f(x)|$.

2. Проиллюстрируем возможности теоремы 1 в теории вероятностей [2]. Пусть имеем простой процесс восстановления, и длительность безотказной работы элемента является случайной величиной с плотностью распределения $f(x)$, $f(x) \geqslant 0$, $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx = 1$. Функция восстановления $H(x)$ определяется как математическое ожидание случайной величины N_x — числа восстановлений за интервал времени $(0, x)$.

Теорема 2. *Пусть* $\int\limits_0^\infty x^\alpha f(x)\,dx < +\infty$. *Тогда при* $x \to +\infty$

$$H(x) = \begin{cases} A(x) + o(x^{-2\alpha+3}), & 1 \leqslant \alpha < 2, \\ B(x) + o(x^{-2\alpha+3}), & 2 \leqslant \alpha < 3, \\ B(x) + O(x^{-\alpha} \ln x), & 3 \leqslant \alpha, \end{cases}$$

где

$$A(x) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} \int\limits_x^\infty f(u)\,du + \frac{x}{a^2} \int\limits_x^\infty u f(u)\,du + \frac{1}{2a^2} \int\limits_0^x u^2 f(u)\,du - 1,$$

$$B(x) = A(x) - \frac{\beta x}{a^3} \int\limits_x^\infty f(u)\,du + \frac{\beta}{a^3} \int\limits_x^\infty u f(u)\,du, \quad a = \int\limits_0^\infty u f(u)\,du,$$

$$\beta = \int\limits_0^\infty u^2 f(u)\,du.$$

Асимптотическое поведение функции восстановления тщательно изучалось. Начальный этап исследований изложен в [2, с. 58, 160—165]. При $\alpha > 2$ представление $H(x) = A(x) + o(x^{1-\alpha} \ln x)$ дано Стоуном [3]. При $1 \leqslant \alpha < 2$ в асимптотическом разложении $H(x)$ выделен второй член в форме $H(x) - x/a \sim A(x) - x/a$, $x \to \infty$ [4] (теорема 2.4); здесь же можно найти обзор предшествующих работ. При $1 < \alpha < 3$ в асимптотическом разложении $H(x)$ можно выделять новые члены и довести оценку остатка до $O(x^{-\alpha} \ln x)$, но тогда формула становится малообозримой. Без доказательства результаты этой работы объявлены в [5].

Перейдем к доказательству теоремы 2. Пусть $H^*(s) = \int\limits_0^\infty H(t) e^{-ts} dt$. Тогда [2, с. 57]

$$H^*(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s(1 - f^*(s))}. \tag{3}$$

Сначала рассмотрим функцию $f^*(s)$. Найдем натуральное число m, удовлетворяющее условию $m - 1 \leqslant \alpha < m$, $m > 1$. Подставим разложение $\exp(-st) = 1 - st + \ldots + (-1)^{m-1} (st)^{m-1}/(m-1)! + \varphi_m(t, s)$ в интеграл

$$f^*(s) = \int\limits_0^\infty f(t) \exp(-st)\,dt = \sum_{k=0}^{m-1} a_k s^k + \int\limits_0^\infty f(t) \varphi_m(t, s)\,dt.$$

Выбрав v произвольно, оценим

$$\left|\int_0^\infty f(t)\,\varphi_m(t,\ s)\,dt\right| \leqslant \left(\int_0^v + \int_v^\infty\right)\ (f(t)\,\varphi_m(t,\ s)\,dt).$$

В первом интеграле используем неравенство $|\varphi_m(t,\ s)| = O(|st|^m)$, $|sv| \leqslant 1$. Тогда

$$\left|\int_0^v\right| = O\ \left(|s|^m \int_0^v t^m f(t)\,dt\right) = O\ \left(|s|^m v^{m-\alpha} \int_0^\infty t^\alpha f(t)\,dt\right).$$

Во втором интеграле из неравенства $|\varphi_m(t,\ s)| \leqslant \exp(-t\,\mathrm{Re}\,s) + 1 + |s|\,t + \ldots$ $\ldots + |s|^{m-1} t^{m-1}/(m-1)!$ получим

$$\left|\int_v^\infty\right| \leqslant 2\int_v^\infty f(t)\,dt + |s|\int_v^\infty tf(t)\,dt + \ldots + |s|^{m-1}\int_v^\infty t^{m-1} f(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 2v^{-\alpha}\int_v^\infty t^\alpha f(t)\,dt + |s|\,v^{-\alpha+1}\int_v^\infty t^\alpha f(t)\,dt + \ldots + |s|^{m-1} v^{-\alpha+m-1}\int_v^\infty t^\alpha f(t)\,dt.$$

Пусть $s \to 0$, а v выбрано так, что $sv \to 0$, $(sv)^{-\alpha}\int_v^\infty t^\alpha f(t)\,dt \to 0$. Тогда, объединяя оценки интегралов, имеем

$$\int_0^\infty f(t)\,\varphi_m(t,\ s)\ dt = o\ (s^\alpha), \quad s \to 0,\ \mathrm{Re}\,s > 0,$$

и

$$f^*(s) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k s^k + r(s), \quad r(s) = o(s^\alpha), \quad s \to 0,\ \ \mathrm{Re}\,s > 0. \tag{4}$$

Коэффициенты соотношения (4) легко вычисляются: $a_0 = 1$, $a_1 = -a$, $a_2 = \beta/2$, $\alpha \geqslant 2$, и т. д. Соотношение (4) можно дифференцировать $\nu \leqslant m - 1$ раз, при этом

$$r^{(\nu)}(s) = o(s^{\alpha-\nu}), \quad s \to 0, \quad \mathrm{Re}\,s > 0, \tag{5}$$

причем доказательство в точности такое же, как и ранее.

Если же $\nu > \alpha$, то легко получить оценку

$$f^{*(\nu)}(s) = r^{(\nu)}(s) = O(\sigma^{\alpha-\nu}), \quad \sigma = \mathrm{Re}\,s \to 0+. \tag{6}$$

Теперь рассмотрим функцию $H^*(s)$. Сначала исследуем $H^*(s)$ вне круга $|s| < \varepsilon$. Если $s = iv \neq 0$, то можно найти две точки непрерывности функции $f(t)$, t_1 и t_2, в которых $f(t_1) \neq 0$, $f(t_2) \neq 0$ и $t_1 - t_2 \neq 2\pi l/v$, $l \in Z$, Z — множество целых чисел. Поскольку аргументы подынтегральной функции в точках t_1 и t_2 отличаются не на $2\pi l/v$, то

$$|f^*(iv)| = \left|\int_0^\infty f(t)\exp(-ivt)\,dt\right| < \int_0^\infty f(t)\,dt = 1.$$

Ясно также, что $f^*(iv) \to 0$, $v \to \infty$. Тогда вне отрезка $|v| < \varepsilon$ функция $|f^*(iv)|$ имеет максимум, который достигается в некоторой точке iv_0, и, следовательно, $|f^*(iv)| \leqslant c < 1$ при $|v| \geqslant \varepsilon$. Поэтому $|f^*(s)| \leqslant c_1 < 1$ при $|s| \geqslant \varepsilon$, и из формулы (3) следует $H^*(s) = O(1/s)$ при $|s| \geqslant \varepsilon$, $\mathrm{Re}\,s > 0$. С помощью метода математической индукции при $\nu > \alpha$ легко установить оценку

$$H^{*(\nu)}(s) = O(\sigma^{\alpha-\nu}/s), \quad |s| \geqslant \varepsilon > 0,\ \sigma = \mathrm{Re}\,s \to 0+. \tag{7}$$

Теперь отдельно рассмотрим различные значения α.

а) $1 \leqslant \alpha < 2$. По формуле (4) $f^*(s) = 1 - as + r(s)$, $r(s) = o(s^\alpha)$, $s \to 0$, $\operatorname{Re} s > 0$. Подставив это в формулу (3), получим

$$H^*(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{as^2} + \frac{r(s)}{a^2s^3} + \frac{1}{as^2}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{r(s)}{as}\right)^k =$$

$$= -\frac{1}{s} + \frac{1}{as^2} + \frac{r(s)}{a^2s^3} + O\left(\frac{r^2(s)}{s^4}\right), \quad s \to 0.$$

После дифференцирования с помощью соотношения (5) найдем

$$H^{*\prime}(s) = \left(-\frac{1}{s} + \frac{1}{as^2} + \frac{r(s)}{a^2s^3}\right)' + o(s^{2\alpha-5}), \quad s \to 0.$$

При повторном дифференцировании с помощью соотношений (5), (6) при $\alpha < \nu$ получаем

$$H^{*(\nu)}(s) = \left(-\frac{1}{s} + \frac{1}{as^2} + \frac{r(s)}{a^2s^3}\right)^{(\nu)} + o(s^{\alpha-4}\sigma^{\alpha-\nu}), \quad s \to 0. \tag{8}$$

Поведение преобразования Лапласа функции $H(x)$ полностью описывается формулами (7) и (8). Применим теорему 1, выбрав $\Phi(x) = A(x)$. Поскольку $\Phi^*(s) = 1/as^2 - 1/s + r(s)/a^2s^3$, а функция $H(x)$ возрастает, то применима формула (2). Оценим сначала приращение функции $\Phi(x)$. Поскольку

$$\Phi(x+\delta x) - \Phi(x) = \frac{\delta x}{a} + \frac{1}{2a^2}\int_x^{x+\delta x}(u-x)^2 f(u)\,du + \frac{\delta x}{a^2}\int_{x+\delta x}^{\infty} uf(u)\,du -$$

$$- \frac{2x^2\delta + \delta^2x^2}{2a^2}\int_{x+\delta x}^{\infty} f(u)\,du,$$

то при $\delta \leqslant x^{-3}$

$$\Phi(x+\delta x) - \Phi(x) = O\left(\delta x^{2-\alpha}\int_x^\infty u^\alpha f(u)\,du + x^{-2}\right) = o(x^{-\alpha}), \quad x \to \infty.$$

Тогда по формуле (2) при $\nu = 2$ получим

$$T(x) = \inf_{0<\delta<x^{-3}}\left\{o(x^{-\alpha}) + \frac{1}{x}\sum_{|k|\leqslant H/\delta}\left|\Delta^\nu\left((H^*(s) - f^*(s))\left(\frac{1+ki+\nu\ln 2}{x}\right)\right)\right|\right\}.$$

Для оценки внутренней суммы при заданном $\varepsilon > 0$ найдем $\tau(\varepsilon) > 0$ такое, что в формуле (8) $o(s^{\alpha-4}\sigma^{\alpha-2}) \leqslant \varepsilon|s|^{\alpha-4}\sigma^{\alpha-2}$ при $|s| \leqslant \tau(\varepsilon)$. Тогда вклад соответствующих членов в сумму не превышает

$$\frac{1}{x}\sum_{|k|\leqslant x\tau(\varepsilon)/2}\varepsilon\left(\frac{|k|+1}{x}\right)^{\alpha-4}\sigma^{\alpha-2}\sigma^2 = O(\varepsilon x^{-2\alpha+3}).$$

Вклад остальных членов оценим с помощью формулы (7):

$$\frac{O(1)}{x}\sum_{x\tau(\varepsilon)/2<|k|\leqslant H/\delta}\left(\frac{|k|}{x}\right)^{-1}\sigma^{\alpha-2}\sigma^2 = O\left(x^{-\alpha}\ln\frac{1}{\delta}\right).$$

Выбрав $\delta = x^{-3}$, получим $T(x) = 0(x^{-2\alpha+3})$. Ясно, что выбор $T(x)$ можно сделать столь гладким, чтобы выполнялось условие а) теоремы 1. Тогда по теореме 1 $H(x) = \Phi(x) + O(T(x)) = \Phi(x) + o(x^{-2\alpha+3})$, $x \to +\infty$, и теорема 2 при $1 \leqslant \alpha < 2$ доказана.

б) $2 \leqslant \alpha < 3$. По формуле (4) $f^*(s) = 1 - as + \frac{\beta}{2} s^2 + r(s)$, $r(s) = o(s^{\alpha})$, $s \to 0$, $\operatorname{Re} s > 0$. Подставив это в формулу (3), получим

$$H^*(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{as^2} + \frac{\beta}{2a^2 s} + \frac{r(s)}{a^2 s^3} + \frac{\beta r(s)}{a^3 s^2} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\nu-1} \alpha_k s^k + O\left(\left|\frac{r(s)}{s^2}\right|^2 + \left|\frac{r(s)}{s}\right| + |s|^{\nu}\right).$$

После ν-кратного дифференцирования при $\alpha < \nu$ оценка остатка, как и в формуле (8), будет $o(s^{\alpha-4}\sigma^{\alpha-\nu})$. Применим теорему 1, выбрав $\Phi(x) = B(x)$. Тогда $\Phi^*(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{as^2} + \frac{\beta}{2a^2 s} + \frac{r(s)}{a^2 s^3} + \frac{\beta r(s)}{a^3 s^2} + \frac{\beta^2}{2a^3}$. Выбрав $\nu = 3$, получим по формуле (2) $T(x) = o(x^{-2\alpha+3})$, и теорема 2 при $2 \leqslant \alpha < 3$ доказана.

в) $3 \leqslant \alpha$. Пусть натуральное число m выбрано так, что $m - 1 \leqslant \alpha < m$. По формуле (4) $f^*(s) = 1 - as + \frac{\beta}{2} s^2 - \frac{\gamma}{6} s^3 + \sum_{k=4}^{m-1} a_k s^k + r(s)$, $r(s) = o(s^{\alpha})$, $s \to 0$. Подставив это в формулу (3), получим

$$H^*(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{as^2} + \frac{\beta}{2a^2 s} + \frac{r(s)}{a^2 s^3} + \frac{\beta r(s)}{a^3 s^2} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\nu-1} a_k s^k + O\left(\left|\frac{r(s)}{s^2}\right|^2 + \left|\frac{r(s)}{s}\right| + |s|^{\nu}\right), \quad s \to 0.$$

Применим теорему 1, выбрав $\Phi(x)$ так же, как и ранее. Тогда

$$\Phi^*(s) = \frac{1}{as^2} + \left(\frac{\beta}{2a^2} - 1\right)\frac{1}{s} + \frac{r(s)}{a^2 s^3} + \frac{\beta r(s)}{a^3 s^2} + \sum_{k=0}^{m-1} a'_k s^k.$$

При $\nu > \alpha$ получим $T(x) = O(x^{-\alpha} \ln x)$, и по теореме 1 $H(x) = \Phi(x) + O(T(x)) = B(x) + O(x^{-\alpha} \ln x)$. Теорема 2 доказана.

1. *Мельник В. И.* Тауберовы теоремы с остатком для преобразования Лапласа в плоскости / Мат. сб.— 1982.— **118**, № 3.— С. 411—421.
2. *Кокс Д. Р., Смит В. Л.* Теория восстановления.— М. : Сов. радио, 1967.— 299 с.
3. *Stone C.* On characteristic functions and renewal theory // Trans. Amer. Math. Soc.— 1965. — **120**, N 2.— P. 327—342.
4. *Сгибнев М. С.* Оценки скорости сходимости в теории восстановления : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Новосибирск, 1981.— 16 с.
5. *Мельник В. И.* Некоторые применения тауберовых теорем с остатком для преобразования Лапласа в теории вероятностей // Теорет. и прикл. вопросы математики. II.— Тарту : Тартус. ун-т, 1985.— С. 91—92.

Киев. пед. ин-т

Получено 23.12.85