УДК 517.43

**Л. А. Сахнович,** д-р физ.-мат. наук (Одес. электротехн. ин-т связи)

# ФАКТОРИЗАЦИЯ ОПЕРАТОРОВ, ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

A survey of the development of M. Krein's factorization method and its applications is given.

Наведено огляд розвитку методу факторизації М. Г. Крейна та його застосувань.

Метод обращения матрицы $A$, принадлежащий Гауссу, основан на представлении матрицы $A$ в виде произведения нижней и верхней треугольных матриц, т. е. на факторизации матриц. М. Г. Крейн [1, 2] перенес этот классический результат на интегральные операторы, а затем совместно с И.Ц. Гохбергом [3] на абстрактные операторы в гильбертовом пространстве. В работах М. Г. Крейна [1 – 3] и других математиков [4 – 14] метод факторизации нашел применение при решении целого ряда задач (обращение операторов, обратные задачи спектральной теории, мультипликативное разложение матриц-функций, интегрируемые методом обратной задачи нелинейные уравнения). Наряду с применением метода факторизации интенсивно обобщается и развивается сам метод [4 – 8]. Область применения метода факторизации существенно расширяется при отказе от специального вида факторизующих операторов. На этом пути получен ряд важных результатов. Данный обзор посвящен изложению и систематизации имеющихся в очерченном круге вопросов результатов.

**1. Специальная факторизация.** 1. Следуя М. Г. Крейну [1, 2], запишем интегральный оператор в виде

$$Af = f(t) - \int_a^b T(t, s) f(s)\, ds, \qquad a \le t, s \le b, \tag{1}$$

где ядро $T(t, s)$ непрерывно. Будем далее предполагать, что выполнено условие I: оператор

$$A_\xi f = f(t) - \int_a^\xi T(t, s) f(s)\, ds, \qquad a \le t, \quad s \le \xi,$$

при любом $\xi$, $a < \xi \le b$, обратим в $C(a, \xi)$.

Оператор $A_\xi^{-1}$ имеет вид

$$A_\xi^{-1}\varphi = \varphi(t) + \int_a^\xi \Gamma_\xi(t, s)\varphi(s)\, ds.$$

Для оператора $A^{-1}$ М.Г. Крейн получил следующий аналог матричной факторизации [1, 2]:

$$A^{-1} = (E + V_+)(E + V_-), \tag{2}$$

где

$$V_+ f = \int_t^b \Gamma_s(t, s) f(s)\, ds, \qquad V_- f = \int_a^t \Gamma_t(t, s) f(s)\, ds.$$

Здесь операторы $E + V_+$ и $E + V_-$ являются континуальными аналогами верхней и нижней треугольных матриц.

© Л. А. САХНОВИЧ, 1994

2. Пусть $H$ — бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн в работе [3] перешли к факторизации операторов $A$ в пространстве $H$. Для этого вводится упорядоченная естественным образом максимальная цепочка ортогональных проекторов $\mathcal{P} = \{P\}$. Множество ограниченных операторов $A$, удовлетворяющих условию

$$AP = PAP, \quad P \in \mathcal{P}, \tag{3}$$

обозначим через $(\operatorname{alg} \mathcal{P})$. Условие (3) означает, что подпространства $PH$ при любом $P \in \mathcal{P}$ инвариантны относительно оператора $A$. Пара проекторов $(P^-, P^+)$, $(P^- < P^+, P^{\pm} \in \mathcal{P})$ называется разрывом цепочки $\mathcal{P}$, если в $\mathcal{P}$ нет ни одного проектора, расположенного между $P^-$ и $P^+$. Цепочка, не имеющая разрывов, называется непрерывной. Будем говорить, что $A \in (\operatorname{alg} \mathcal{P})^*$, если $A^* \in \in (\operatorname{alg} \mathcal{P})$. Множество $\mathcal{D}(\mathcal{P})$ диагональных операторов относительно цепочки $\mathcal{P}$ определяется соотношением

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}) = (\operatorname{alg} \mathcal{P}) \bigcap (\operatorname{alg} \mathcal{P})^*.$$

Специальной факторизацией оператора $A$ относительно цепочки $\mathcal{P}$ называется [3] представление оператора $A$ в виде

$$A = A_- \mathcal{D} A_+, \tag{4}$$

где

$$A_+ \in (\operatorname{alg} \mathcal{P}), \quad A_- \in (\operatorname{alg} \mathcal{P})^*, \quad \mathcal{D} \in \mathcal{D}(\mathcal{P}),$$

операторы $A_+ - E$, $A_- - E$, $\mathcal{D} - E$ — вполне непрерывны и, кроме того, спектр операторов $A_+ - E$, $A_- - E$ состоит из точки $\lambda = 0$. В работе [3] найдены необходимые и достаточные условия, при которых оператор $A$ допускает специальную факторизацию. В этой же работе дана конструкция факторизующих операторов $A_+$ и $A_-$.

**Теорема 1** [3]. *Для того чтобы оператор $A = (E - T)^{-1}$ ($A$ — ограниченный оператор, $T$ — вполне непрерывный) допускал специальную факторизацию вдоль максимальной цепочки $\mathcal{P}$, необходимо и достаточно, чтобы*:

а) *все операторы $(E - PTP)$, $P \in \mathcal{P}$, были обратимы*;

б) *хотя бы один из интегралов*

$$X_+ = (m) \int_{\mathcal{P}} (E - PTP)^{-1} PT\,dP,$$

$$X_- = (m) \int_{\mathcal{P}} dP\,TP(E - PTP)^{-1}$$

*сходился по равномерной норме.*

*Тогда сходится и второй интеграл и имеет место специальная факторизация*

$$A = (E + X_+)\mathcal{D}(E + X_-),$$

*где*

$$\mathcal{D} = E + \sum_j \left(P_j^+ - P_j^-\right)\left[\left(E - P_j^+ T P_j^+\right)^{-1} - E\right]\left(P_j^+ - P_j^-\right),$$

а $(P_j^-, P_j^+)$ — *полный набор разрывов цепочки* $\mathcal{P}$.

Если цепочка $\mathcal{P}$ непрерывна, то $\mathcal{D} = E$. Частным случаем специальной факторизации является факторизация (2). В этом случае цепочка $\mathcal{P}$ составлена из проекторов

$$P_\xi f = \begin{cases} f(x), & a \le x \le \xi; \\ 0, & \xi < x \le b. \end{cases} \tag{5}$$

В работе [13] результаты [3] перенесены на случай банаховых пространств.

**2. Общие теоремы о факторизации.** 1. Интересные задачи возникают при отказе от специального вида факторизующих операторов в разложении (4).

Факторизацией ограниченного вместе с обратным оператора $A$ относительно максимальной цепочки $\mathcal{P}$ называется представление $A$ в виде

$$A = A_+ A_-, \tag{6}$$

где

$$A_+,\ A_+^{-1} \in (\operatorname{alg} \mathcal{P}); \quad A_-,\ A_-^{-1} \in (\operatorname{alg} \mathcal{P})^*. \tag{7}$$

В работе [4] найдены необходимые и достаточные условия факторизуемости оператора $A$, когда $H = L^2(a, b)$, а цепочка $\mathcal{P}$ составлена из проекторов (5). При этом процедура построения факторизующих операторов состоит в следующем. Пусть

$$A_\xi = P_\xi A P_\xi, \quad v(\xi, t) = A_\xi^{-1} P_\xi f_0, \quad u(\xi, t) = A_\xi^{*-1} P_\xi g_0,$$

где $f_0, g_0$ — пара функций из $L^2(a, b)$. Введем еще функцию

$$\mathcal{M}(\xi) = \int_a^\xi v(\xi, t)\, \overline{g_0(t)}\, dt \tag{8}$$

и операторы

$$Uf = \frac{1}{r(x)} \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, \overline{u(x, t)}\, dt, \tag{9}$$

$$Vf = \frac{1}{q(x)} \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, \overline{v(x, t)}\, dt, \tag{10}$$

причем $r(x)\overline{q(x)} = \mathcal{M}'(x)$. Здесь предполагается, что $\mathcal{M}(x)$ — абсолютно непрерывная функция и

$$\mathcal{M}'(x) \ne 0. \tag{11}$$

При некоторых дополнительных условиях доказывается равенство

$$A^{-1} = V^* U. \tag{12}$$

Отметим, что оператор

$$Af = f(x) + \frac{i\beta}{\pi} \int_0^{\omega}{}' \frac{f(t)}{x - t}\, dt, \quad -1 < \beta < 1,$$

факторизуем в смысле (6), (7), но не допускает специальной факторизации [3].

Необходимым для факторизуемости оператора $A$ по цепочке (5) является условие II: оператор $A_\xi = P_\xi A P_\xi$ обратим в $L^2(a, \xi)$ при любом $\xi$, $a < \xi \le b$.

Условие II совпадает с условием I в случае операторов (1). Однако в общем случае условие II уже не является достаточным для факторизуемости оператора $A$. В самом деле, оператор [4]

$$Af = f(x) + \frac{\operatorname{tg}\pi\beta}{\pi} \int_0^{\omega}{}' \frac{f(t)}{x-t}dt, \quad 0 < \beta < 1,$$

не допускает факторизации (6), (7), а условие II для него выполняется.

2. Пусть оператор $A$ является самосопряженным и при некоторых $0 < m < M$ выполняются неравенства

$$mE \le A \le ME. \tag{13}$$

Для операторов вида (13) условие II выполнено. Д. Р. Ларсон [5], используя результаты Н. Андерсена [6], доказал для операторов вида (13) следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Пусть $\mathcal{P}$ — максимальная цепочка в сепарабельном гильбертовом пространстве $H$. Для того чтобы любой оператор $A$ вида* (13), *действующий в $H$, был факторизуем, необходимо и достаточно, чтобы цепочка $\mathcal{P}$ была счетной.*

***Следствие.*** *Если максимальная цепочка $\mathcal{P}$ непрерывна, то существует оператор вида* (13), *который не допускает факторизации.*

***Замечание* 1.** Если условие (7) заменить условием

$$A_+ \in (\operatorname{alg}\mathcal{P}), \qquad A_- \in (\operatorname{alg}\mathcal{P})^*,$$

то любой оператор $A$ вида (13) допускает представление (6) (см. [5, 6]).

***Пример.*** Оператор Диксона [15 – 17]

$$A_\lambda f = f(x) - \lambda \int_0^1 \frac{f(y)}{x+y}dy, \qquad 0 \le x \le 1,$$

удовлетворяет условию (13), если

$$\lambda \in \left(-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right).$$

Оператор $A_\lambda$ не допускает специальной факторизации. М. Г. Крейн в статье [15] в качестве примера рассмотрел оператор $A_\lambda$ и нашел вид обратного оператора

$$A_\lambda^{-1} f = f(x) + \lambda \int_0^1 R(x, y, \lambda) f(y) dy, \tag{14}$$

$$\lambda R(x, y, \lambda) = \lambda R(y, x, \lambda) \doteq$$

$$= \frac{1}{x} T_\lambda\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{xy} \int_y^1 T_\lambda\left(\frac{x}{\xi}\right) T_\lambda\left(\frac{y}{\xi}\right) d\xi, \qquad 0 \le x \le y \le 1, \tag{15}$$

$$T_\lambda(x, \lambda) = \frac{1}{x} P'_{a-1/2}\left(\frac{1}{x}\right) + \left(a - \frac{1}{2}\right) P_{a-1/2}\left(\frac{1}{x}\right), \tag{16}$$

где $P_{a-1/2}(z)$ — функция Лежандра первого рода, а постоянная $a$ находится из соотношения

$$\cos \pi a = \lambda \pi, \qquad 0 < a < 1. \tag{17}$$

Этот результат М. Г. Крейна может быть интерпретирован в терминах факторизации.

В самом деле, обозначим через $S_\xi(x, \lambda)$ решение уравнения

$$S_\xi(x, \lambda) - \lambda \int_0^\xi \frac{S_\xi(y, \lambda)}{x + y} dy = 1.$$

Легко убедиться, что справедливо равенство

$$S_\xi(x, \lambda) = S\left(\frac{x}{\xi}, \lambda\right),$$

где $S(x, \lambda)$ — решение уравнения

$$S(x, \lambda) - \lambda \int_0^1 \frac{S(y, \lambda)}{x + y} dy = 1.$$

Пользуясь формулами (14) – (17), имеем

$$\mathcal{M}(\xi, \lambda) = \xi \int_0^1 S(y, \lambda) dy, \quad \mathcal{M}'(\xi, \lambda) = \alpha(\lambda) = \xi \int_0^1 S(y, \lambda) dy$$

$$A_\lambda^{-1} = V_\lambda^* V_\lambda,$$

где

$$V_\lambda f = \frac{1}{\sqrt{\alpha(\lambda)}} \frac{d}{dx} \int_0^x f(y) S\left(\frac{y}{x}, \lambda\right) dy.$$

Отметим, что из неравенства $A_\lambda^{-1} > 0$ следует неравенство

$$\alpha(\lambda) = \left(A_\lambda^{-1} 1, 1\right) > 0.$$

Функции $S(x, \lambda)$ и $\alpha(\lambda)$ могут быть записаны в явном виде

$$S(x, \lambda) = \sqrt{\alpha(\lambda)} \left[ \int_x^1 \left[T_\lambda(y)/y^2\right] dy + 1 \right],$$

$$\sqrt{\alpha(\lambda)} = \int_0^1 [T_\lambda(y)/y] dy.$$

**3. Нерешенные задачи.** 1. Сформулируем некоторые нерешенные задачи теории факторизации операторов.

*Задача* 1. Привести конкретные примеры операторов вида (13), не допускающих факторизации по заданной цепочке $\mathcal{P}$.

*Задача* 2. Выделить классы операторов вида (13), допускающих факторизацию по заданной цепочке $\mathcal{P}$.

В связи с задачей 2 вновь сошлемся на работу М. Г. Крейна и И. Ц. Гохберга [3], где найдены условия специальной факторизуемости. Укажем также работу [8], где доказана факторизуемость операторов с доминантной диагональю.

К задаче 2 примыкает также следующее утверждение.

**Утверждение 1** [5]. *Пусть $\mathcal{P}$ — макмальная непрерывная цепочка первой кратности. Для любого $\varepsilon > 0$ существует оператор $A$ вида* (13), *нефакторизуемый относительно цепочки $\mathcal{P}$, причем $A - E$ — вполне непрерывный* *оператор и* $\|A - E\| < \varepsilon$. (*Цепочка* $\mathcal{P}$ *имеет первую кратность, если* $\mathcal{D}(\mathcal{P}) = (\mathrm{alg}\,\mathcal{P}) \cap (\mathrm{alg}\,\mathcal{P})^*$ *является абелевой алгеброй.*)

2. В ряде задач существенную роль играют операторы с разностным ядром [14], т. е. операторы вида

$$Af = \frac{d}{dx}\int_0^\omega f(t)s(x-t)\,dt. \tag{18}$$

Следующая задача конкретизирует задачу 2.

*Задача* 3. Пусть оператор вида (13) принадлежит классу (18). Допускает ли оператор $A$ факторизацию относительно цепочки (5)?

Задача 3 сформулирована в статье [18], там же содержатся дополнительные к ней пояснения.

3. Рассмотрим сепарабельное гильбертово пространство $H$. Оператор $A$, действующий в $H$, называется гиперинтранзитивным, если его решетка инвариантных подпространств содержит максимальную цепочку первой кратности. Вопрос о существовании негиперинтранзитивного вполне непрерывного оператора содержится в книге И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [3], а также в статье Р. Кадисона и И. Зингера [19]. Д. Р. Ларсон [5] доказал, что существует вполне непрерывный негиперинтранзитивный оператор. В работе Д. Р. Ларсона [5] выявлена тесная связь проблемы факторизуемости оператора с проблемой гиперинтранзитивности.

*Задача* 4. Привести конкретные примеры негиперинтранзитивных вполне непрерывных операторов.

*Задача* 5. Найти достаточные условия гиперинтранзитивности.

В связи с задачей 5 приведем результат Г. Э. Кисилевского [20].

**Утверждение 2.** *Вольтерров оператор с ядерной мнимой компонентой гиперинтранзитивен.*

**4. Решение интегральных уравнений с разностным ядром методом факторизации.** Как и в матричном случае, метод факторизации оказался полезным в задачах обращения операторов. Действительно, формулы (8) – (10) и (12) позволяют, решив уравнения

$$A_\xi v = f_0, \quad A_\xi^* u = g_0, \quad a \le x \le \xi,$$

со специальными правыми частями $f_0$ и $g_0$, записать в явном виде решения уравнений

$$AF = f, \quad A^*G = g$$

с произвольными правыми частями $f$ и $g$. Отметим, что М. Г. Крейн [1, 3] рассматривал случай, когда $f_0 = g_0 = 1$. В этом случае условие (11) легко проверяется для уравнений с разностным ядром

$$Af = f(x) + \int_0^\omega \mathcal{H}(x-t)f(t)\,dt = \varphi(x), \tag{19}$$

где ядро $\mathcal{H}(x)$ непрерывно на отрезке $[-\omega, \omega]$. Чтобы этот факт пояснить, следуя М. Г. Крейну, запишем

$$\frac{d}{d\xi}g(\xi,\xi) = \Gamma_\xi(\xi,0)\,g^*(\xi,\xi), \tag{20}$$

$$\frac{d}{d\xi}g^*(\xi,\xi) = \Gamma_\xi(0,\xi)\,g(\xi,\xi), \tag{21}$$

где

$$g(x,\xi) = A_\xi^{-1}1, \quad g^*(x,\xi) = A_\xi^{*-1}1.$$

Из (20), (21) вытекает выполнение требования (11) в двух случаях [3]:

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(-t), \quad -\omega \le t \le \omega, \tag{22}$$

$$\mathcal{H}(t) = \overline{\mathcal{H}(-t)}, \quad -\omega \le t \le \omega. \tag{23}$$

2. Рассмотрим случай (23). В этом случае оператор $A$ является самосопряженным и верны соотношения [3]

$$g^*(\xi,\xi) = \overline{g(\xi,\xi)}, \quad \Gamma_\xi(\xi,0) = \overline{\Gamma_\xi(0,\xi)}, \tag{24}$$

$$\mathcal{M}'(\xi) = |g(\xi,\xi)|^2. \tag{25}$$

Введем далее функции

$$\Phi(x) = -\int_0^x \mathcal{H}(s)\,ds + \frac{1}{2}, \quad g_1(x,\xi) = A_\xi^{-1}\Phi,$$

$$\mathcal{N}(\xi) = \int_0^\xi g(t,\xi)\overline{\Phi(t)}\,dt, \quad R(\xi) = \int_0^\xi g_1(t,\xi)\overline{\Phi(t)}\,dt.$$

Известный результат М. Г. Крейна (25) может быть дополнен.

**Утверждение 3.** *Если верно* (23) *и операторы* $A_\xi$ *обратимы в* $L^2(0,\xi)$, *то справедливы равенства*

$$\frac{d}{d\xi}\mathcal{N}(\xi) = g(\xi,\xi)\,\overline{g_1(\xi,\xi)}, \quad \frac{d}{d\xi}R(\xi) = |g_1(\xi,\xi)|^2, \tag{26}$$

$$2\,\mathrm{Re}\left[g(\xi,\xi)\,\overline{g_1(\xi,\xi)}\right] = 1. \tag{27}$$

***Замечание* 2.** Из (27) следует $g_1(\xi,\xi) \ne 0$. Значит, $R'(\xi) \ne 0$. Тогда по решению $g_1(x,\xi)$ со специальной правой частью $f_0(x) = \Phi(x)$ можно записать решение уравнения (19) с произвольной частью $\varphi(x)$ [4].

3. Оператор

$$Af = \int_0^\omega \mathcal{H}(x-t)f(t)\,dt$$

необратим, и метод факторизации применим к нему лишь формально. Однако для ядер

$$\mathcal{H}_1(x-t) = |x-t|^{-h}, \quad 0<h<1, \quad \mathcal{H}_2(x-t) = -\ln|x-t|$$

и близких к ним М. Г. Крейну [3] удалось на эвристическом уровне получить явные формулы, а затем их обосновать. На этом пути были развиты и дополнены классические результаты Т. Карлемана [21]. Отметим еще работу А. Г. Буслаева [22], в которой методика статьи [4] переносится на необратимые операторы.

**5. Факторизация и обратные задачи.** 1. Объединив свои результаты по направляющим функционалам [23] с результатами по теории уравнений с разностным ядром (19), М. Г. Крейн решил прямую и обратную задачи для системы [24]

$$\frac{dP(r,\lambda)}{dr} = i\lambda P(r,\lambda) - \overline{A(r)}P(r,\lambda),$$
$$\frac{dP_*(r,\lambda)}{dr} = -A(r)P(r,\lambda), \quad 0 \le r < \infty. \tag{28}$$

Переход от ядра $\mathcal{H}(x)$ уравнения (19) к системе (28) задается формулой [21]

$$\mathcal{A}(r) = -\overline{\Gamma_r(r,0)}. \tag{29}$$

При этом предполагается, что выполнено условие (23), а оператор $A$ положителен. Тогда существует неубывающая функция $\sigma(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{1+\lambda^2} < \infty, \tag{30}$$

$$\int_0^t (t-s)\mathcal{H}(s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{i\lambda t}{1+\lambda^2} - e^{i\lambda t}\right)\frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^2} +$$
$$+ \left(i\gamma - \frac{1}{2}\operatorname{sign} t\right)t, \quad \gamma = \bar{\gamma}. \tag{31}$$

В статье [24] показано, что введенная функция $\sigma(\lambda)$ является спектральной для системы (28). Таким образом, процедура решения обратной задачи состоит в следующем [24]. По заданной спектральной функции $\sigma(\lambda)$ с помощью формулы (31) находим $\mathcal{H}(x)$. Затем по формуле (19) строим оператор $A$. Далее находим ядро $\Gamma_\xi(t,s)$ оператора $A_\xi^{-1}$. Теперь формула (29) позволяет найти $\mathcal{A}(r)$, т. е. восстановить систему (28).

2. Полагая

$$\Phi(r,\lambda) = \operatorname{Re}[e^{-i\lambda r}P(2r,\lambda)], \quad \Psi(r,\lambda) = \operatorname{Im}[e^{-i\lambda r}P(2r,\lambda)],$$

переходим от системы (28) к системе типа Дирака [24]

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\lambda\Psi - a(r)\Phi + b(r)\Psi,$$
$$\frac{d\Psi}{dr} = \lambda\Phi + b(r)\Phi + a(r)\Psi, \tag{32}$$

где

$$\Phi(0,\lambda) = 1, \quad \Psi(0,\lambda) = 0.$$

Спектральные функции систем (28) и (32) совпадают и

$$a(r) = 2\operatorname{Re}\Gamma_{2r}(0,2r), \quad b(r) = 2\operatorname{Im}\Gamma_{2r}(0,2r). \tag{33}$$

Таким образом, формулы (31), (33) дают решение обратной задачи для системы (32).

3. Отдельно рассмотрим случай, когда $\mathcal{H}(x)$ — вещественная функция, т. е.

$$\sigma(\lambda) = -\sigma(-\lambda), \; b(r) = 0. \tag{34}$$

В этом случае функции $\Phi(r,\lambda)$ и $\Psi(r,\lambda)$ удовлетворяют уравнениям второго порядка [24]

$$\Psi'' - [a^2(r) + a'(r)]\Psi + \lambda^2\Psi = 0, \quad \Psi(0,\lambda) = 0, \tag{35}$$

$$\Phi'' - [a^2(r) - a'(r)]\Phi + \lambda^2\Phi = 0, \quad \Phi'(0,\lambda) + a(0)\Phi(0,\lambda) = 0. \tag{36}$$

Нетрудно убедиться, что справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 4.** *Краевым задачам* (35) *и* (36) *соответствуют спектральные функции* $\sigma_1(\lambda)$ *и* $\sigma_2(\lambda)$, *которые определяются формулами*

$$d\sigma_1(\lambda) = 4\lambda d\sigma(\sqrt{\lambda}) \ \text{ при } \ \lambda > 0, \qquad d\sigma_1(\lambda) = 0 \ \text{ при } \ \lambda \le 0,$$

$$d\sigma_2(\lambda) = 4 d\sigma(\sqrt{\lambda}) \ \text{ при } \ \lambda > 0, \qquad d\sigma_2(\lambda) = 0 \ \text{ при } \ \lambda \le 0.$$

Таким образом, формулы (31), (33), (34) дают метод восстановления систем (35), (36) по соответствующим спектральным функциям.

4. Перепишем системы (35), (36) в виде

$$\Psi'' - V(r)\Psi + \lambda^2\Psi = 0, \quad \Psi(0,\lambda) = 0, \tag{37}$$

$$\Phi'' - V(r)\Phi + \lambda^2\Phi = 0, \quad \Phi'(0,\lambda) - h\Phi(0,\lambda) = 0. \tag{38}$$

М. Г. Крейн [25] указал простую процедуру восстановления дифференциальной системы (38) по спектральной функции вида

$$\sigma(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^\lambda R(\mu)\frac{d\mu}{\sqrt{\mu}}, \quad \lambda \ge 0; \quad \sigma(\lambda) = 0, \ \lambda \le 0,$$

где $R(\lambda)$ — рациональная функция, неотрицательная на положительной оси.

Пусть $R(\lambda) = P(\lambda)/Q(\lambda)$, где $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ — несократимые многочлены степени $n$ со старшими коэффициентами, равными 1. Запишем, следуя [25], разложение

$$Q(k^2) = Q_+(k)\overline{Q}_+(k), \quad \overline{Q}_+(k) = \overline{Q_+(\bar{k})},$$

где $Q_+(k)$ — многочлен степени $n$ со старшим коэффициентом, равным 1, корни которого расположены в полуплоскости $\operatorname{Im} k > 0$. Положим

$$C(r,k) = \frac{i^n}{2}[Q_+(k)e^{ikr} + Q_+(-k)e^{-ikr}],$$

$$S(r,k) = \frac{i^n}{2i}[Q_+(k)e^{ikr} - Q_+(-k)e^{-ikr}].$$

Далее предполагается, что $P(k^2) = (k^2 - k_1^2)\ldots(k^2 - k_n^2)$, где все $k_j^2$, $j = 1, 2, \ldots, n$, различны. Составив из функций $C(r,k_1), \ldots, C(r,k_n)$ определитель Вронского $W(C(r,k_1), \ldots, C(r,k_n))$, М. Г. Крейн получил формулу

$$V(r) = -2\frac{d^2}{dr^2}\ln W(C(r,k_1), \ldots, C(r,k_n)), \tag{39}$$

которая восстанавливает $V(r)$ системы (38) по заданной спектральной функции $\sigma(\lambda)$. Величина $h$ тоже восстанавливается и равна произведению $(-2i)$ на сумму вычетов полюсов функции $R(k^2) - 1$, лежащих внутри верхней полуплоскости.

Формулой

$$V(r) = -2\frac{d^2}{dr^2}\ln W(S(r,k_1), \ldots, S(r,k_n)) \tag{40}$$

восстанавливается система (37), спектральная функция которой имеет вид

$$\sigma(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^\lambda R(\mu)\sqrt{\mu}\,d\mu, \quad \lambda \geq 0; \qquad \sigma(\lambda) = 0, \quad \lambda \leq 0.$$

Интересно отметить, что при $k_i = -\bar{k}_i$, продолжая аналитически формулы (39), (40) на всю ось $-\infty < r < \infty$, получаем безотражательные потенциалы, соответствующие $n$-солитонным решениям уравнения Кортевега – де Фриза [26].

***Замечание* 3.** При исследовании нелинейного уравнения Шредингера

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{i}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2|u|^2 u\right), \quad -\infty < x < \infty, \; t \geq 0, \tag{41}$$

и ряда других нелинейных интегрируемых уравнений широко используется метод обратной задачи рассеяния [27, 28]. Если уравнения типа (41) рассматривать не на всей оси $-\infty < x < \infty$, а на полуоси $0 \leq x < \infty$, то существенную роль начинает играть обратная спектральная задача и ключевая формула (33) (см. [11, 12]).

***Замечание* 4.** Метод решения обратных задач (спектральной и рассеяния) по существу сводится к факторизации операторов. В работах [9, 10] метод факторизации, минуя обратные задачи, непосредственно применяется к исследованию нелинейных уравнений.

**5.** Пусть $J$ и $H(x)$ — матрицы порядка $N \times N$, причем $H(x) \geq 0$, $J = J^*$, $J^2 = E$. Существенным обобщением системы (28) является система

$$\frac{dw(x,z)}{dx} = izJH(x)w(x,z), \quad w(0,z) = E, \quad 0 \leq x \leq l \leq \infty. \tag{42}$$

Известна фундаментальная теорема В. П. Потапова [29], в которой сформулированы необходимые и достаточные условия ($J$-свойства) на $w(l, z)$, $l < \infty$, чтобы существовала соответствующая система (42). В работах [30 – 32] были получены теоремы единственности системы (42) при заданном $w(l, z)$. При этом налагались дополнительные ограничения либо на $w(l, z)$, либо на $H(x)$. Спектральная теория (прямая и обратная задачи) для систем вида (42) содержится в работах [11, 33].

**6. Приведение оператора к треугольному виду.** 1. Пусть задана максимальная цепочка $\mathcal{P}$. Говорят, что оператор $B$ приведен к треугольному виду, если выполняется соотношение

$$B = U^{-1}B_0 U, \tag{43}$$

где $U$ — унитарный оператор, $B_0 \in (\mathrm{alg}\,\mathcal{P})$. В работах М. С. Лившица [34] впервые была поставлена и для широкого класса операторов решена задача о приведении к треугольному виду. Эти результаты получили дальнейшее развитие в последующих работах (см. [35 – 38]).

2. Чтобы выяснить связь между задачами факторизации и задачами приведения к треугольному виду, рассмотрим операторы $K$ и $S$, действующие в гильбертовом пространстве $H$. Будем при этом предполагать, что оператор $S$ положителен и обратим, а $K \in (\mathrm{alg}\,\mathcal{P})$. Введем оператор

$$B = S^{1/2}KS^{-1/2}. \tag{44}$$

Если оператор $S$ допускает факторизацию относительно цепочки $\mathcal{P}$, то

$$S = S_-^* S_-, \quad S_- \in (\operatorname{alg} \mathcal{P}).$$

Операторы $B_0$ и $U$ определим равенствами

$$B_0 = S_- K S_-^{-1}, \quad U = S_- S^{-1/2}. \tag{45}$$

Легко видеть, что $B_0 \in (\operatorname{alg} \mathcal{P})$, а $U$ — унитарный оператор. Из (44) и (45) вытекает, что оператор $B$ приводится к треугольному виду, т. е. верно (43). В приведенном рассуждении видно, как переплетаются задачи линейной эквивалентности (формула (44)), задачи факторизации и задачи приведения к треугольному виду. Отметим, что метод операторных тождеств [11] позволяет для ряда важных классов решить задачу представления оператора $B$ в виде (44).

3. М. С. Лившиц [34] доказывал теоремы о приведении к треугольному виду, опираясь на теоремы о мультипликативном представлении характеристической матрицы-функции $w(z)$. Можно идти в обратном направлении. Привести оператор к треугольному виду, а затем получить мультипликативное представление. Этот план осуществлен в работе В. М. Бродского, И. Ц. Гохберга, М. Г. Крейна [38].


1. *Крейн М. Г.* Об интегральных уравнениях, порождающих дифференциальные уравнения второго порядка // Докл. АН СССР. – 1954. – **97**, № 1. – С. 21 – 24.
2. *Крейн М. Г.* Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода // Там же. – 1955. – **100**, № 3. – С. 413 – 416.
3. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов и ее приложения. – М.: Наука, 1967. – 508 с.
4. *Сахнович Л. А.* Факторизация операторов в $L^2(a, b)$ // Функцион. анализ и его прил. – 1979. – **13**, № 3. – С. 40 – 45.
5. *Larson D. R.* Nest algebras and similarity transformations // Ann. Math. – 1985. – **121**. – P. 409 – 427.
6. *Andersen N. T.* Compact perturbations of reflexive algebras // J. Funct. Anal. – 1980. – **38**. – P. 366 – 400.
7. *Davidson K. R.* Nest algebras. Longman Sci. and Techn. – Pitman Res. Notes Math. – 1988. – 411 p.
8. *Andrews K. T., Ward I. D.* Factorization of diagonally dominant operators on $L_1(0, 1, X)$ // Trans. Amer. Math. Soc. – 1985. – **291**, № 2. – P. 789 – 800.
9. *Захаров В. Е., Шабат А. Б.* Схема интегрирования нелинейных уравнений. I // Функцион. анализ и его прил. – 1974. – **8**, № 3. – С. 43 – 53.
10. *Нижник Л. П., Починайко М. Д.* Пространственно-двумерное нелинейное уравнение Шредингера как интегрируемая гамильтонова система // Успехи мат. наук. – 1982. – **37**, № 4. – С. 111 – 112.
11. *Сахнович Л. А.* Задачи факторизации и операторные тождества // Там же. – 1986. – **41**, № 1. – С. 3 – 55.
12. *Сахнович Л. А.* Нелинейные уравнения и обратные задачи на полуоси. – Киев, 1987. – 56 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 48-87).
13. *Баркарь М. А., Гохберг И. Ц.* О факторизации операторов в банаховом пространстве // Мат. исследования. – 1966. – **1**, № 2. – С. 90 – 123.
14. *Сахнович Л. А.* Уравнения с разностным ядром на конечном отрезке // Успехи мат. наук. – 1980. – **34**, № 4. – С. 69 – 129.
15. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой // Там же. – 1958. – **13**, № 5. – С. 3 – 120.
16. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интеграла Фурье. – Л.: Гостехиздат, 1948. – 479 с.
17. *Dixon A. C.* On the solving nuclei of certain integral equation // Proc. London Math. Soc. – 1926. – **27**. – P. 233 – 272.
18. *Linear* and complex analysis problem book / Ed. V. P. Khavin, S. V. Khrushchev, and N. K. Nikol'skii. – Berlin, 1984. – 719 p.
19. *Kadison R., Singer I.* Triangular operator algebras // Amer. J. Math. – 1960. – **82**. – P. 227 – 259.
20. *Кисилевский Г. Э.* Об обобщении жордановой теории для некоторого класса линейных операторов в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. – 1967. – **176**, № 4. – С. 768 – 770.
21. *Carleman T.* Über die Abelsche Integralgleichung mit Konstanten Integrationsgrenzen // Math. Z. – 1921. – **15**. – S. 111 – 120.

22. *Буслаев А. Г.* Факторизация специального интегрального оператора // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 6. – С. 780 – 784.
23. *Крейн М. Г.* О логарифме безгранично разложимой эрмитово-положительной функции // Докл. АН СССР. – 1944. – **45**. – С. 99 – 102.
24. *Крейн М. Г.* Континуальные аналоги предложений о многочленах, ортогональных на единичной окружности // Там же. – 1955. – **105**, № 4. – С. 637 – 640.
25. *Крейн М. Г.* О континуальном аналоге одной формулы Кристоффеля из теории ортогональных многочленов // Там же. – 1957. – **113**, № 5. – С. 970 – 973.
26. *Марченко В. А.* Нелинейные уравнения и операторные алгебры. – Киев: Наук. думка, 1986. – 152 с.
27. *Теория* солитонов, метод обратной задачи / Ред. С. П. Новиков. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
28. *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. – М.: Наука, 1986. – 527 с.
29. *Потапов В. П.* Мультипликативная структура $J$-нерастягивающих матриц-функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1955. – **4**. – С. 125 – 236.
30. *Лейбензон З. Л.* Связь между обратной задачей и полнотой собственных функций // Докл. АН СССР. – 1962. – **145**, № 3. – С. 519 – 522.
31. *Бродский М. С., Кисилевский Г. Э.* Критерий одноклеточности вольтерровых операторов с ядерными мнимыми компонентами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1966. – **30**, № 6. – С. 1213 – 1228.
32. *Сахнович Л. А.* О диссипативных вольтерровых операторах // Мат. сб. – 1968. – **76**, № 3. – С. 323 – 343.
33. *Сахнович Л. А.* Спектральные функции канонической системы $2n$-го порядка // Там же. – 1990. – **181**, № 11. – С. 1510 – 1524.
34. *Лившиц М. С.* Операторы, колебания, волны. Открытые системы. – М.: Наука, 1966. – 297 с.
35. *Бродский М. С.* Треугольные и жордановы представления линейных операторов. – М.: Наука, 1969. – 285 с.
36. *Сахнович Л. А.* О приведении несамосопряженных операторов к треугольному виду // Изв. вузов. Математика. – 1959. – № 1. – С. 180 – 186.
37. *Сахнович Л. А.* Исследование треугольной модели несамосопряженных операторов // Там же. – № 4. – С. 141 – 149.
38. *Бродский М. С., Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Общие теоремы о треугольных представлениях линейных операторов и мультипликативных представлениях их характеристических функций // Функцион. анализ и его прил. – 1969. – **3**, № 4. – С. 1 – 27.

Получено 17. 06. 93