УДК 517.9

О. Б. Лыкова, А. А. Бойчук

Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях

1. Постановка задачи и обозначения. В настоящей работе рассматривается вопрос о существовании и построении 2π-периодических решений часто встречающихся в теории нелинейных колебаний [1—4] систем вида

$$\dot{z} = Az + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon) + \varphi(t). \tag{1}$$

При этом $\varphi(t)$, $Z(z, t, \varepsilon)$ — 2π-периодические по t n-мерные вектор-функции, принадлежащие классу $C[t]$ (непрерывные по t); $(n \times n)$-матрица A имеет собственные числа, равные нулю или целой кратности $\sqrt{-1}$. Порождающая система, получающаяся из (1) при $\varepsilon = 0$:

$$\dot{z}_0 = Az_0 + \varphi(t) \tag{2}$$

обладает 2π-периодическими решениями, для чего необходимо и достаточно [2—4], чтобы вектор-столбец $\varphi(t)$ удовлетворял условию ортогональности:

$$\int_0^{2\pi} H(t)\varphi(t)\,dt = 0,$$

где $H(t)$ определена ниже. Вектор-функция $Z(z, t, \varepsilon)$ принадлежит классу $C[\varepsilon]$ в области $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ и классу $C^1[z]$ (непрерывно дифференцируема по z) в окрестности 2π-периодических решений порождающей системы.

Выполняя в (1) замену переменных $z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0) + x(t, \varepsilon)$, приходим к задаче отыскания 2π-периодических решений $x(t, \varepsilon) \in C[\varepsilon]$, обращающихся в нулевые при $\varepsilon = 0$, для следующей системы:

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon Z(z_0 + x, t, \varepsilon). \tag{3}$$

Здесь $z_0 = z_0(t, c_0)$ — порождающее m-параметрическое семейство 2π-периодических решений системы (2), представимое в виде

$$z_0(t, c_0) = \Xi(t)c_0 + z_0^{(1)}(t), \quad z_0^{(1)}(t) = \int_0^{2\pi} G(t, s)\varphi(s)\,ds,$$

где, в свою очередь, $\Xi(t)$ — действительная $n \times m$-матрица, столбцы которой есть полная система m линейно-независимых 2π-периодических решений однородной системы (2); $H(t)$ — действительная $(m \times n)$-матрица, строки которой есть полная система m линейно-независимых 2π-периодических решений системы $\dot{y} = -yA$, сопряженной к однородной системе (2); $G(t, s)$ — обобщенная матрица Грина [5] задачи о периодических решениях системы (2), с помощью которой можно записать единственное, ортогональное ко всем 2π-периодическим решениям однородной системы (2), частное 2π-периодическое решение $z_0^{(1)}(t)$ системы (2); c_0 — m вектор-столбец констант. Справедливо разложение

$$Z(z_0 + x, t, \varepsilon) = f_0(t, c_0) + P(t)x + R(x, t, \varepsilon), \quad R(0, t, 0) = \partial R(0, t, 0)/\partial x = 0,$$
$$f_0(t, c_0) = Z(z_0(t, c_0), t, 0) \in C[t], \quad R(x, t, \varepsilon) \in C^1[x], \quad C[t], \quad C[\varepsilon].$$

Известно [2], что если уравнение для порождающих амплитуд

$$\int_0^{2\pi} H(t)Z(z_0(t, c_0), t, 0)\,dt = 0 \tag{4}$$

имеет решение $c_0 = c_0^*$ и это решение является простым, т. е. выполнено условие [4]

$$\det B_0 \neq 0 \quad \left(B_0 = \int_0^{2\pi} H(t) P(t) \Xi(t)\, dt\right),$$

то (при каждом $c_0 = c_0^*$) существует единственное 2π-периодическое решение системы (3) $x(t, \varepsilon) \in C[\varepsilon]$, обращающееся в нулевое при $\varepsilon = 0$. Это решение может быть представлено в виде

$$x(t, \varepsilon) = \Xi(t) c + x^{(1)}(t, \varepsilon), \tag{5}$$

где неизвестный постоянный вектор $c = c(\varepsilon)$ и неизвестная 2π-периодическая функция $x^{(1)}(t, \varepsilon)$ определяются из операторных уравнений

$$B_0 c + \int_0^{2\pi} H(t) \{P(t) x^{(1)}(t, \varepsilon) + R(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\}\, dt = 0,$$

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon \int_0^{2\pi} G(t, s) \{f_0(s, c_0^*) + P(s)[\Xi(s) c + x^{(1)}(s, \varepsilon)] + R(x(s, \varepsilon), s, \varepsilon)\}\, ds, \tag{6}$$

для решения которых применим метод простых итераций [4] и разработана схема оценки интервала значений ε, при которых итерационный процесс сходится. Решение операторной системы (5), (6) сходится к искомому, обращающемуся в нуль при $\varepsilon = 0$, 2π-периодическому решению $x(t, \varepsilon) \in C[\varepsilon]$ системы (3), которое будет единственным. Цель настоящей работы — распространение метода простых итераций на случай кратных корней уравнения для порождающих амплитуд (4), т. е. на случай $\det B_0 = 0$.

2. Основной результат. Построение эквивалентной операторной системы. В фиксированном базисе будем отождествлять матрицу B_0 с линейным оператором, действующим из m-мерного вещественного евклидова пространства E_m в E_m; P_0, $P_0^{(*)}$ — ортопроекторы (матрицы), проектирующие E_m на нуль-пространство $N(B_0)$ матрицы (оператора) B_0 и E_m на нуль-пространство $N(B_0^*)$ сопряженной к B_0 матрицы $B_0^* = B_0^{\tau}$; B_0^{+} — псевдообратная к B_0 матрица. Для вычисления ортопроекторов и псевдообратных матриц существуют хорошо разработанные алгоритмы [6]. Так как $\det B_0 = 0$, то $P_0 \neq 0$, $P_0^{(*)} \neq 0$.

Для разрешимости первого из уравнений системы (6) относительно $c \in E_m$ необходимо и достаточно, чтобы свободный член этой алгебраической относительно c системы принадлежал ортогональному дополнению подпространства $N(B_0^*)$, т. е. чтобы выполнялось равенство

$$P_0^{(*)} \int_0^{2\pi} H(t) \{P(t) x^{(1)}(t, \varepsilon) + R(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\}\, dt = 0. \tag{7}$$

При условии (7) из (6) находим

$$c = -B_0^{+} \int_0^{2\pi} H(t) \{P(t) x^{(1)}(t, \varepsilon) + R(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\}\, dt + c^{(1)} = c^{(0)} + c^{(1)},$$

где $c^{(1)}$ — произвольная векторная константа из $N(B_0)$: $c^{(1)} = P_0 c = P_0 c^{(1)} \in N(B_0)$, $c^{(0)} = (I - P_0) c \in E_m \ominus N(B_0)$ — ортогональное дополнение к $N(B_0)$. Для $x^{(1)}(t, \varepsilon)$ с учетом представления c справедлива формула

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G_1(t) P_0 c^{(1)} + x^{(2)}(t, \varepsilon), \tag{8}$$

где $G_1(t) = \int_0^{2\pi} G(t, s) P(s) \Xi(s)\, ds$ — $(n \times m)$-матрица;

$$x^{(2)}(t, \varepsilon) = \varepsilon \int_0^{2\pi} G(t, s) \{f_0(s, c_0^*) + P(s) [\Xi(s)(I - P_0) c^{(0)} + \varepsilon G_1(s) P_0 c^{(1)} + x^{(2)}] + R(x, s, \varepsilon)\} ds.$$

Из (7) с учетом представления (8) получим систему для определения $c^{(1)} \in \in N(B_0)$:

$$\varepsilon B_1 c^{(1)} + P_0^{(*)} \int_0^{2\pi} H(t) \{P(t) x^{(2)}(t, \varepsilon) + R(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\} dt = 0. \tag{9}$$

Необходимым и достаточным условием разрешимости алгебраической относительно $\varepsilon c^{(1)} \in N(B_0)$ системы является условие

$$P_1^{(*)} P_0^{(*)} \int_0^{2\pi} H(t) \{P(t) x^{(2)}(t, \varepsilon) + R(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\} dt = 0,$$

где P_1, $P_1^{(*)}$ — ортопроекторы матриц B_1, B_1^* на $N(B_1)$, $N(B_1^*)$ соответственно; B_1^+ — матрица, псевдообратная к матрице B_1;

$$B_1 = P_0^{(*)} \int_0^{2\pi} H(t) P(t) G_1(t) dt P_0.$$

Предположим, что $P_1^{(*)} P_0^{(*)} = 0$. Тогда можно показать, что $P_0 P_1 = 0$, т. е. $N(B_0) \cap N(B_1) = 0$, а значит, $B_1 c^{(1)} \neq 0$, если $c^{(1)} = P_0 c \neq 0$. Таким образом, при условии $P_1^{(*)} P_0^{(*)} = 0$ система (9) однозначно разрешима относительно $\varepsilon c^{(1)}$:

$$\varepsilon c^{(1)} = - B_1^+ P_0^{(*)} \int_0^{2\pi} H(t) \{P(t) x^{(2)}(t, \varepsilon) + R(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\} dt.$$

Следовательно, при условии $P_0 \neq 0$, $P_1^{(*)} P_0^{(*)} = 0$ от операторной системы (5), (6) приходим к системе

$$x(t, \varepsilon) = \Xi(t)(I - P_0) c^{(0)} + \varepsilon G_1(t) P_0 c^{(1)} + x^{(2)}(t, \varepsilon), \tag{10}$$

$$c^{(0)} = - B_0^+ \int_0^{2\pi} H(t) \{P(t) [\varepsilon G_1(t) P_0 c^{(1)} + x^{(2)}(t, \varepsilon)] + R(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\} dt,$$

$$\varepsilon c^{(1)} = - B_1^+ P_0^{(*)} \int_0^{2\pi} H(t) \{P(t) x^{(2)}(t, \varepsilon) + R(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\} dt,$$

$$x^{(2)}(t, \varepsilon) = \varepsilon \int_0^{2\pi} G(t, s) \{f_0(s, c_0^*) + P(s) [\Xi(s)(I - P_0) c^{(0)} + \varepsilon G_1(s) P_0 c^{(1)} + x^{(2)}] + R(x, s, \varepsilon)\} ds,$$

которая эквивалентна системе (3) на множестве 2π-периодических функций, непрерывных по t и обращающихся в нуль при $\varepsilon = 0$. Операторная система (10) принадлежит классу систем вида (5.11) из [4], для решения которых применим метод простых итераций и эффективно, с помощью мажорант Ляпунова, строятся оценки области сходимости итерационного процесса и оценки погрешности приближенных решений, получаемых на любом конечном шаге. Система (10) решается с помощью следующего итерационного процесса.

Первое приближение к искомому 2π-периодическому решению $x(t, \varepsilon) \in C[\varepsilon]$ системы (3) естественно искать как 2π-периодическое решение следующей системы:

$$\dot{x}_1 = A x_1 + \varepsilon f_0(t, c_0^*). \tag{11}$$

Так как $c_0 = c_0^*$ выбрано так, чтобы удовлетворялось уравнение для порождающих амплитуд (4), то 2π-периодическое решение $x_1(t, \varepsilon)$ системы (11) существует и имеет вид $x_1(t, \varepsilon) = \Xi(t) c_1 + x_1^{(1)}(t, \varepsilon)$, где c_1 — произвольный m вектор-столбец констант, однозначно определяемый на последующих шагах итерационного процесса; $x_1^{(1)}(t, \varepsilon)$ — единственное частное 2π-периодическое решение системы (11), ортогональное ко всем 2π-периодическим решениям однородной системы (11), представимое в виде

$$x_1^{(1)} = \varepsilon \int_0^{2\pi} G(t, s) f_0(s, c_0^*)\, ds.$$

Второе приближение ищем как 2π-периодическое решение системы

$$\dot{x}_2 = Ax_2 + \varepsilon \{f_0(t, c_0^*) + P(t)[\Xi(t) c_1 + x_1^{(1)}(t, \varepsilon)] + R(x_1^{(1)}(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\}. \quad (12)$$

Из условия существования 2π-периодического решения системы (12) с учетом (4) получим систему для отыскания $c_1 \in E_m$.

$$B_0 c_1 + \int_0^{2\pi} H(t) \{P(t) x_1^{(1)}(t, \varepsilon) + R(x_1^{(1)}(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\}\, dt = 0. \quad (13)$$

Для разрешимости (13) относительно $c_1 \in E_m$ необходимо и достаточно выполнение условия

$$P_0^{(*)} \int_0^{2\pi} H(t) \{P(t) x_1^{(1)}(t, \varepsilon) + R(x_1^{(1)}(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\}\, dt = 0. \quad (14)$$

При выполнении условия (14) система (13) имеет решение

$$c_1 = -B_0^+ \int_0^{2\pi} H(t) \{P(t) x_1^{(1)}(t, \varepsilon) + R(x_1^{(1)}(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\}\, dt + c_1^{(1)} = c_1^{(0)} + c_1^{(1)},$$

определяемое с точностью до константы $c_1^{(1)} = P_0 c_1 \in N(B_0)$, которая будет однозначно найдена на следующем шаге итерационного процесса. Общее 2π-периодическое решение системы (12) имеет вид $x_2(t, \varepsilon) = \Xi(t) c_2 + \varepsilon G_1(t) P_0 c_1^{(1)} + x_2^{(2)}(t, \varepsilon)$, где

$$x_2^{(2)}(t, \varepsilon) = \varepsilon \int_0^{2\pi} G(t, s) \{f_0(s, c_0^*) + P(s)[\Xi(s)(I - P_0) c_1^{(0)} + x_1^{(1)}(s, \varepsilon)] + R(x_1^{(1)}, s, \varepsilon)\} ds.$$

Третье приближение ищем как 2π-периодическое решение системы

$$\dot{x}_3 = Ax_3 + \varepsilon \{f_0(t, c_0^*) + P(t)[\Xi(t) c_2 + \varepsilon G_1(t) P_0 c_1^{(1)} + x_2^{(2)}(t, \varepsilon)] + R(x_2^{(2)}, t, \varepsilon)\}. \quad (15)$$

Из условия существования периодических решений системы (15) получим алгебраическую систему

$$B_0 c_2 + \int_0^{2\pi} H(t) \{P(t)[\varepsilon G_1(t) P_0 c_1^{(1)} + x_2^{(2)}(t, \varepsilon)] + R(x_2^{(2)}, t, \varepsilon)\}\, dt = 0,$$

условие разрешимости которой относительно $c_2 = c_2^{(0)} + c_2^{(1)}$ дает систему для определения $\varepsilon c_1^{(1)} \in N(B_0)$:

$$\varepsilon B_1 c_1^{(1)} + P_0^{(*)} \int_0^{2\pi} H(t) \{P(t) x_2^{(2)}(t, \varepsilon) + R(x_2^{(2)}(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\}\, dt = 0.$$

Так как выполнено условие $P_1^{(*)} P_0^{(*)} = 0$, то система однозначно разрешима относительно $\varepsilon c_1^{(1)}$.

Продолжая аналогичный процесс, легко заметить, что для определения 2π-периодического решения $x(t, \varepsilon) \in C[\varepsilon]$, $x(t, 0) = 0$ системы (3) получим следующую итерационную процедуру:

$$\varepsilon c_{k-1}^{(1)} = -B_1^+ P_0^{(*)} \int_0^{2\pi} H(t) \{P(t) x_k^{(2)}(t, \varepsilon) + R(x_k(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\} dt,$$

$$c_k^{(0)} = -B_0^+ \int_0^{2\pi} H(t) \{P(t) [\varepsilon G_1(t) P_0 c_{k-1}^{(1)} + x_k^{(2)}(t, \varepsilon)] + R(x_k(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\} dt,$$

$$x_{k+1}^{(2)}(t, \varepsilon) = \varepsilon \int_0^{2\pi} G(t, s) \{f_0(s, c_0^*) + P(s) [\Xi(s)(I - P_0) c_k^{(0)} + \varepsilon G_1(s) P_0 c_{k-1}^{(1)} + x_k^{(2)}] + R(x_k, s, \varepsilon)\} ds, \tag{16}$$

$$x_{k+1}(t, \varepsilon) = \Xi(t)(I - P_0) c_k^{(0)} + \varepsilon G_1(t) P_0 c_{k-1}^{(1)} + x_{k+1}^{(2)}(t, \varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$x_0(t, \varepsilon) = x_0^{(2)}(t, \varepsilon) = 0.$$

Для получения оценок области сходимости и погрешности приближений, получаемых на любом конечном шаге итерационного процесса (16), будем использовать метод мажорант Ляпунова [7]. Операторную систему (10) можно представить в виде (5.11) из [4]:

$$y(t, \varepsilon) = L^{(1)} y + L^{(2)} F(y, t, \varepsilon), \tag{17}$$

где $L^{(1)}, L^{(2)}$ — линейные, ограниченные, клеточные матричные операторы, определяемые по формулам

$$L^{(1)} y = \begin{pmatrix} 0 & \Xi(t) & G_1(t) & I \\ 0 & 0 & D & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y; \qquad L^{(2)} F = \operatorname{diag}\{0, L_1, L_2, L\} F;$$

$y = y(t, \varepsilon) = \operatorname{col}(x(t, \varepsilon), (I - P_0) c^{(0)}, \varepsilon P_0 c^{(1)}, x^{(2)}(t, \varepsilon))$ — $2(n + m)$-мерный вектор-столбец; $F = F(y, t, \varepsilon) = \operatorname{col}(0, R(x, t, \varepsilon), R(x, t, \varepsilon), \varepsilon\{f_0(t, c_0^*) + P(t) \times [\Xi(t)(I - P_0) c^{(0)} + \varepsilon G_1(t) P_0 c^{(1)} + x^{(2)}] + R(x, t, \varepsilon)\})$ — $4n$-мерная векторная функция векторной переменной y, принадлежащая классу $C^1[y]$, $C[t, \varepsilon]$, $\|y\| \leqslant q$, $t \in [0, 2\pi]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$; $F(0, t, 0) = \partial F(0, t, 0)/\partial y = 0$; $D = -B_0^+ \int_0^{2\pi} H(t) P(t) G_1(t) P_0 dt$ — $(m \times m)$-матрица: I — $(n \times n)$-единичная матрица. Линейные ограниченные матричные операторы L_1, L_2, L определяются по формулам

$$L_1 \varphi = -B_0^+ \int_0^{2\pi} H(t) \varphi(t) dt, \quad L_2 \varphi = -B_1^+ P_0^{(*)} \int_0^{2\pi} H(t) P(t) \varphi(t) dt,$$

$$L \varphi = \int_0^{2\pi} G(t, s) \varphi(s) ds.$$

Теперь для того чтобы оценить область сходимости по ε итерационного процесса (16), соответствующего операторной системе (10), записанной в виде (17), поступаем согласно схеме, описанной в [4]. Для вектор-функции $F(y, t, \varepsilon)$ в области ее определения строим мажоранту Ляпунова (например, скалярную) $\Phi(u, \varepsilon): \Phi(0, 0) = \partial\Phi(0, 0)/\partial u = 0$. Составляем мажорирующее уравнение (или систему уравнений) $u = \rho_1 u + \rho_2 \Phi(u, \varepsilon) = U(u, \varepsilon)$, где ρ_1, ρ_2 — выбираемые как можно менее грубо постоянные, с помощью которых оцениваются, например в равномерной норме, операторы $L^{(1)}$, $L^{(2)}$: $|||L^{(1)} y||| \leqslant$

$\leqslant \rho_1 |||y|||$, $|||L^{(2)}F||| \leqslant \rho_2 |||F|||$ (можно записывать условия ограниченности операторов в векторно-матричном виде, тогда вместо скаляров ρ_i будут постоянные матрицы). Из системы уравнений $u = U(u, \varepsilon)$, $\det(I - \partial U(u, \varepsilon)/\partial u) = 0$ определяется верхняя граница интервала значений $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$, при которых мажорирующее уравнение имеет положительное решение $u = u(\varepsilon) \in C[\varepsilon]$, $u(0) = 0$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ (такое решение будет существовать и единственно).

Тогда на отрезке $[0, \varepsilon_0]$ итерационная процедура (16) сходится к единственному решению $x(t, \varepsilon) \in C[\varepsilon]$, $x(t, 0) = 0$ системы (10), причем справедливы оценки

$$|||x(t, \varepsilon)||| \leqslant u(\varepsilon), \quad |||x_k(t, \varepsilon)||| \leqslant u_k(\varepsilon),$$

$$|||x_{k+1}(t, \varepsilon) - x_k(t, \varepsilon)||| \leqslant u_{k+1}(\varepsilon) - u_k(\varepsilon),$$

где $u_k(\varepsilon) = U(u_{k-1}, \varepsilon)$, $k = 1, 2, \ldots$; $u_0 = u_0(\varepsilon) = 0$, $|||x(t, \varepsilon)||| = \max\limits_{t \in [0, 2\pi]} \|x(t, \varepsilon)\|$, $\|A\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{ik}|$.

Техника проведения оценок с помощью мажорант Ляпунова будет ниже проиллюстрирована на примере, однако для установления факта существования 2π-периодического решения системы (3) достаточно показать лишь возможность сведения задачи о периодических решениях системы (3) к операторному виду (17). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Если $P_0 \neq 0$, $P_1^{(*)} P_0^{(*)} = 0$, то при условии* (14) *для каждого $c_0 = c_0^*$, удовлетворяющего уравнению для порождающих амплитуд* (4), *система* (3) *имеет единственное на* $[0, \varepsilon_0]$ *2π-периодическое решение $x(t, \varepsilon) \in C[\varepsilon]$, обращающееся в нулевое при $\varepsilon = 0$. Это решение можно найти с помощью сходящегося на* $[0, \varepsilon_0]$ *итерационного процесса* (16).

Замечание 1. Если $\det B_0 \neq 0$ ($P_0 = P_0^{(*)} = 0$, $B_0^+ = B_0^{-1}$), то итерационный процесс (16) переходит в (7.42) из работы [4].

Замечание 2. Случай $P_0 = 0 \, (\det B_0 \neq 0)$ назван в [4] критическим случаем первого порядка. Случай $P_0 \neq 0$, $P_1^{(*)} P_0^{(*)} = 0$, рассмотренный в настоящей работе, естественно назвать критическим случаем второго порядка.

Характерно, что существование 2π-периодических решений системы (3) зависит в этом случае от условия (14), составляемого с помощью нелинейности и первого приближения к искомому решению.

3. Пример. В качестве иллюстрации применимости предложенного итерационного процесса (16) рассмотрим хорошо изученную [2, 8] задачу о построении 2π-периодических решений уравнения Матье

$$\ddot{z} + (a + \varepsilon \cos 2t) z = 0, \tag{18}$$

которое можно представить в виде системы

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{bmatrix} y + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -h(\varepsilon) - \cos 2t & 0 \end{bmatrix} y, \tag{19}$$

где $a = k^2 + \varepsilon h(\varepsilon)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; $h(\varepsilon) = h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \ldots$ ε — малый положительный параметр. Для определенности рассмотрим случай $k = 1$. Определим условия, при которых система (19) будет иметь 2π-периодическое решение. Это будут условия на параметры h_i, из которых эти пока неизвестные константы и будут определены.

Порождающая система, получающаяся из (19) при $\varepsilon = 0$, имеет двупараметрическое семейство 2π-периодических решений $y_0(t, c_0) = \Xi(t) c_0$, где $\Xi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$, $c_0 = \begin{bmatrix} c_{01} \\ c_{02} \end{bmatrix}$ — произвольный вектор-столбец констант. Совершая в (19) замену переменных $y(t, \varepsilon) = y_0(t, c_0) + x(t, \varepsilon)$, приходим к задаче отыскания 2π-периодических решений $x(t, \varepsilon) \in C[\varepsilon]$, $x(t, 0) = 0$ для следующей системы:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -h(\varepsilon) - \cos 2t & 0 \end{bmatrix} (y_0 + x). \tag{20}$$

Необходимое условие существования 2π-периодических решений системы (20) имеет вид

$$\int_0^{2\pi} H(t)\,P(t)\,y_0(t, c_0)\,dt = B_0c_0 = 0, \tag{21}$$

где

$$H(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}, \quad P(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -h_0 - \cos 2t & 0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 & h_0 - 1/2 \\ h_0 + 1/2 & 0 \end{bmatrix}\pi.$$

Для того чтобы уравнение для порождающих амплитуд (21) имело нетривиальное решение $c_0 \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\det B_0 = h_0^2 - 1/4 = 0$, откуда определяем h_0. Пусть, например, $h_0 = -1/2$, тогда

$$B_0 = \pi\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_0^+ = \frac{1}{\pi}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_0^{(*)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; c_0^* = P_0c_0.$$

С помощью обобщенной матрицы Грина

$$G(t, s) = g(t, s)\,\Xi(t)\,\Xi^{-1}(s), \quad g(t, s) = \begin{cases} \dfrac{s}{2\pi}, & 0 \leqslant s < t, \\ \dfrac{s}{2\pi} - 1, & t \leqslant s \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

определим $x_1^{(2)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G_1(t)\,c_0^* = \dfrac{\varepsilon}{16}\begin{bmatrix} \cos 3t \\ -3\sin 3t \end{bmatrix}$, $c_0^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Далее нетрудно проверить, что

$$B_1 = \frac{\pi}{32}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \; B_1^+ = \frac{32}{\pi}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, P_1^{(*)}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Условия $P_0 \neq 0$, $P_1{}^{(*)}P_0{}^{(*)} = 0$ выполнены и поэтому для применимости к задаче отыскания 2π-периодического решения $x(t, \varepsilon) \in C[\varepsilon]$, $x(t, 0) = 0$ системы (20) итерационного процесса (16) необходимо выполнение условия (14), в котором

$$R(x_1^{(1)}(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = \varepsilon\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -h_1 - \varepsilon h_2 - \ldots & 0 \end{bmatrix}(y_0(t, c_0^*) + x_1^{(1)}(t, \varepsilon)), \quad x_1^{(1)}(t, \varepsilon) = x_1^{(2)}(t, \varepsilon).$$

Условия (14) выполняются, если $h_1 = -1/32$, $h_i = 0$, $i = 2, 3, \ldots$. Таким образом, для нахождения 2π-периодического решения $x(t, \varepsilon) \in C[\varepsilon]$, $x(t, 0) = 0$ системы

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}x + \varepsilon\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 - \cos 2t & 0 \end{bmatrix}(y_0(t, c_0^*) + x) + \frac{\varepsilon}{32}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}(y_0 + x)\right\}$$

применима итерационная процедура (16), которая после соответствующих преобразований имеет вид

$$\begin{gathered}
\varepsilon c_{k-1}^{(1)} = \frac{32}{\pi}\int_0^{2\pi}\begin{bmatrix} -1/2\cos 3t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}x_k^{(2)}(t, \varepsilon)\,dt + \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{2\pi}\begin{bmatrix} \cos t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\times \\
\times\left\{\begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}x_k(t, \varepsilon)\right\}dt, \\
c_k^{(0)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\sin t + 1/2\sin 3t & 0 \end{bmatrix}x_k^{(2)}(t, \varepsilon)\,dt + \frac{\varepsilon}{32\pi}\int_0^{2\pi}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\sin t & 0 \end{bmatrix}x_k(t, \varepsilon)\,dt, \\
x_{k+1}^{(2)}(t, \varepsilon) = x_1^{(2)}(t, \varepsilon) + \varepsilon\Xi(t)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s\Xi^{-1}(s)\,\{\ldots\}\,ds - \int_t^{2\pi}\Xi^{-1}(s)\,\{\ldots\}\,ds,\right. \\
x_{k+1}(t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & \sin t \\ 0 & \cos t \end{bmatrix}c_k^{(0)} + \frac{\varepsilon}{16}\begin{bmatrix} \cos 3t & 0 \\ -3\sin 3t & 0 \end{bmatrix}c_{k-1}^{(1)} + x_{k+1}^{(2)}(t, \varepsilon), \\
k = 1, 2, \ldots; \qquad x_0(t, \varepsilon) = x_0^{(2)}(t, \varepsilon) = 0,
\end{gathered} \tag{22}$$

где

$$\begin{gathered}
\{\ldots\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sin s - 1/2\sin 3s \end{bmatrix}c_k^{(0)} + \frac{\varepsilon}{32}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\cos s + \cos 3s - \cos 5s & 0 \end{bmatrix}c_{k-1}^{(1)} + \\
+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 - \cos 2t & 0 \end{bmatrix}x_k^{(2)}(s, \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{32}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ \cos s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}x_k(s, \varepsilon)\right\}.
\end{gathered}$$

Поэтому при $k=0$ имеем

$$\varepsilon c_{-1}^{(1)}=0,\quad c_0^{(0)}=0,\quad x_1^{(2)}(t,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{16}\begin{bmatrix}\cos 3t\\ -3\sin 3t\end{bmatrix},\quad x_1(t,\varepsilon)=x_1^{(2)}(t,\varepsilon).$$

При $k=1$

$$\varepsilon c_0^{(1)}=0,\quad c_1^{(0)}=0,\quad x_2^{(2)}(t,\varepsilon)=\begin{bmatrix}(q-q^2-2q^3)\cos 3t+(q^2/3+q^3)\cos 5t\\ -3(q-q^2-2q^3)\sin 3t-5(q^2/3+q^3)\sin 5t\end{bmatrix},$$

$$x_2(t,\varepsilon)=x_2^{(2)}(t,\varepsilon),\quad q=\varepsilon/16.$$

Учитывая формулу для определения $c_k^{(0)}$ и то, что первые компоненты в выражении для $x_k^{(2)}(t,\varepsilon)$ и $x_k(t,\varepsilon)$, $k=1,2,\ldots$, есть полиномы по косинусам, можно заметить, что $c_k^{(0)}=0$, $k=0,1,2,\ldots$, и итерационный процесс (22) несколько упрощается.

Оценки операторов, входящих в (22) (с учетом $c_k^{(0)}=0$) следующие:

$$\|\varepsilon c^{(1)}\|\leqslant 32\,|||\,x^{(2)}(t,\varepsilon)\,|||+2\varepsilon\,(1+|||\,x(t,\varepsilon)\,|||),\quad |||\,x^{(2)}(t,\varepsilon)\,|||\leqslant|||\,x_1^{(2)}(t,\varepsilon)\,|||+$$

$$+6\pi\varepsilon\,|||\,\{\ldots\}\,|||,\quad |||\,x(t,\varepsilon)\,|||\leqslant\frac{3}{16}\,\|\varepsilon c^{(1)}\|+|||\,x^{(2)}(t,\varepsilon)\,|||,$$

где

$$|||\,x_1^{(2)}(t,\varepsilon)\,|||=3\varepsilon/16,\quad |||\,\{\ldots\}\,|||\leqslant\frac{3}{32}\,\|\varepsilon c^{(1)}\|+\frac{3}{2}\,|||\,x^{(2)}(t,\varepsilon)\,|||+\frac{\varepsilon}{32}(1+|||\,x(t,\varepsilon)\,|||).$$

Поэтому система мажорирующих уравнений Ляпунова, с помощью которой оценивается граница области сходимости итерационного процесса (22), имеет вид

$$v=32u^{(2)}+2\varepsilon\,(1+u),\quad u^{(2)}=\frac{3\varepsilon}{16}+6\pi\varepsilon\left\{\frac{3}{32}\,v+\frac{3}{2}\,u^{(2)}+\frac{\varepsilon}{32}\,(1+u)\right\},$$

$$u=\frac{3}{16}\,v+u^{(2)},$$

где v, $u^{(2)}$, u мажорируют $\varepsilon\,c^{(1)}$, $x^{(2)}(t,\varepsilon)$, $x(t,\varepsilon)$ соответственно. Исключая v, $u^{(2)}$ из второго уравнения, получаем одно уравнение относительно u:

$$[\varepsilon^2-(432\pi+6)\,\varepsilon/(15\pi)+16/(15\pi)]\,u=6\varepsilon/(15\pi)-\varepsilon^2,$$

откуда из уравнения $\varepsilon^2-28{,}9273\,\varepsilon+0{,}3395=\delta$, $\delta=0{,}001$, получаем величину $\varepsilon=\varepsilon_0=0{,}0175$, при которой мажорирующие уравнения имеют единственное положительное решение, а итерационный процесс (22) при $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ гарантированно сходится (для линейных по u систем δ — как угодно малое число).

С точностью до членов порядка q найденное приближение $x_2(t,\varepsilon)$ к точному 2π-периодическому решению системы (20) совпадает с ранее известными [9] результатами для уравнения Матье, полученными другими методами.

Известно, что 2π-периодические решения уравнения Матье существуют тогда и только тогда, когда точка (a,ε) на плоскости параметров лежит на границе зон устойчивости [9]. Выше показано, что при $a=a(\varepsilon)=1-\varepsilon/2-\varepsilon^2/32$ 2π-периодическое решение системы (20), а значит, и уравнения Матье (18) существует по крайней мере для $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0=0{,}0175$. Поэтому при значениях $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ имеем точное выражение $a=1-\varepsilon/2-\varepsilon^2/32$ для границы зоны устойчивости уравнения Матье (18) в плоскости (a,ε).

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 503 с.
2. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний.— М. : Гостехиздат, 1956.— 491 с.
3. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.— М. : Наука, 1967.— 472 с.
4. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем.— М. : Наука, 1979.— 431 с.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М. : Наука, 1965.— 703 с.
6. *Кублановская В. Н.* О вычислении обобщенной обратной матрицы и проекторов // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1966.— **2**, № 2.— С. 326—332.
7. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения.— М. : Гостехиздат, 1950.— 472 с.
8. *Лыкова О. Б., Бойчук А. А.* Метод малого параметра в задаче построения функций Ляпунова для систем линейных дифференциальных уравнений // Теория устойчивости и ее приложения.— Новосибирск : Наука, 1979.— С. 60—66.
9. *Каудерер Г.* Нелинейная механика.— М. : Изд-во иностр. лит., 1961.— 777 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 03.06.86