УДК 517.63

Г. В. Радзиевский, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ И ПОЛУОСИ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ *

For the equation $L_0 x(t) + L_1 x'(t) + \ldots + L_n x^{(n)}(t) = 0$, where L_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, are operators acting in the Banach space, the crtiteria are established for an arbitrary solution $x(t)$ to be zero provided that the following conditions are satisfied: $x^{(l-1)}(a) = 0$, $l = 1, \ldots, p$; $x^{(l-1)}(b) = 0$, $l = 1, \ldots, q$, for $-\infty < a < b < \infty$ (the case of a segment) or $x^{(l-1)}(a) = 0$, $l = 1, \ldots, p$, and the solution is summable with its first n derivatives on the semiaxis $t \geq a$.

Для рівняння $L_0 x(t) + L_1 x'(t) + \ldots + L_n x^{(n)}(t) = 0$, де L_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, – оператори, що діють у банахових просторах, встановлені ознаки рівності нулю довільного розв'язку $x(t)$, який задовольняє умову $x^{(l-1)}(a) = 0$, $l = 1, \ldots, p$; $x^{(l-1)}(b) = 0$, $l = 1, \ldots, q$, при $-\infty < a < b < \infty$ (випадок скінченного відрізка) і умову $x^{(l-1)}(a) = 0$, $l = 1, \ldots, p$, у припущенні сумовності розв'язку $x(t)$ та перших його n похідних на півосі $t \geq a$.

1. Определение решения. Будем изучать уравнение

$$L(d/dt)x(t) \equiv L_0 x(t) + L_1 x'(t) + \ldots + L_n x^{(n)}(t) = 0, \tag{1}$$

где L_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, — ограниченные операторы, действующие из банахова пространства $\mathfrak{B}_k$ в банахово пространство $\mathfrak{B}$, причем предполагаем, что для банаховых пространств $\mathfrak{B}_k$ справедлива цепочка плотных вложений (см., например, [1, с. 9])

$$\mathfrak{B}_0 \to \mathfrak{B}_1 \to \ldots \to \mathfrak{B}_n, \tag{2}$$

а векторные пространства рассматриваются над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Под решением уравнения (1) на отрезке $[a, b]$, где $-\infty < a < b < \infty$, понимается вектор-функция $x(t)$, заданная почти всюду на отрезке $[a, b]$ и принимающая значения в $\mathfrak{B}_0$, которая интегрируема на $[a, b]$ в смысле Петтиса (см. [2, с. 91]), а для каждого $l = 1, \ldots, n$ вектор-функция $x^{(l-1)}(t)$, рассматриваемая как вектор-функция со значениями в $\mathfrak{B}_l$, слабо абсолютно непрерывна и имеет почти всюду на $[a, b]$ слабую производную $x^{(l)}(t)$. Тем самым, требования, наложенные на $x(t)$, определяют последовательно вектор-функции $x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)$, заданные почти всюду на отрезке $[a, b]$ и принимающие значения соответственно в пространствах $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$, и для них предполагается справедливым почти всюду на $[a, b]$ равенство (1). Перечисленные требования означают следующее: для каждого измеримого по Лебегу множества $A \in [a, b]$ существует такой элемент $x_A \in \mathfrak{B}_0$, что для любого функционала $f_0^* \in \mathfrak{B}_0^*$ выполнено равенство $f_0^*(x_A) = \int_A f_0^*[x(t)]\,dt$ и, кроме того, если уже задана вектор-функция $x^{(l-1)}(t)$, $l = 1, \ldots, n$, со значениями в $\mathfrak{B}_{l-1} \subseteq \mathfrak{B}_l$, то существует почти всюду на $[a, b]$ такая функция $x^{(l)}(t)$ со значениями в $\mathfrak{B}_l$, что для любого элемента $f_l^* \in B_l^*$ функция $f_l^*[x^{(l-1)}(t)]$ абсолютно непрерывна и

$$d f_l^*[x^{(l-1)}(t)]/dt = f_l^*[x^{(l)}(t)]$$

почти всюду.

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований при Государственном комитете Украины по вопросам науки и технологий.

В силу цепочки вложений (2) операторы L_k можно считать ограниченными, действующими из банахова пространства $\mathfrak{B}_0$ в банахово пространство $\mathfrak{B}$, поэтому корректно определен операторный полином

$$L(\lambda) = L_0 + \lambda L_1 + \ldots + \lambda^n L_n, \tag{3}$$

зависящий от параметра $\lambda \in \mathbb{C}$ и являющийся аналогом характеристического многочлена для уравнения (1), который называется символом операторно-дифференциального уравнения (1).

В сформулированных далее теоремах используется условие, что на банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ задано скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$, превращающее $\mathfrak{B}$ в предгильбертово пространство, т. е. предполагается выполненным такое теоретико-множественное включение $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, что пространство $\mathfrak{H}$ индуцирует на $\mathfrak{B}$ структуру векторного пространства, совпадающую со структурой векторного пространства $\mathfrak{B}$. Следовательно, при $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор (3) можно рассматривать как, вообще говоря, неограниченный оператор, действующий из банахова пространства $\mathfrak{B}_0$ в гильбертово пространство $\mathfrak{H}$.

Отметим, что требование $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$ и совпадение векторной структуры пространства $\mathfrak{B}$ с векторной структурой, которую пространство $\mathfrak{H}$ индуцирует на $\mathfrak{B}$, всегда выполняется. Действительно, пусть e_ν — некоторый фиксированный алгебраический базис (или, что то же самое, просто „базис" или „базис Гамеля") банахова пространства $\mathfrak{B}$, который всегда существует согласно теореме Тьюки – Тайхмюллера (см., например, [3, с. 16, 60]). Тогда любые два элемента x и y из $\mathfrak{B}$ однозначно представимы в виде $x = \sum \xi_\nu(x) e_\nu$ и $y = \sum \xi_\nu(y) e_\nu$, причем комплексные числа $\xi_\nu(x)$ и $\xi_\nu(y)$ равны нулю для всех, кроме конечного числа, индексов ν. Введем скалярное произведение $(x, y) = \sum \xi_\nu(x) \overline{\xi_\nu(y)}$, превращающее банахово пространство $\mathfrak{B}$ в предгильбертово пространство. Если же теперь пополнить $\mathfrak{B}$ по норме, связанной с этим скалярным произведением, то получим искомое гильбертово пространство $\mathfrak{H}$, для которого справедливо теоретико-множественное включение $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Однако при конкретной реализации приведенных далее теорем данная конструкция наделения банахова пространства $\mathfrak{B}$ предгильбертовой структурой в общем случае не применима и, как правило, следует считать, что $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$.

В такой постановке уравнение (1) и данное здесь определение его решения моделируют ряд задач для уравнений в частных производных (см., например, [4]), а фигурирующие в этом определении слабые производные ослабляют требование о существовании суммируемых по Бохнеру производных в смысле теории распределений [4, с. 19]. Само же требование о существовании слабых производных естественно влечет использование интеграла Петтиса, достаточным условием существования которого в случае рефлексивного банахового пространства $\mathfrak{B}_0$ является суммируемость на отрезке $[a; b]$ числовой функции $f_0^*[x(t)]$ для каждого функционала $f_0^* \in \mathfrak{B}_0^*$.

Далее через $\mathbb{R}$ обозначено множество вещественных чисел.

2. Краевая задача на конечном отрезке. Отметим, что из определения решения $x(t)$ уравнения (1) функции $x^{(l-1)}(t)$, $l = 1, \ldots, n$, со значениями в $\mathfrak{B}_{l-1}$ определены почти всюду на отрезке $[a, b]$, а со значениями в $\mathfrak{B}_l$ они определены уже всюду. Поэтому далее значения $x^{(l-1)}(t)$ в фиксированных точках, в частности, в точках a и b будем рассматривать как векторы из пространства $\mathfrak{B}_l$. Именно так понимается следующая краевая задача (задача Дирихле)

$$x^{(l-1)}(a) = 0, \ l = 1, \dots, p; \quad x^{(l-1)}(b) = 0, \ l = 1, \dots, q, \tag{4}$$

для уравнения (1). Исключение составляют лишь утверждения сформулированных далее теорем, так как если $x(t)$ — решение уравнения (1) на отрезке $[a, b]$ и $x(t) = 0$ почти всюду на $[a, b]$ как вектор-функция со значениями в $\mathfrak{B}_0$, то $x(t) = 0$ при всех $t \in [a, b]$. Действительно, по определению решения $x(t)$ уравнения (1) для любого функционала $f_1^* \in \mathfrak{B}_1^*$ функция $f_1^*[x(t)]$ непрерывна, а значит, равна нулю всюду на $[a, b]$. Но в силу требования плотности вложения $\mathfrak{B}_0$ в $\mathfrak{B}_1$ множество функционалов $f_1^* \in \mathfrak{B}_1^*$ является тотальным линейным многообразием в $\mathfrak{B}_0^*$ (см., например, [1, с. 18]), т. е. $x(t) = 0$ всюду на $[a, b]$. Это замечание используется как в формулировках приведенных далее теорем, так и на заключительных этапах их доказательств.

Теорема 1. *Пусть банахово пространство* $\mathfrak{B}_{[(n+1)/2]}$ *плотно вложено в гильбертово пространство* $\mathfrak{H}$ *и* $\operatorname{Re}(L(i\zeta)x, x) \geq 0$ *для всех* $\zeta \in \mathbb{R}$ *и* $x \in \mathfrak{B}_0$, *а для некоторого* $\zeta_0 \in \mathbb{R}$ *выражение* $\operatorname{Re}(L(i\zeta_0)x, x) > 0$, *когда* $x \neq 0$ *и* $x \in \mathfrak{B}_0$. *Тогда для любого конечного отрезка* $[a, b]$ *задача* (1), (4) *имеет лишь нулевое решение в следующих случаях:*

1) *если в условиях* (4) *число* $p = q = [(n+1)/2]$;

2) *если* n — *нечетное число, выражение* $(-1)^{[n/2]}(L_n x, x) \leq 0$, *когда* $x \in \mathfrak{B}_{[(n+1)/2]}$, *и в условиях* (4) *число* $p = [n/2]$, *а* $q = [(n+1)/2]$;

3) *если* n — *нечетное число, выражение* $(-1)^{[n/2]}(L_n x, x) \geq 0$, *когда* $x \in \mathfrak{B}_{[(n+1)/2]}$, *и в условиях* (4) *число* $p = [(n+1)/2]$, *а* $q = [n/2]$.

Отметим, что если $n = 1$, то условия (4) на $x(t)$ в точке a в случае 2 и в точке b в случае 3 не налагаются.

Доказательство достаточно провести в случаях 1 и 2 теоремы, так как случай 3 вытекает из случая 2, если заменить t на $-t$. Действительно, после такой замены уравнение (1) сведется к уравнению с символом $L(-\lambda)$ и для него также будут выполняться все условия теоремы, а требование $(-1)^{[n/2]}(L_n x, x) \geq 0$ из случая 3 в силу нечетности n сведется к требованию $(-1)^{[n/2]}(L_n x, x) \leq 0$ из случая 2. Кроме того, после замены t на $-t$ краевые условия (4) примут вид

$$x^{(l-1)}(-b) = 0, \quad l = 1, \dots, q, \quad \text{и} \quad x^{(l-1)}(-a) = 0, \quad l = 1, \dots, p,$$

а значит, с учетом количества нулевых краевых условий на левом и правом концах отрезка из случаев 2 и 3 эта замена сводит случай 3 к случаю 2. Аналогично показывается, что теорему достаточно установить, полагая $a = 0$ и $b = 1$, так как рассмотрение произвольного отрезка $[a, b]$ сводится к рассмотрению фиксированного отрезка $[0, 1]$ заменой аргумента t на $(b-a)t + a$.

Тем самым далее, не уменьшая общности, рассматриваем случаи 1 и 2 и полагаем $a = 0$, $b = 1$.

Пусть $x(t)$ — некоторое решение уравнения (1) на отрезке $[0, 1]$. Из требования о существовании интеграла в смысле Петтиса от функции $x(t)$ вытекает существование при каждом комплексном λ такого элемента $\hat{x}(\lambda) \in \mathfrak{B}_0$, для которого справедливо равенство

$$f_0^*[\hat{x}(\lambda)] = \int_0^1 e^{-\lambda t} f_0^*[x(t)]\,dt \tag{5}$$

при произвольном функционале $f_0^* \in \mathfrak{B}_0^*$. Отметим, что правая часть равенства (5) является целой по λ функцией, поэтому согласно теореме 3.10.1 из [2, с. 107] $\hat{x}(\lambda)$ — целая вектор-функция со значениями в банаховом пространстве $\mathfrak{B}_0$.

Учитывая цепочку вложений банаховых пространств (2) и то, что эти вложения плотные, получаем (см., например, [1, с. 16]) следующую цепочку вложений для сопряженных пространств: $\mathfrak{B}_n^* \to \mathfrak{B}_{n-1}^* \to \ldots \to \mathfrak{B}_0^*$. Тем самым любой элемент $f_k^* \in \mathfrak{B}_k^*$ можно рассматривать как элемент каждого из пространств $\mathfrak{B}_0^*, \ldots, \mathfrak{B}_k^*$. Отсюда и из свойств решения $x(t)$ уравнения (1), интегрируя по частям выражения $e^{-\lambda t} f_k^*[x^{(k)}(t)]$, получаем равенства

$$\int_0^1 e^{-\lambda t} f_k^*\left[x^{(k)}(t)\right]dt = \lambda^k f_k^*[\hat{x}(\lambda)] +$$

$$+ \sum_{s=1}^{k} \lambda^{k-s}\left\{e^{-\lambda} f_k^*[x^{(s-1)}(1)] - f_k^*[x^{(s-1)}(0)]\right\}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

для произвольного элемента $f_k^* \in \mathfrak{B}_k^*$. Заметим, что здесь не утверждается существование интегралов в смысле Петтиса от вектор-функции $e^{-\lambda t} x^{(k)}(t)$, принимающей почти всюду свои значения в $\mathfrak{B}_k$, а лишь утверждается справедливость равенств (6), левые и правые части которых в силу определения решения и цепочки плотных вложений (2) корректно определены.

Оператор L_k является ограниченным оператором, действующим из банахова пространства $\mathfrak{B}_k$ в банахово пространство $\mathfrak{B}$, поэтому для любого функционала f^*, принадлежащего $\mathfrak{B}^*$, элемент $L_k^* f^*$ принадлежит $\mathfrak{B}_k^*$. Отсюда согласно равенствам (5) и (6) выводим

$$0 = \int_0^1 e^{-\lambda t} f^*[L(d/dt)x(t)]dt = \int_0^1 e^{-\lambda t}\left\{\sum_{k=0}^{n} f^*\left[L_k x^{(k)}(t)\right]\right\}dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 e^{-\lambda t}\left(L_k^* f^*\right)\left[x^{(k)}(t)\right]dt = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k \left(L_k^* f^*\right)[\hat{x}(\lambda)] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{k} \lambda^{k-s}\left\{e^{-\lambda}\left(L_k^* f^*\right)\left[x^{(s-1)}(1)\right] - \left(L_k^* f^*\right)\left[x^{(s-1)}(0)\right]\right\}.$$

Из этих тождеств, справедливых для произвольного функционала $f^* \in \mathfrak{B}^*$, учитывая краевые условия $x^{(s-1)}(0) = 0$, $s = 1, \ldots, p$, и $x^{(s-1)}(1) = 0$, $s = 1, \ldots, q$, включения $\hat{x}(\lambda) \in \mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{B}_k$, $\lambda \in \mathbb{C}$, и принадлежность $x^{(s-1)}(0)$, $x^{(s-1)}(1) \in \mathfrak{B}_s$, $s = 1, \ldots, k$, получаем равенство

$$L(\lambda)\hat{x}(\lambda) = \sum_{k=p+1}^{n} \sum_{s=p+1}^{k} \lambda^{k-s} L_k x^{(s-1)}(0) - e^{-\lambda} \sum_{k=q+1}^{n} \sum_{s=q+1}^{k} \lambda^{k-s} L_k x^{(s-1)}(1). \tag{7}$$

Заметим, что если $n = 1$, то в случае 1 теоремы считаем равной нулю правую часть этого равенства, а в случае 2 — первую двойную сумму в нем. Рассмотрение этих случаев при $n = 1$ проще ситуации $n \geq 2$ (так как, если $n = 1$, то введенные далее функции $\alpha_1(\lambda) = \alpha_2(\lambda) \equiv 0$, когда справедлив случай 1, и $\alpha_1(\lambda) \equiv 0$, когда справедлив случай 2), поэтому далее предполагаем $n \geq 2$. Равенство векторов, находящихся в левой и правой частях тождества (7) установлено как равенство векторов, принадлежащих банахову пространству $\mathfrak{B}$, а по условию справедливо теоретико-множественное включение пространства $\mathfrak{B}$ в гильбертово пространство $\mathfrak{H}$, причем пространство $\mathfrak{H}$ индуцирует на $\mathfrak{B}$ структуру векторного пространства, совпадающую со структурой векторного пространства $\mathfrak{B}$. Поэтому тождество (7) можно трактовать как равенство векторов, принадлежащих пространству $\mathfrak{H}$. Кроме того, как было показано, $\hat{x}(\lambda)$ является целой вектор-функцией со значениями в банаховом пространстве $\mathfrak{B}_0$, которое в силу цепочки вложений $\mathfrak{B}_0 \to \mathfrak{B}_{[(n+1)/2]} \to \mathfrak{H}$ вложено в гильбертово пространство $\mathfrak{H}$. Поэтому $\hat{x}(\lambda)$ можно рассматривать как целую вектор-функцию со значениями в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, а значит, корректно определены следующие числовые функции:

$$\alpha(\lambda) = (L(\lambda)\hat{x}(\lambda), \hat{x}(-\overline{\lambda})), \tag{8}$$

$$\alpha_1(\lambda) = \sum_{k=p+1}^{n} \sum_{s=p+1}^{k} \lambda^{k-s}\left(L_k x^{(s-1)}(0), \hat{x}(-\overline{\lambda})\right), \tag{9}$$

$$\alpha_2(\lambda) = -e^{-\lambda} \sum_{k=q+1}^{n} \sum_{s=q+1}^{k} \lambda^{k-s}\left(L_k x^{(s-1)}(1), \hat{x}(-\overline{\lambda})\right) \tag{10}$$

и для них согласно тождеству (7) справедливо представление

$$\alpha(\lambda) = \alpha_1(\lambda) + \alpha_2(\lambda). \tag{11}$$

Так как $\hat{x}(\lambda)$ — целая вектор-функция со значениями в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, то $(L_k x^{(s-1)}(0), \hat{x}(-\overline{\lambda}))$ и $(L_k x^{(s-1)}(1), \hat{x}(-\overline{\lambda}))$ — целые числовые функции, следовательно, функции $\alpha(\lambda)$, $\alpha_1(\lambda)$ и $\alpha_2(\lambda)$ — целые. Покажем, что для них верны соотношения

$$\lim_{\lambda\to\infty,\ \mathrm{Re}\,\lambda\leq 0} \lambda\alpha_1(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{в случае 1;} \\ (-1)^{p+1}\left(L_n x^{(p)}(0), x^{(p)}(0)\right) & \text{в случае 2,} \end{cases} \tag{12}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty,\ \mathrm{Re}\,\lambda\geq 0} \lambda\alpha_2(\lambda) = 0 \quad \text{в случаях 1 и 2.} \tag{13}$$

По условию банахово пространство $\mathfrak{B}_{[(n+1)/2]}$ плотно вложено в гильбертово пространство $\mathfrak{H}$; значит, $\mathfrak{H}$ вложено в $\mathfrak{B}^*_{[(n+1)/2]}$, а это означает, что для любого вектора $f \in \mathfrak{H}$ функционал $f^*(x) = (x, f)$ непрерывен на пространстве $\mathfrak{B}_{[(n+1)/2]}$. Записывая для такого функционала формулу (6) при $k = [(n+1)/2]$ с учетом краевых условий (4), выполненных при $a = 0$ и $b = 1$, и принимая во внимание значения чисел p и q, входящих в условия теоремы, имеем

$$\int_0^1 e^{-\lambda t}\left(x^{([(n+1)/2])}(t), f\right)dt = \lambda^{[(n+1)/2]}(\hat{x}(\lambda), f) \quad \text{в случае 1,} \tag{14}$$

$$\int_0^1 e^{-\lambda t}\left(x^{([(n+1)/2])}(t), f\right)dt = \lambda^{[(n+1)/2]}(\hat{x}(\lambda), f) - \left(x^{([n/2])}(0), f\right) \quad \text{в случае 2.} \tag{15}$$

Согласно требованиям, наложенным на решение $x(t)$ уравнения (1), и из непрерывности функционала $f^*(x) = (x, f)$ при $f \in \mathfrak{H}$ на пространстве $\mathfrak{B}_{[(n+1)/2]}$ функция $(x^{([n+1)/2])}(t), f)$ суммируема, поэтому воспользовавшись теоремами Лебега и Линделефа (см., например, [5, с. 345]), заключаем, что

$$\lim_{\lambda\to\infty,\ \mathrm{Re}\lambda\ge 0} \int_0^1 e^{-\lambda t}\left(x^{([(n+1)/2])}(t), f\right)dt = 0.$$

Но в случае 1 число $p = [(n+1)/2]$, а в случае 2 число n — нечетное, $p = [n/2]$, поэтому $p+1 = [(n+1)/2]$. Следовательно, для произвольного вектора f, принадлежащего гильбертовому пространству $\mathfrak{H}$, справедливы соотношения

$$\lim_{\lambda\to\infty,\ \mathrm{Re}\lambda\le 0} \lambda^p\left(f, \hat{x}(-\overline{\lambda})\right) = 0 \quad \text{в случае 1,} \tag{16}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty,\ \mathrm{Re}\lambda\le 0} \lambda^{p+1}\left(f, \hat{x}(-\overline{\lambda})\right) = (-1)^{p+1}\left(f, x^{(p)}(0)\right) \quad \text{в случае 2.} \tag{17}$$

Аналогично из формул (14) и (15) выводятся соотношения

$$\lim_{\lambda\to\infty,\ \mathrm{Re}\lambda\ge 0} \lambda^q e^{-\lambda}\left(f, \hat{x}(-\overline{\lambda})\right) = 0 \quad \text{в случае 1,} \tag{18}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty,\ \mathrm{Re}\lambda\ge 0} \lambda^{q-1} e^{-\lambda}\left(f, \hat{x}(-\overline{\lambda})\right) = 0 \quad \text{в случае 2.} \tag{19}$$

В правой части выражения (9) максимальная степень λ равна $n-p-1$, а в случае 1 теоремы $n - p \le p$, откуда и из соотношения (16) вытекает равенство (12) в случае 1. В случае 2 $n - p = p + 1$, а при λ^{n-p-1} находится выражение $(L_n x^{(p)}(0),\ \hat{x}(-\overline{\lambda}))$, поэтому из соотношения (17) вытекает равенство (12) в случае 2. Аналогично из вида (10) функции $\alpha_2(\lambda)$ и из соотношений (18) и (19) выводится равенство (13).

Ввиду аналитичности функций $\alpha_1(\lambda)$ и $\alpha_2(\lambda)$ соответственно в левой и в правой полуплоскостях из равенств (12) и (13) следует

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \alpha_1(i\zeta)d\zeta = \begin{cases} 0 & \text{в случае 1;} \\ \pi(-1)^p\left(L_n x^{(p)}(0),\ x^{(p)}(0)\right) & \text{в случае 2,} \end{cases}$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \alpha_2(i\zeta)d\zeta = 0 \quad \text{в случаях 1 и 2,}$$

откуда и из тождеств (8) и (11) с учетом в случае 2 теоремы условия $(-1)^p(L_n x^{(p)}(0),\ x^{(p)}(0)) \le 0$ имеем

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} (L(i\zeta)\hat{x}(i\zeta),\ \hat{x}(i\zeta))d\zeta \le 0.$$

Но подынтегральная функция в этом неравенстве непрерывна (по доказанному она даже аналитична), а по условию $\mathrm{Re}\,(L(i\zeta)\hat{x}(i\zeta),\ \hat{x}(i\zeta)) \ge 0$ для всех $\zeta \in \mathbb{R}$, поэтому

$$\mathrm{Re}\,(L(i\zeta)\hat{x}(i\zeta),\ \hat{x}(i\zeta)) \equiv 0, \qquad \zeta \in \mathbb{R}. \tag{20}$$

Покажем теперь, что целая вектор-функция $\hat{x}(\lambda) \equiv 0$, для чего достаточно установить равенство нулю всех векторов $\hat{x}(i\zeta_0)$, $\hat{x}'(i\zeta_0), \ldots$ из $\mathfrak{B}_0$, где число ζ_0 взято из условия теоремы. Предположим, что $\hat{x}^{(r)}(i\zeta_0)$ — первый отличный от нуля элемент в цепочке векторов $\hat{x}(i\zeta_0)$, $\hat{x}'(i\zeta_0), \ldots$. Тогда вектор-функция $\hat{x}(\lambda)$ представима в виде $\hat{x}(\lambda) = (\lambda - i\zeta_0)^r y(\lambda)$ с целой вектор-функцией $y(\lambda)$ со значениями в пространстве $\mathfrak{B}_0$, для которой вектор $y(i\zeta_0) \neq 0$. Подставляя это представление $\hat{x}(\lambda)$ в выражение (20), заключаем, что $\mathrm{Re}\,(L(i\zeta)y(i\zeta), y(i\zeta)) = 0$ при всех $\zeta \in \mathbb{R}$ и $\zeta \neq \zeta_0$. Но функция $(L(i\zeta)y(i\zeta), y(i\zeta))$ непрерывна по ζ, следовательно, $\mathrm{Re}\,(L(i\zeta_0)y(i\zeta_0), y(i\zeta_0)) = 0$, откуда и из условия теоремы выводится равенство нулю вектора $y(i\zeta_0)$. Полученное противоречие показывает тождественное равенство нулю вектор-функции $\hat{x}(\lambda)$, а согласно ее представлению (5) и непрерывности числовой функции $f_0^*[x(t)]$ при каждом функционале $f_0^* \in \mathfrak{B}_1^*$ имеем $x(t) = 0$ при всех $t \in \in [0, 1]$, что и доказывает теорему.

***Пример* 1.** Покажем, что в условиях теоремы 1 требование существования вещественного числа ζ_0, для которого $\mathrm{Re}\,(L(i\zeta_0)x, x) > 0$, $x \neq 0$, вообще говоря, нельзя опустить.

В ортонормированном базисе двухмерного гильбертового пространства $\mathfrak{H}$ зададим операторы

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0 & i + 2\pi \\ i - 2\pi & 0 \end{pmatrix}, \quad L_1 = 2i\begin{pmatrix} 0 & 1 - i\pi \\ -1 - i\pi & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

и рассмотрим с этими операторами при $n = 2$ уравнение (1), которое имеет ненулевое решение

$$x(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - e^{(1+i2\pi)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{-(1-i2\pi)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

удовлетворяющее условию $x(0) = x(1) = 0$, т. е. условию (4) при $p = q = [(n + + 1)/2] = 1$ и с числами $a = 0$, $b = 1$. Символом рассмотренного уравнения является оператор-функция

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & i(1 + \lambda)(1 - i2\pi + \lambda) \\ i(1 - \lambda)(1 + i2\pi - \lambda) & 0 \end{pmatrix}$$

и для нее $\mathrm{Re}\, L(i\zeta) = 0$ при всех $\zeta \in \mathbb{R}$. Тем самым задача (1), (4) имеет ненулевое решение, хотя все условия теоремы 1 выполнены за исключением требования о существовании такого числа $\zeta_0 \in \mathbb{R}$, что $\mathrm{Re}\,(L(i\zeta_0)x, x) > 0$ при ненулевых векторах x.

***Пример* 2.** Проиллюстрируем применение теоремы 1 на следующей задаче, заимствованной из [6]. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^s$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, функции $c_1(\xi)$, $c_2(\xi)$, $c_3(\xi)$ измеримы и существенно ограничены, а $\mathrm{Re}\, c_2(\xi) > 0$, $\mathrm{Im}\, c_3(\xi) = 0$ почти всюду при $\xi \in \Omega$, $A(\xi, D)$ — заданный в Ω эллиптический дифференциальный оператор порядка $2m$, а $B_j(\xi, D)$, $j = 1, \ldots, m$, — граничные дифференциальные операторы. Предположим, что задача

$$A(\xi, D)\,x(\xi) = f(\xi), \quad \xi \in \Omega,$$

$$B_j(\xi, D)\,x(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial\Omega, \quad j = 1, \ldots, m,$$

является регулярной эллиптической задачей [4, с. 138] и

$$\mathrm{Re} \int_\Omega (A(\xi, D)x(\xi))\overline{x(\xi)}\,d\xi \geq \left(\sup_{\xi\in\Omega} \frac{\{\mathrm{Im}\, c_1(\xi)\}^2}{4\,\mathrm{Re}\, c_2(\xi)} \right) \int_\Omega |x(\xi)|^2 d\xi \tag{21}$$

при всех $x(\xi) \in H^{2m}(\Omega)$ (определение $H^{2m}(\Omega)$ см. в [4, с.15]), для которых $B_j(\xi, D)x(\xi) = 0$, $\xi \in \partial\Omega$, $j = 1, \ldots, m$. В этих обозначениях и предположениях рассмотрим смешанную задачу

$$c_3(\xi)\frac{\partial^3 x(\xi, t)}{\partial t^3} + c_2(\xi)\frac{\partial^2 x(\xi, t)}{\partial t^2} + c_1(\xi)\frac{\partial x(\xi, t)}{\partial t} + A(\xi, D_\xi)x(\xi, t) = 0, \quad (22)$$

$$B_j(\xi, D_\xi)x(\xi, t) = 0, \quad \xi \in \partial\Omega, \quad j = 1, \ldots, m, \quad (23)$$

$$\left.\frac{\partial^{l-1} x(\xi, t)}{\partial t^{l-1}}\right|_{t=a} = 0, \quad l = 1, \ldots, p\,(\le 2);$$
$$\left.\frac{\partial^{l-1} x(\xi, t)}{\partial t^{l-1}}\right|_{t=b} = 0, \quad l = 1, \ldots, q\,(\le 2). \quad (24)$$

Здесь D_ξ означает производные по переменной ξ. Под решением задачи (22) – (24) понимается функция $x(\xi, t)$, производные которой $D_\xi^k x(\xi, t)$, $|k| \le 2m$, и $\frac{\partial^{l-1} x(\xi, t)}{\partial t^{l-1}}$, $l = 1, 2, 3, 4$, в смысле теории распределений принадлежат пространству $L_2(\Omega) \otimes L_1(a, b)$, т. е. пространству измеримых функций $x(\xi, t)$, $\xi \in \Omega$, $t \in [a, b]$, с нормой

$$\int_a^b \left(\int_\Omega |x(\xi, t)|^2 d\xi\right)^{1/2} dt < \infty. \quad (25)$$

Отметим, что условие (21) означает выполнение неравенства

$$\operatorname{Re} \int_\Omega \left(\left\{(i\zeta)^3 c_3(\xi) + (i\zeta)^2 c_2(\xi) + i\zeta c_1(\xi) + A(\xi, D)\right\} x(\xi)\right) \overline{x(\xi)}\, d\xi \ge 0 \quad (26)$$

при всех числах $\zeta \in \mathbb{R}$ и функциях $x(\xi) \in H^{2m}(\Omega)$, удовлетворяющих условиям $B_j(\xi, D)x(\xi) = 0$, $\xi \in \partial\Omega$, $j = 1, \ldots, m$. Отсюда несложно сделать вывод о существовании такого числа $\zeta_0 \in \mathbb{R}$, что из равенства нулю левой части в (26) следует равенство нулю функции $x(\xi)$. Тогда согласно теореме 1 задача (22) – (24) имеет лишь нулевое решение в следующих случаях:

1) если в условиях (24) число $p = q = 2$;

2) если $\operatorname{Re} c_3(\xi) \ge 0$ почти всюду при $\xi \in \Omega$ и в условиях (24) число $p = 1$, а $q = 2$;

3) если $\operatorname{Re} c_3(\xi) \le 0$ почти всюду при $\xi \in \Omega$ и в условиях (24) число $p = 2$, а $q = 1$.

***Замечание* 1.** Пусть банахово пространство $\mathfrak{B}_{[(n+1)/2]}$ плотно вложено в гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ и при фиксированном $\tau \in \mathbb{R}$ справедливы соотношения

$$\operatorname{Re}(L(i\zeta + \tau)x, x) > 0, \quad \zeta \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathfrak{B}_0,$$

а для некоторого $\zeta_0 \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{Re}(L(i\zeta_0 + \tau)x, x) > 0, \quad x \ne 0, \ x \in \mathfrak{B}_0.$$

Тогда справедливы утверждения теоремы 1. Действительно, этот случай сводится к случаю $\tau = 0$ из теоремы 1, если вместо решения $x(t)$ уравнения 1 рассмотреть решение $e^{\tau t}x(t)$.

3. Краевая задача на полуоси. В этом пункте под решением уравнения (1) на полуоси $[a, \infty)$, где $-\infty < a < \infty$, понимается вектор-функция $x(t)$, являющаяся решением (в смысле п. 1) этого уравнения на любом конечном отрезке $[a, b]$, т. е. $a < b < \infty$, и для которой числовые функции

$$f_l^*[x^{(l)}(t)], \quad l = 0, \ldots, n,$$

суммируемы на полуоси $t \geq a$ для любого функционала $f_l^* \in \mathfrak{B}_l^*$. Если пространство $\mathfrak{B}_0$ не рефлексивно, то дополнительно потребуем существования интеграла в смысле Петтиса от функции $x(t)$ со значениями в $\mathfrak{B}_0$ на полуоси $t \geq a$. Далее будем предполагать, что решение $x(t)$ уравнения (1) на полуоси $t \geq a$ подчинено в точке a требованиям

$$x^{(l-1)}(a), \quad l = 1, \ldots, p, \tag{27}$$

где $x^{(l-1)}(a)$ понимаются как векторы пространства $\mathfrak{B}_l$ (задача Дирихле на полуоси).

Во всех четырех утверждениях данного пункта используется следующее условие на символ $L(\lambda)$ уравнения (1), аналогичное условию $\operatorname{Re}(L(i\zeta_0)x, x) > 0$, $x \neq 0$, $x \in \mathfrak{B}_0$, из теоремы 1 и позволяющее сделать заключение о равенстве нулю решения $x(t)$.

Условие A. Для некоторого $\zeta_0 \in \mathbb{R}$ оператор $L(i\zeta_0)$ является ограниченно обратимым оператором, действующим из пространства $\mathfrak{B}_0$ в пространство $\mathfrak{B}$, и $(L(i\zeta_0)x, x) \neq 0$, если $x \neq 0$ и $x \in \mathfrak{B}_0$.

Теорема 2. *Пусть банахово пространство* $\mathfrak{B}_{[(n+1)/2]}$ *плотно вложено в гильбертово пространство* $\mathfrak{H}$, *выполнено условие* A *и* $\operatorname{Re}(L(i\zeta)x, x) \geq 0$ *для всех* $\zeta \in \mathbb{R}$ *и* $x \in \mathfrak{B}_0$. *Тогда для любой полуоси* $[a, \infty)$ *задача* (1), (27) *имеет лишь нулевое решение в следующих случаях:*

1) *если в условиях* (27) *число* $p = [(n+1)/2]$;

2) *если* n — *нечетное число, выражение* $(-1)^{[n/2]}(L_n x, x) \leq 0$, *когда* $x \in \mathfrak{B}_{[(n+1)/2]}$ *и в условиях* (27) *число* $p = [n/2]$.

Отметим, что если $n = 1$, то условие (27) на $x(t)$ в случае 2 не налагаётся. Это означает, что уравнение (1) не имеет отличных от нулевого решений $x(t)$, для которых $f_0^*[x(t)]$, $f_1^*[x'(t)] \in L_1(a, \infty)$ при $f_0^* \in \mathfrak{B}_0^*$ и $f_1^* \in \mathfrak{B}_1^*$.

Доказательство теоремы проведем, полагая $a = 0$, так как замена t на $t + a$ сведет исследование задачи (1), (27) именно к этому случаю. Далее используется ряд построений из доказательства теоремы 1, поэтому соответствующие места здесь будут лишь намечены.

Пусть $x(t)$ — некоторое решение уравнения (1) на полуоси $t \geq 0$. Тогда, как при доказательстве равенств (5) и (6), показывается существование такой аналитической при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ и слабо непрерывной при $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ вектор-функции $x(\lambda)$ со значениями в банаховом пространстве $\mathfrak{B}_0$, что

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} f_k^*[x^{(k)}(t)]dt = \lambda^k f_k^*[\hat{x}(\lambda)] -$$

$$- \sum_{s=1}^{k} \lambda^{k-s} f_k^*[x^{(s-1)}(0)], \quad \operatorname{Re}\lambda \geq 0, \quad k = 0, \dots, n, \quad f_k^* \in \mathfrak{B}_k^*, \tag{28}$$

причем при $k = 0$ сумма в правой части этого равенства равна нулю. Отсюда, как и при выводе равенства (7), получаем тождество

$$L(\lambda)\hat{x}(\lambda) = \sum_{k=p+1}^{n} \sum_{s=p+1}^{k} \lambda^{k-s} L_k x^{(s-1)}(0), \qquad \operatorname{Re}\lambda \geq 0, \tag{29}$$

в котором при $n = 1$ и в случае 1 теоремы считаем равной нулю правую часть. Из обратимости оператора $L(i\zeta_0)$ следует существование такого $\delta > 0$, что оператор $L(\lambda)$ обратим, если $|\lambda - i\zeta_0| < \delta$, поэтому равенство

$$\hat{x}(\lambda) = L^{-1}(\lambda) \left\{ \sum_{k=p+1}^{n} \sum_{s=p+1}^{k} \lambda^{k-s} L_k x^{(s-1)}(0) \right\}, \ |\lambda - i\zeta_0| < \delta, \tag{30}$$

задает аналитическое продолжение $\hat{x}(\lambda)$ в полукруг $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda \leq 0, \ |\lambda - i\zeta_0| < < \delta\}$. В частности, если $n = 1$, то в случае 1 теоремы это продолжение тождественно равно нулю, а значит, и $\hat{x}(\lambda) \equiv 0$, откуда вытекает равенство нулю решения $x(t)$, т. е. вытекает утверждение теоремы (без использования условий $\operatorname{Re}(L(i\zeta)x, x) > 0$ и $(L(i\zeta_0)x, x) \neq 0$). Поэтому далее в случае 1 предполагаем $n \geq 2$.

В силу тождества (29) вектор-функция $L(\lambda)\hat{x}(\lambda)$, принимающая значения в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, является целой, а из вложения $\mathfrak{B}_0 \to \mathfrak{H}$ и аналитичности при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ и слабой непрерывности при $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ вектор-функции $\hat{x}(\lambda)$ со значениями в $\mathfrak{B}_0$ вытекает антианалитичность при $\operatorname{Re}\lambda < 0$ и слабая непрерывность при $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ вектор-функции $\hat{x}(-\bar{\lambda})$ со значениями в $\mathfrak{H}$. Тем самым для мнимых значений λ корректно определена числовая функция

$$\alpha(\lambda) = (L(\lambda)\hat{x}(\lambda), \hat{x}(-\bar{\lambda})), \quad i\lambda \in \mathbb{R}, \tag{31}$$

аналитическое продолжение которой в полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda < 0$ задается формулой

$$\alpha(\lambda) = \sum_{k=p+1}^{n} \sum_{s=p+1}^{k} \lambda^{k-s} \Big(L_k x^{(s-1)}(0), \hat{x}(-\bar{\lambda})\Big), \quad \operatorname{Re}\lambda < 0, \tag{32}$$

из которой и равенств (28), как и при выводе соотношений (12), вытекают соотношения

$$\lim_{\lambda \to \infty, \operatorname{Re}\lambda \leq 0} \lambda\alpha(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{в случае 1;} \\ (-1)^{p+1}\Big(L_n x^{(p)}(0), x^{(p)}(0)\Big) & \text{в случае 2.} \end{cases} \tag{33}$$

Отсюда, используя аналитичность при $\operatorname{Re}\lambda < 0$ и непрерывность при $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ функции $\alpha(\lambda)$, заданной равенствами (31), (32), и учитывая требование $(-1)^p (L_n x^{(p)}(0), x^{(p)}(0)) \leq 0$ из случая 2 теоремы, имеем

$$\lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} (L(i\zeta)\hat{x}(i\zeta), \hat{x}(i\zeta))\, d\zeta \leq 0.$$

Но подынтегральная функция в этом неравенстве непрерывна, а по условию теоремы

$$\operatorname{Re}(L(i\zeta)\,\hat{x}(i\zeta),\ \hat{x}(i\zeta)) \geq 0, \quad \zeta \in \mathbb{R},$$

поэтому

$$\operatorname{Re}\alpha(i\zeta) = \operatorname{Re}(L(i\zeta)\,\hat{x}(i\zeta),\ \hat{x}(i\zeta)) = 0, \quad \zeta \in \mathbb{R}.$$

Тем самым аналитическая при $\operatorname{Re}\lambda < 0$ и непрерывная при $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ функция $\alpha(\lambda)$ принимает на мнимой оси мнимые значения. Поэтому равенство $\alpha(\lambda) = -\overline{\alpha(-\bar{\lambda})}$ задает аналитическое продолжение $\alpha(\lambda)$ в полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda > 0$, причем в силу соотношений (33) это продолжение убывает при $\lambda \to \infty$ с $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Следовательно, показано, что $\alpha(\lambda)$ — целая и убывающая на бесконечности функция и согласно теореме Лиувилля $\alpha(\lambda) \equiv 0$. Отсюда и из определения (31) функции $\alpha(\lambda)$, как и на заключительном этапе доказательства теоремы 1, делается вывод о равенстве нулю функции $\hat{x}(\lambda)$, являющейся в силу представления (30) аналитической в точке $i\zeta_0$ (именно для этого требовалась обратимость оператора $L(i\zeta_0)$ в условии А). Но из формулы (28) при $k = 0$, тождества $\hat{x}(\lambda) \equiv 0$ и из единственности преобразования Лапласа вытекает равенство нулю функции $x(t)$ при $t \geq 0$, что и доказывает теорему 2.

В отличие от теорем 1 и 2 в следующем утверждении требование $\operatorname{Re}(L(i\zeta)x, x) \geq 0$ на символ $L(\lambda)$ не налагается, а предполагается выполненным условие

$$\operatorname{Re} i\zeta(L(i\zeta)x, x) \geq 0, \quad \zeta \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathfrak{B}_0, \tag{34}$$

из которого вытекает вещественность квадратичной формы $(L_0 x, x)$, $x \in \mathfrak{B}_0$, в случае произвольного натурального n и формы $(i)^n(L_n x, x)$, $x \in \mathfrak{B}_0$, в случае четного n. Выполнение требования (34) обеспечивается, например, следующими условиями на операторные коэффициенты уравнения (1):

$$\operatorname{Im}(L_{2k}\,x, x) = 0, \quad k = 0, \ldots, [n/2];$$

$$(-1)^k \operatorname{Re}(L_{2k+1}x, x) \leq 0, \quad k = 0, \ldots, [(n-1)/2], \quad x \in \mathfrak{B}_0$$

(ср., например, с работами [7, 8]; заметим, что если это требование в следствиях 2 и 3 работы [7] заменить требованием (34), то они остаются справедливыми).

Теорема 3. *Пусть банахово пространство* $\mathfrak{B}_{[n/2]}$ *всюду плотно вложено в гильбертово пространство* $\mathfrak{H}$, *выполнены условия* А *и* (34), *а квадратичная форма* $(L_0 x, x) \geq 0$ *при* $x \in \mathfrak{B}_0$. *Тогда для любой полуоси* $[a, \infty)$ *задача* (1), (27) *имеет лишь нулевое решение в следующих случаях*:

1) *если в условиях* (27) *число* $p = [n/2]$;

2) *если* n *— четное число, выражение* $(i)^n(L_n x, x) \leq 0$, *когда* $x \in \mathfrak{B}_{[n/2]}$, *и в условиях* (27) *число* $p = [(n-1)/2]$.

Отметим, что в случае 1 при $n = 1$ и в случае 2 при $n = 2$ условие (27) не налагается и тогда утверждение теоремы означает отсутствие указанных в начале п. 3 решений у уравнения (1) на полуоси $[a, \infty)$.

Доказательство использует ряд построений из доказательств теорем 1 и 2, поэтому соответствующие места здесь будут лишь намечены. Как и при доказательстве теоремы 2, полагаем $a = 0$. По решению $x(t)$ уравнения (1) на полуоси $[0,\infty)$ строится такая вектор-функция $\hat{x}(\lambda)$, аналитическая при $\operatorname{Re}\lambda>0$ и слабо непрерывная при $\operatorname{Re}\lambda\geq 0$ со значениями $\mathfrak{B}_0$, что для нее справедливы равенства (28) – (30), а построенная по ней согласно формуле (31) непрерывная при мнимых значениях аргумента числовая функция $\alpha(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda<0$, заданное формулой (32).

Из равенств (27), (28) и (32), как и при выводе соотношений (12), получаем

$$\lim_{\lambda\to\infty,\ \operatorname{Re}\lambda\leq 0}\alpha(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{в случае 1;} \\ (-1)^{p+1}\left(L_n x^{(p)}(0),\, x^{(p)}(0)\right) & \text{в случае 2.}\end{cases} \tag{35}$$

Для числа $R>0$ введем ориентированный контур $\Gamma_R=\{\lambda:\ |\lambda|=R,\ \operatorname{Re}\lambda\leq\leq 0\}$, считая точку $-iR$ его началом, а точку iR его концом. Функция $\alpha(\lambda)$ аналитична при $\operatorname{Re}\lambda<0$ и непрерывна при $\operatorname{Re}\lambda\leq 0$, поэтому для $0<<\varepsilon<R<\infty$

$$\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{\alpha(i\zeta)}{i\zeta}\,d\zeta+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\alpha(i\zeta)}{i\zeta}\,d\zeta = \frac{-1}{i}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\alpha(\lambda)}{\lambda}\,d\lambda+\frac{1}{i}\int_{\Gamma_R}\frac{\alpha(\lambda)}{\lambda}\,d\lambda,$$

откуда с учетом соотношений (35) и равенства

$$\lim_{\lambda\to 0,\ \operatorname{Re}\lambda\leq 0}\alpha(\lambda) = \left(L_0\hat{x}(0),\, \hat{x}(0)\right)$$

получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\ R\to\infty}\left(\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{\alpha(i\zeta)}{i\zeta}\,d\zeta+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\alpha(i\zeta)}{i\zeta}\,d\zeta\right) =$$

$$= \begin{cases} \pi\left(L_0\hat{x}(0),\, \hat{x}(0)\right) & \text{в случае 1;} \\ \pi\left(L_0\hat{x}(0),\, \hat{x}(0)\right)+\pi(-1)^{p}\left(L_n x^{(p)}(0),\, x^{(p)}(0)\right) & \text{в случае 2.}\end{cases}$$

Из этих равенств и из определения (31) функции $\alpha(\lambda)$, учитывая условие $\left(L_0\hat{x}(0),\, \hat{x}(0)\right)\geq 0$, а в случае 2 теоремы и условие $(-1)^{p+1}(L_n x^{(p)}(0),\, x^{(p)}(0))\leq\leq 0$, имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\ R\to\infty}\left(\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{(L(i\zeta)\hat{x}(i\zeta),\, \hat{x}(i\zeta))}{i\zeta}\,d\zeta+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{(L(i\zeta)\hat{x}(i\zeta),\, \hat{x}(i\zeta))}{i\zeta}\,d\zeta\right)\geq 0.$$

Но подынтегральная функция в этих интегралах непрерывна, а из требования (34) следует, что

$$\operatorname{Re}\,(i\zeta)^{-1}(L(i\zeta)\,\hat{x}(i\zeta),\, \hat{x}(i\zeta))\leq 0,\quad \zeta\in\mathbb{R},\quad \zeta\neq 0,$$

поэтому

$$\operatorname{Re}\,(i\zeta)^{-1}\,(L(i\zeta)\,\hat{x}(i\zeta),\, \hat{x}(i\zeta)) = 0,\quad \zeta\in\mathbb{R},\quad \zeta\neq 0.$$

Тем самым аналитическая при $\operatorname{Re}\lambda<0$ и непрерывная при $\operatorname{Re}\lambda\leq 0$ функция $\alpha(\lambda)$ принимает на мнимой оси действительные значения. Поэтому она аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda>0$ посредством равенства $\alpha(\lambda)=\overline{\alpha(-\bar{\lambda})}$, причем в силу соотношений (35) и теоремы Лиувилля $\alpha(\lambda)\equiv 0$ в случае 1 и

$$\alpha(\lambda)\equiv(-1)^{p+1}(L_n x^{(p)}(0),\, x^{(p)}(0))\leq 0$$

в случае 2. Но $\alpha(0) = \left(L_0\hat{x}(0), \hat{x}(0)\right)$, а это число по условию теоремы неотрицательно, поэтому $\alpha(\lambda) \equiv 0$ и в случае 2 теоремы. Из тождественного равенства нулю функции $\alpha(\lambda)$, как и на заключительных этапах доказательств теорем 1 и 2, делается вывод о равенстве нулю решения $x(t)$ уравнения (1).

В следующих двух утверждениях условие $(L_0 x, x) \geq 0$, содержащееся в теореме 3, будет снято, зато либо наложено более сильное ограничение на символ $L(\lambda)$, нежели требование (34), либо допустимые для единственности задачи (1), (27) значения p в краевых условиях (27) будут больше, нежели в случаях 1 и 2 теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть банахово пространство $\mathfrak{B}_{[n/2]}$ плотно вложено в гильбертово пространство $\mathfrak{H}$, выполнено условие* A *и*

$$\operatorname{Im}(i)^k (L_k x, x) = 0, \quad k = 0, \dots, n, \quad x \in \mathfrak{B}_0. \tag{36}$$

Тогда для любой полуоси $[a, \infty)$ задача (1), (27) *имеет лишь нулевое решение, если число $p = [n/2]$.*

Доказательство использует построения из доказательств теорем 1 и 2, поэтому ограничимся лишь необходимыми пояснениями. Так же, как и при доказательстве теоремы 2, считая $a = 0$, по решению $x(t)$ уравнения 1 строится функция $\alpha(\lambda)$, для которой (см. первое соотношение в равенствах (33)) $\lim\limits_{\lambda\to\infty,\, \mathrm{Re}\lambda\leq 0} \alpha(\lambda) = 0$, а по условию (36) функция $\alpha(\lambda)$ принимает действительные значения при мнимых значениях аргумента λ, поэтому $\alpha(\lambda)$ — целая функция, а значит, $\alpha(\lambda) \equiv 0$. Отсюда, как и на заключительных этапах доказательств теорем 1 и 2, делается вывод о равенстве нулю решения $x(t)$.

Теорема 5. *Пусть $n \geq 2$, банахово пространство $\mathfrak{B}_{[n/2]+1}$ плотно вложено в гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ и выполнены условия* A *и* (34). *Тогда для любой полуоси $[a, \infty)$ задача* (1), (27) *имеет лишь нулевое решение в следующих случаях*:

1) *если в условиях* (27) *число $p = [n/2] + 1$;*

2) *если n — четное число, выражение $(i)^n (L_n x, x) \leq 0$, когда $x \in \mathfrak{B}_{[n/2]+1}$, и в условиях* (27) *число $p = [n/2]$.*

Доказательство использует ряд построений из доказательств теорем 1 и 2, поэтому соответствующие места здесь лишь намечены. Считая в условиях (27) $a = 0$, по решению $x(t)$ уравнения (1) на полуоси $[0, \infty)$ строится такая вектор-функция $\hat{x}(\lambda)$ со значениями в $\mathfrak{B}_0$ и такая числовая функция $\alpha(\lambda)$, что $\hat{x}(\lambda)$ и $\alpha(\lambda)$ аналитичны соответственно при $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ и $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, непрерывны вплоть до мнимой оси и для которых справедливы равенства (28) – (32). Из этих равенств, как и при выводе соотношений (12), получаем

$$\lim_{\lambda\to\infty,\, \mathrm{Re}\lambda\leq 0} \lambda^2\alpha(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{в случае 1;} \\ (-1)^{p+1}\left(L_n x^{(p)}(0), x^{(p)}(0)\right) & \text{в случае 2,} \end{cases} \tag{37}$$

откуда вытекают тождества

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} i\zeta\alpha(i\zeta)d\zeta = \begin{cases} 0 & \text{в случае 1;} \\ \pi(-1)^{p}\left(L_n x^{(p)}(0), x^{(p)}(0)\right) & \text{в случае 2.} \end{cases} \tag{38}$$

Подынтегральная функция в этих равенствах непрерывна, а из условия (34) следует, что $\operatorname{Re} i\zeta\alpha(i\zeta) \geq 0$ для всех $\zeta \in \mathbb{R}$, а так как в случае 2 теоремы $(-1)^p (L_n x^{(p)}(0), x^{(p)}(0)) \leq 0$, то из соотношений (38) вытекает тождество $\operatorname{Re} i\zeta\alpha(i\zeta) = 0$. Тем самым убывающая в силу соотношений (37), аналитическая при $\operatorname{Re}\lambda < 0$ и непрерывная при $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ функция $\alpha(\lambda)$ принимает на мнимой оси действительные значения, а значит, она тождественно равна нулю. Отсюда, как и на заключительных этапах доказательств теорем 1 и 2, делается вывод о равенстве нулю решения $x(t)$.

Отметим, что в условиях теорем 2 – 5 требование существования вещественного ζ_0, для которого $(L(i\zeta_0)x, x) \neq 0$ при ненулевых $x \in \mathfrak{B}_0$, вообще говоря, нельзя опустить. Это показывает пример 2 из работы [5].

Кроме того, из теорем 2 – 5 несложно вывести утверждения, как это сделано в приведенном здесь примере 2, о существовании лишь нулевого решения $x(\xi, t)$ у смешанной задачи (22), (23) при условии

$$\left.\frac{\partial^{l-1} x(\xi, t)}{\partial t^{l-1}}\right|_{t=a} = 0, \qquad l = 1, \ldots, p\,(\leq 2),$$

если производные $D_\xi^k x(\xi, t)$, $|k| \leq 2m$, и $\dfrac{\partial^{l-1} x(\xi, t)}{\partial t^{l-1}}$, $l = 1, 2, 3, 4$, в смысле теории распределений принадлежат пространству $L_2(\Omega) \otimes L_1(a, \infty)$, т. е. пространству измеримых функций $x(\xi, t)$, $\xi \in \Omega$, $t \in [a, \infty)$ с нормой, заданной выражением (25) при $b = +\infty$.

Замечание 2. Требование о выполнении условия А в теоремах 2 – 5 можно заменить требованием о выполнении следующего условия.

Условие Б. Существует такое число $\delta > 0$, что для любого решения $x(t)$ уравнения (1) и функционала $f_0^* \in \mathfrak{B}_0^*$ числовая функция $e^{\delta t} f_0^*[x(t)]$ суммируема на полуоси $[a, \infty)$, а при некотором $\zeta_0 \in \mathbb{R}$ выражение $(L(i\zeta_0)x, x) \neq 0$, когда ненулевой вектор $x \in \mathfrak{B}_0$.

Выполнение условия Б гарантирует аналитичность функции $\hat{x}(\lambda)$ в окрестности мнимой оси, в частности, в точке $i\zeta_0$, а именно для этого требовалась обратимость оператора $L(i\zeta_0)$.

1. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
2. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 830 с.
3. *Райков Д. А.* Векторные пространства. – М.: Физматгиз, 1962. – 212 с.
4. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
5. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. – М.: Наука, 1968. – 472 с.
6. *Воропаева Г. А., Маслов В. П.* Кратная полнота по М. В. Келдышу и единственность решения соответствующей задачи Коши // Функцион. анализ и его прил. – 1970. – **4**, вып. 2. – С. 10 – 17.
7. *Радзиевский Г. В.* О линейной независимости производных по Келдышу цепочек у аналитических в полуплоскости оператор-функций // Мат. сб. – 1987. – **132**, № 4. – С. 556 – 578.
8. *Шкаликов А. А.* Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. – 1989. – Вып. 14. – С. 140 – 224.

Получено 30. 06. 93