УДК 517.98

Ву Куок Фонг

Диссипативные почти периодические действия полугрупп

1. Настоящая статья посвящена обобщению теории почти периодических представлений полугрупп [1—3] на нелинейные действия. Она написана в развитие работы [4], где были рассмотрены асимптотические свойства дис-

сипативных действий абелевых полугрупп в метрических компактах и изучена их связь с почти периодическими представлениями.

Пусть X — полное метрическое (вообще говоря, не компактное) пространство с метрикой d, S — топологическая полугруппа с единицей e, a — действие полугруппы S в X, т. е. $(s, x) \to a(s)x$ есть раздельно непрерывное отображение $S \times X$ в X такое, что $a(e) = \mathrm{id}$, $a(st) = a(s)a(t)$. Назовем действие a *почти периодическим* (п. п.), если все орбиты $O(x) = \{a(s)x\}_{s \in S}$ предкомпактны. Действие a называется *диссипативным*, если все отображения $a(s)$ нерастягивающие.

Напомним [2], что в любой компактной топологической полугруппе S существует *ядро Сушкевича* (наименьший двусторонний идеал). Введем в множество X^X всех отображений X в себя топологию поточечной сходимости и рассмотрим замыкание образа $\mathrm{Im}\,a$ действия a. Следующая лемма является нелинейным вариантом леммы де Лю—Гликсберга [5] (см. также [2]) и доказывается аналогично.

Лемма 1. *Для того чтобы диссипативное действие a было п. п., необходимо и достаточно, чтобы множество $\overline{\mathrm{Im}\,a}$ было компактным.*

Множество $\beta_a = \overline{\mathrm{Im}\,a}$ называется *боровским компактом* для действия a.

Лемма 2 [2]. *Боровский компакт β_a диссипативного п. п. действия a является компактной полугруппой. Если при этом S — группа, то β_a — группа.*

Ядро Сушкевича k_a компактной полугруппы β_a называется *ядром Сушкевича действия a*. Назовем диссипативное п. п. действие a *элементарным*, если k_a является группой. Например, для любой абелевой полугруппы все диссипативные п. п. действия элементарны (см. п. 2).

Предположим, что a — элементарное диссипативное п. п. действие полугруппы S в X и p — единица группы k_a. Инвариантное множество $\mathrm{supp}(a) = \bigcap_{b \in \beta_a} b(X)$ назовем *носителем действия a*. Так как отображение p коммутирует со всеми $a(s)$, $s \in S$, и кроме того, $vp = pv = v$ $\forall v \in k_a$, то $\mathrm{supp}(a) = \mathrm{Im}\,p$, т. е. носитель действия совпадает с образом единицы ядра Сушкевича. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для действия a полугруппы S в метрическом пространстве X существует нерастягивающая ретракция p из X на* $\mathrm{supp}(a)$ *такая, что p коммутирует с каждым $a(s)$ $(s \in S)$.*

Следствие 1. *Носитель* $\mathrm{supp}(a)$ *замкнут.*

Следствие 2. *Если X связно, то* $\mathrm{supp}(a)$ *связно.*

Действие a называется *изометрическим*, если все отображения $a(s)$, $s \in S$, изометричны.

Теорема 2. *Сужение действия a на его носитель является изометрическим, причем* $\mathrm{supp}(a)$ *является наибольшим инвариантным множеством с этим свойством.*

Доказательство. Отображения $a(s) \mid \mathrm{supp}(a)$ обратимы в полугруппе сжатий, поэтому они являются изометриями. Пусть Y — инвариантное множество такое, что $a(s) \mid Y$ изометричны. Возьмем любой элемент $y \in Y$ и его орбиту $O(y)$. Тогда $py \in \overline{O(y)} \subset Y$, поэтому $d(py, y) = d(a(s)py, a(s)y)$, $s \in S$. Переходя к точке прикосновения p, получаем $d(py, y) = d(p^2y, py) = d(py, py) = 0$. Отсюда $py = y$, т. е. $y \in \mathrm{Im}\,p = \mathrm{supp}(a)$.

Следствие 3. *Если действие a изометрическое, то* $\mathrm{supp}(a) = X$.

Положим теперь $\mathrm{supp}(a, x) = \bigcap_{b \in \beta_a} b(\overline{O(x)})$ и назовем это компактное инвариантное множество *локальным носителем действия a в точке x*.

Теорема 3. *Бинарное отношение $y \in$* $\mathrm{supp}(a, x)$ *на носителе* $\mathrm{supp}(a)$ *является эквивалентностью.*

Доказательство. Достаточно заметить, что локальный носитель $\mathrm{supp}(a, x)$ в точке $x \in \mathrm{supp}(a)$ представляет собой орбиту действия ядра Сушкевича, т. е. $\mathrm{supp}(a, x) = \{vx\}_{v \in k_a}$. Последнее вытекает из того, что k_a одновременно является двусторонним идеалом и группой. Таким образом, носитель представляет собой объединение некоторых попарно непересекающихся компактных инвариантных множеств supp (a, x). Они называются *эргодическими классами действия a*.

Точка $x \in X$ называется *рекуррентной*, если $x \in$ supp (a, x). Из теоремы 3 вытекает следующий аналог теоремы Пуанкаре о возвращении.

Следствие 4. *Носитель действия состоит из рекуррентных точек. В частности, если действие a изометрично, то все точки $x \in X$ рекуррентны.*

Теорема 4. *Носитель* supp (a) *действия a на замкнутом выпуклом множестве X в строго нормированном банаховом пространстве E есть выпуклое множество и действие $a \mid$ supp (a) аффинно.*

Доказательство (ср. с. [4]). Пусть $x, y \in$ supp (a). Возьмем образ отрезка $[x, y]$ под действием $a(s)$. Он представляет собой некоторую спрямляемую линию в E с началом в $a(s)x$ и концом в $a(s)y$, причем ее длина меньше или равна $\| a(s)y - a(s)x \| = \| y - x \|$ в силу нерастягиваемости $a(s)$. Так как пространство E строго нормировано, то для любой точки $z_\lambda = \lambda x + (1-\lambda) y$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, имеем $a(s) z_\lambda \in [a(s)x, a(s)y]$, $\|a(s)z_\lambda - a(s)x\| = \|z_\lambda - x\|$. Следовательно, $a(s)z_\lambda = \lambda a(s)x + (1-\lambda)a(s)y$. Отсюда $pz_\lambda = \lambda px + (1-\lambda)py = z_\lambda$, т. е. $z_\lambda \in \operatorname{Im} p =$ supp (a).

Замечание 1. Как показывает следующий пример, принадлежащий Ю. И. Любичу, строгая нормированность пространства E существенна для выпуклости носителя. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^2$ с нормой $\|(\xi, \eta)\| = \max(|\xi|, |\eta|)$. Пусть $\eta = f(\xi)$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, — любая нелинейная функция, удовлетворяющая условию $|f(\xi_1) - f(\xi_2)| \leqslant |\xi_1 - \xi_2|$, $f(0) = 1$. Положим $P(\xi, \eta) = (\xi, f(\xi))$, $0 \leqslant \xi, \eta \leqslant 1$. Тогда $P^2 = P$, P — нерастягивающее отображение, множество неподвижных точек для P есть график функции f. Это множество есть носитель тривиального действия полугруппы $S = \{P\}$.

Замечание 2. Известно, что изометрии выпуклого компакта всегда аффинны [6].

Для любого действия a все неподвижные точки лежат в supp (a). Существование неподвижных точек в почти периодической ситуации можно установить путем усреднения орбит по мере Хаара на ядре Сушкевича [1, 2]. Этим способом в наших условиях получается некоторое обобщение теоремы Маркова—Какутани о неподвижной точке.

Теорема 5. *Пусть X — метризуемое замкнутое выпуклое подмножество в топологическом векторном пространстве E и действие a аффинно на носителе. Тогда существует общая неподвижная точка $h \in X$ для действия $a : a(s)h = h$, $s \in S$. Более того, для каждого $x \in X$ точка* $h_x = \int\limits_{k_a} vx\,dv$ *(dv — мера Хаара на k_a) неподвижна, а отображение $q : x \mapsto h_x$ является нерастягивающей ретракцией из X на множество $F(a)$ общих неподвижных точек.*

Аналогично теореме 4 можно доказать, что множество $F(a)$ общих неподвижных точек выпукло, если E — строго нормированное банахово пространство.

2. Случай абелевой полугруппы S заслуживает отдельного рассмотрения, поскольку, во-первых, в этом случае класс п. п. действий естественно расширяется до класса асимптотически почти периодических (а. п. п.) действий с сохранением предыдущих результатов; во-вторых, в абелевом случае можно ввести и изучить важное с точки зрения динамики понятие аттрактора [1—3].

Определение а. п. п. действия основано на квазиупорядочении полугруппы S ($s \leqslant t \Leftrightarrow \exists u : t = su$), при котором S превращается в направленное множество вследствие абелевости. Это позволяет рассматривать предельный переход по S и соответственно говорить о предельных точках орбит, сходимости и т. д. [7]. Действие a полугруппы S называется а. п. п., если направленность $\{a(s)\}$, $s \in S$, асимптотически предкомпактна в топологии поточечной сходимости, т. е. каждая ее поднаправленность содержит поточечно сходящуюся поднаправленность. Любое п. п. действие является а. п. п. Обратное неверно [3], но для таких полугрупп, как R_+ или

Z_+, а. п. п. совпадает с п. п. Аналогично [1] (см. также [3]) вводится множество β предельных точек направленности $\{a(s)\}$ и доказывается следующая лемма.

Лемма 3. *Множество β_a — полугруппа, имеющая ядро Сушкевича k_a, которое является компактной группой.*

Лемма 3 позволяет перенести результаты п. 1 на а. п. п. действия. В частности, если a — а. п. п. действие полугруппы S в X, $x \in X$ — произвольная точка, то сужение $a(s) \mid \overline{O(x)}$, где $O(x)$ — орбита x, является а. п. п. Его носитель определяется формулой

$$\operatorname{supp}(a, x) = \bigcap_s a(s)\,(\overline{O(x)} = \bigcap_{s \geqslant t} a(s)(\overline{O(x)}), \quad t \in S,$$

из которой легко видеть, что $\operatorname{supp}(a, x) = \Omega(x)$, где $\Omega(x)$ — множество ω-предельных точек орбиты. Множество $\Omega = \bigcup\limits_x \Omega(x) = \operatorname{supp}(a)$ является аттрактором в том смысле, что $\lim\limits_s d(a(s)x, \Omega) = 0$, $x \in X$. Важные примеры диссипативных систем с компактным аттрактором содержатся в работах [8, 9].

Теорема 6. *На каждом подмножестве $\Omega(x)$ существует бинарная операция, превращающая $\Omega(x)$ в компактную группу.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\pi: k_a \to \Omega(x)$, определяемое формулой $\pi(v) = vx$, $v \in k_a$. Определим групповую операцию в $\Omega(x)$, полагая $x_1x_2 \equiv (v_1v_2)\,x$, если $x_1 = v_1x$, $x_2 = v_2x$, $v_1, v_2 \in k_a$. Это определение корректно, так как если $x_1 = v_1'x$, $x_2 = v_2'x$, то $(v_1v_2)\,x = (v_1v_2')\,x = (v_2'v_1)\,x = (v_2'v_1')\,x = v_1'v_2'x$. Ясно, что $\Omega(x)$ является группой относительно этой операции (единицей служит точка x) и π — эпиморфизм. Это — топологическая группа благодаря тому, что семейство $\{v \mid \Omega(x)\}_{v \in k_a}$ равностепенно непрерывно. Так как π непрерывно и сюрьективно, то $\Omega(x)$ — компактная группа.

Следствие 5. *Аттрактор Ω представляет собой объединение попарно не пересекающихся компактных групп.*

Поскольку каждая связная и локально связная конечномерная компактная абелева группа является тором, то из следствий 2 и 5 вытекает такое следствие.

Следствие 6. *Пусть $\dim X < \infty$. Если замыкание каждой орбиты связно и локально связно, то аттрактор Ω представляет собой объединение неподвижных точек и попарно непересекающихся инвариантных торов.*

1. *Любич М. Ю., Любич Ю. И.* Спектральная теория почти периодических представлений полугрупп // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 5.— С. 632—636.
2. *Любич Ю. И.* Введение в теорию банаховых представлений групп.— Харьков : Вища шк., 1985.— 144 с.
3. *Любич М. Ю., Любич Ю. И.* Отщепление граничного спектра почти периодических операторов и представлений полугрупп // Теория функций, функц. анализ и их прил.— 1986. — Вып. 45.— С. 69—84.
4. *Любич Ю. И.* Диссипативные действия и почти периодические представления абелевых полугрупп // Укр. мат. журн.— 1988.— **40**, № 1.— С. 000—000.
5. *De Leeuw K., Glicksberg I.* Applications of almost periodic compactifications // Acta math. 1961.— **105**.— P. 63—97.
6. *Бродский М. С.* О специальных ε-сетях // Успехи мат. наук.— 1950.— **5**, № 2.— С. 191—196.
7. *Келли Д. Л.* Общая топология.— М. : Наука, 1981.— 431 с.
8. *Бабин А. В., Вишик М. С.* Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности // Успехи мат. наук.—1983.— **38**, № 4.— С. 133—187.
9. *Ладыженская О. А.* О конечномерности ограниченных инвариантных множеств для системы Навье — Стокса и других диссипативных систем // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та.— 1981.— 110.— С. 57—73.

Харьк. ун-т

Получено 22.07.86