УДК 517.9

Б. Я. Левин, д-р физ.-мат. наук (Физ.-техн. ин-т низк. температурАН Украины, Харьков),
Л. Я. Мирочник, ст. преп. (Харьков. политехн. ин-т)

ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

Exact estimates are presented for the solutions of the problem $\ddot{y} + \lambda^2 p(t) y = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$ with $p(t)$ satisfying one of the following conditions: 1) $|p(t)| \le M < \infty$; 2) $0 < \omega_1 \le p(t) \le \omega_2 < \infty$; 3) $\sup_x \int_x^{x+T} p(t)\,dt = P_T / T$. The extremal solutions are found.

Наведені точні оцінки розв'язків задачі $\ddot{y} + \lambda^2 p(t) y = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$ при $p(t)$, що задовольняє одну з умов: 1) $|p(t)| \le M < \infty$; 2) $0 < \omega_1 \le p(t) \le \omega_2 < \infty$; 3) $\sup_x \int_x^{x+T} p(t)\,dt = P_T / T$. Знайдені екстремальні розв'язки.

Настоящая статья замыкает цикл исследований, проведенных авторами по оценкам решений уравнения Штурма – Лиувилля, который был начат ими в 30-е годы. Начало было положено следующим вопросом, поставленным М. Г. Крейном на его семинаре: „Как быстро может расти решение уравнения $\ddot{y} + p(t) y = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{y} = 0$, $0 < \omega_1 \le p(t) \le \omega_2 < \infty$?"

Небольшая часть этих исследований была опубликована в статьях [1] (1938), [2] (1965), [3] (1969).

Авторы решили изложить весь цикл в одной статье, посвященной памяти М. Г. Крейна, и начали ее писать, но после смерти Л. Я. Мирочник, Б. Я. Левину пришлось заканчивать работу одному по намеченному ранее плану.*

Ф. С. Рофе-Бекетов и М. Я. Содин прочитали рукопись и сделали ряд замечаний. Большую помощь при окончательном оформлении статьи автору оказали А. Е. и С. Г. Фрынтовы. Им всем автор выражает свою благодарность.

I. Оценка для мультипликаторов дифференциального уравнения Штурма – Лиувиля. Рассмотрим уравнение **

$$\ddot{y} + \lambda^2 p(t) y = 0, \tag{1}$$

где параметр λ и функция $p(t)$ комплексны, $p(t) \in L(0, T)$ и $p(t+T) = p(t)$, т. е. T — период функции $p(t)$, точка обозначает дифференцирование по t.

Известно, что при каждом значении λ существует решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $y(t+T) = \rho(\lambda) y(t)$. Величина $\rho(\lambda)$ называется мультипликатором, а соответствующее решение $y(t)$ — каноническим.*** При $\rho \ne \pm 1$ существует второй мультипликатор $\rho_2 = \rho^{-1}$. Мультипликаторы удовлетворяют уравнению

$$\rho^2 - 2A(\lambda)\rho + 1 = 0,$$

где

$$A(\lambda) = \frac{1}{2}\{ y_1(T, \lambda) + \dot{y}_2(T, \lambda) \},$$

а $y_1(t, \lambda)$ и $y_2(t, \lambda)$ — нормальная система решений уравнения (1), т. е. $y_1(0, \lambda) = \dot{y}_2(0, \lambda) = 1$, $\dot{y}_1(0, \lambda) = y_2(0, \lambda) = 0$.

В данном пункте получена оценка мультипликатора $\rho(\lambda)$ и функции $A(\lambda)$

* При оформлении статьи он пользовался грантом Американского математического общества.
** Это уравнение рассматривал А. М. Ляпунов [4].
*** Другое название — решение Флоке.

во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ в зависимости от величины

$$P^2 = T\int_0^T |p(t)|\,dt.$$

Теорема 1. *При любом комплексном значении* λ *мультипликатор* $\rho(\lambda)$ *уравнения* (1) *удовлетворяет неравенству*

$$|\rho(\lambda)| \le \exp P|\lambda|,$$

а функция $A(\lambda)$ — *неравенству*

$$|A(\lambda)| \le \cosh P|\lambda|,$$

причем знак равенства в обеих формулах достигается лишь при $p(t) \equiv \mathrm{const}$ *и* $\lambda^2 p(t) \le 0$.

Доказательство. Будем считать, что $T = 1$ (это не нарушает общность рассуждений). Кроме того, можно считать, что модули мультипликаторов отличны от единицы, так как в противном случае утверждения теоремы тривиальны. Пусть $|\rho_1(\lambda)| > 1$ и $|\rho_2(\lambda)| < 1$, а u и v — соответствующие им канонические решения. Общее решение уравнения (1) может быть записано в виде

$$y(t) = c_1 u(t) + c_2 v(t).$$

Из определения канонических решений имеем

$$y(t_0 + n) = c_1\rho_1^n u(t_0) + c_2\rho_2^n v(t_0). \tag{2}$$

Отсюда следует, что при $c_1 u(t_0) \ne 0$

$$\log|y(t_0+n)| = n\log|\rho_1| + o(1), \quad n \to \infty, \tag{3}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log|y(t_0+n)|}{n} = \log|\rho_1|,$$

причем предел в левой части равенства существует.

Сравним теперь больший по модулю мультипликатор ρ_1 уравнения (1) с бо́льшим мультипликатором уравнения

$$\ddot{y} - |\lambda|^2|p(t)|\,y = 0. \tag{4}$$

Пусть $y(0) = a_0$ и $\dot{y}(0) = a_1$ — начальные значения решения уравнения (1), для которого справедливо равенство (3). Это решение удовлетворяет интегральному уравнению

$$y(t) = a_0 + a_1 t - \lambda^2\int_0^t (t-\tau)p(\tau)y(\tau)\,d\tau.$$

Функция $\tilde{y}(t)$, являющаяся решением уравнения (4) при начальных условиях $\tilde{y} = |a_0|$, $\dot{\tilde{y}}(0) = |a_1|$, удовлетворяет интегральному уравнению

$$\tilde{y}(t) = |a_0| + |a_1|t + |\lambda^2|\int_0^t (t-\tau)|p(\tau)|\,\tilde{y}(\tau)\,d\tau.$$

Применяя метод итераций для решения обоих интегральных уравнений и выбирая в качестве первого приближения в первом уравнении $y_0 = a_0 + a_1(t)$ и $\tilde{y}_0 = |a_0| + |a_1|t$ — во втором, имеем $|y_0| \le \tilde{y}_0$, $|y_1| \le \tilde{y}_1$, … , $|y_k| \le \tilde{y}_k$, откуда следует $\tilde{y}(t_0+n) \geq |y(t_0+n)|$. Записывая равенство (2) для $\tilde{y}(t)$

$$\tilde{y}(t_0+n) = c_1\tilde{\rho}_1^n\,\tilde{u}(t_0) + c_2\tilde{\rho}_2^n\,\tilde{v}(t_0),$$

получаем

$$\log\tilde{\rho}(\lambda) = \lim_{n\to\infty}\frac{\log\tilde{y}(t_0+n)}{n} \geq \lim_{n\to\infty}\frac{\log|y(t_0+n)|}{n} = \log|\rho(\lambda)|. \tag{5}$$

Таким образом, для получения оценки сверху мультипликаторов уравнения (1) достаточно получить оценку для мультипликатора уравнения (4).

Кроме того, из (5) следует, что мультипликаторы $\tilde{\rho}_1$ и $\tilde{\rho}_2$ уравнения (4) вещественны и отличны от единицы. Покажем, что соответствующие им канонические решения также вещественны с точностью до постоянного множителя. Действительно, если бы решение $y(t)$, соответствующее $\tilde{\rho}_1$, было комплексным, т. е. $y(t) = u(t) + iv(t)$, где функции $u(t)$ и $v(t)$ линейно независимы, то в силу вещественности величины $|\lambda|^2 p(t)$ эти функции также являлись бы решениями уравнения (4) и тогда общее решение уравнения (4) можно было бы записать в виде $c_1u(t)+c_2v(t)$. Но так как справедливы равенства $u(t+1) = \tilde{\rho}_1 u(t)$, $v(t+1) = \tilde{\rho}_1 v(t)$, то сделанное предположение противоречит существованию второго мультипликатора $\tilde{\rho}_2 \neq \tilde{\rho}_1$.

Для вещественного решения $y(t)$ уравнения (4) знаки $y(t)$ и $\ddot{y}(t)$ совпадают, и, значит, кривая $y = y(t)$ обращена выпуклостью к вещественной оси. Поэтому функция $y(t)$, если она не тождественный нуль, может иметь лишь два корня, но так как $y(t)$ — каноническое решение, то $y(t) \neq 0$ при всех t.

Обозначим величину $|\lambda|^2 p(t)$ через $q(t)$ и перепишем уравнение (4) в виде

$$\ddot{y} - q(t)y = 0. \tag{6}$$

Рассмотрим теперь уравнения типа (6), в которых функция $q(t)$ удовлетворяет условиям

$$q(t)\in L(0,1), \quad q(t+1) = q(t), \quad \int_0^1 q(t)\,dt = q^2, \tag{7}$$

где $q > 0$ фиксировано, и докажем, что все мультипликаторы $\tilde{\rho}$ любого такого уравнения ограничены числом $\exp q : \tilde{\rho} \leq \exp q$. Пусть $y(t)$ — каноническое решение уравнения (6) при $q(t)$, удовлетворяющем условиям (7). Как было показано, $y(t) \neq 0$ при $-\infty < t < \infty$. Введем функцию $z(t) = \dot{y}(t)/y(t)$. Она непрерывна, периодична: $z(t+1) = z(t)$ и удовлетворяет уравнению

$$\dot{z} + z^2 - q(t) = 0.$$

Интегрируя обе части этого уравнения от $t = 0$ до $t = 1$, получаем

$$\int_0^1 z^2(t)\,dt = \int_0^1 q(t)\,dt = q^2. \tag{8}$$

При этом $y(t)$ выражается через $z(t)$ по формуле

$$y(t) = y(0)\exp\int_0^t z(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда вытекает следующее выражение для мультипликатора:

$$\tilde{\rho} = \exp\int_0^1 z(t)\,dt.$$

Найдем теперь среди всех непрерывных периодических функций $z(t)$ с периодом $T = 1$ и удовлетворяющих условию (8) ту функцию, на которой функционал

$$\int_0^1 z(t)\,dt$$

достигает максимума. Для этого разложим $z(t)$ в ряд Фурье:

$$z(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t}; \quad c_{-n} = \bar{c}_n.$$

Тогда

$$\int_0^1 z(t)\,dt = c_0$$

и

$$\int_0^1 z^2(t)\,dt = |c_0|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = q^2.$$

Очевидно наибольшим значением для c_0 будет q. Это значение достигается, если $c_n = 0$ при $n \neq 0$. Поэтому для рассматриваемых функций $z(t)$

$$\max \int_0^1 z(t)\,dt = q,$$

и достигается он лишь на функции $z(t) \equiv q$. Отсюда получаем доказываемую оценку для $\tilde{\rho}$:

$$\tilde{\rho} \leq \exp q. \tag{9}$$

Подставляя в нее значение

$$q^2 = |\lambda|^2 \int_0^1 |p(t)|\,dt = P^2 |\lambda|^2,$$

имеем

$$\tilde{\rho} \leq \exp(P|\lambda|).$$

Из этого неравенства и неравенства (5) следует первая часть утверждения теоремы:

$$|\rho(\lambda)| \leq \exp(P|\lambda|),$$

причем знак равенства здесь достигается лишь в случае, когда он справедлив в неравенствах (5) и (9), а это возможно только при $p(t) \equiv \text{const}$ и $p(t)\lambda^2 = -|p(t)||\lambda|^2$.

Оценка для $A(\lambda)$ следует из неравенства

$$|A(\lambda)| \leq \frac{1}{2}(|\rho(\lambda)| + |\rho(\lambda)|^{-1}).$$

Правая часть этого неравенства есть монотонно возрастающая функция от

$|\rho(\lambda)|$ при $|\rho(\lambda)| > 1$ и, следовательно, во всей комплексной плоскости*

$$|A(\lambda)| \le \cosh(P|\lambda|). \tag{10}$$

Теорема доказана.

Отметим, что из полученной оценки мультипликатора следует также оценка для роста произвольного решения $y(t)$ уравнения (1). Действительно, по формуле (2)

$$y(t_0 + nT) = c_1\rho^n u(t_0) + c_2\rho^{-n} v(t_0).$$

Обозначая $t_0 + nT = t$ и предполагая, что $|\rho| > 1$ и $c_1 u(t_0) \ne 0$, получаем

$$|y(t)| < K_1 |\rho_1|^{t/T},$$

где K_1 — некоторая константа.

При тех значениях t, для которых $u(t_0) \ge m > 0$, справедливо также неравенство

$$|y(t)| > K_2 |\rho_1|^{t/T}.$$

Таким образом, если обозначить через E совокупность всех δ-окрестностей узлов решения $u(t)$ при некотором фиксированном δ, то будем иметь

$$\lim_{t\to\infty,\ t\notin E} \frac{\log|y(t)|}{t} = \frac{1}{T}\log|\rho|. \tag{11}$$

Если же не исключить множество E, то в неравенстве (11) следует заменить предел на верхний предел.

Приведем еще оценку роста решения уравнения

$$\ddot{y} - q(t)y = 0, \tag{12}$$

не предполагая периодичности функции $q(t)$. Вначале рассмотрим такие уравнения (12), у которых функция $q(t)$ при некотором $T > 0$ удовлетворяет условию

$$\int_0^T q(t)\,dt \le Tq, \tag{13}$$

где $q > 0$ фиксировано. Пусть $y(t)$ — решение уравнения (12), удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = h > 0$. Будем искать оценку для $\max|y(T)|$. Если $q(t)$ заменить на $|q(t)|$, то $\max|y(t)|$ может только увеличиться. Поэтому будем считать, что $q(t) \ge 0$. Введем аналогично предыдущему функцию $z(t)$ равенством

$$y(t) = y(0)\exp\int_0^t z(\tau)\,d\tau.$$

* А. М. Ляпунов изучал функцию $A(\lambda)$, пользуясь следующим разложением для нее:

$$A(\lambda) = 1 + \frac{\lambda^2}{2}\int_0^1 p(t)\,dt + \ldots + \frac{\lambda^{2k}}{2k!}\int_0^1\int_0^{t_{k-1}} \ldots$$

$$\ldots \int_0^{t_1} (1 - t_{k-1} + \tau)(t_{k-1} - t_{k-2}) \ldots (t_1 - \tau)\, p(\tau) p(t_{k-1}) \ldots p(t_1)\, d\tau dt_{k-1} \ldots dt_1 + \ldots .$$

Он высказал предположение [4], что все коэффициенты этого разложения достигают наибольшего значения при $p(t) \equiv \text{const}$. Из этого утверждения, конечно, следует оценка (10). Это предположение А. М. Ляпунова доказано в [5] М. Г. Крейном. Наши рассуждения более элементарны.

Для функции $z(t)$ получаем уравнение

$$\dot{z} + z^2 = q(t), \quad z(0) = h,$$

и, интегрируя его от 0 до T, имеем

$$z(T) - h + \int_0^T z^2(t)\,dt = \int_0^T q(t)\,dt.$$

Из этого соотношения и неравенства (13) получаем неравенство

$$\int_0^T z^2(t)\,dt \le Tq + h,$$

но

$$\left(\int_0^T z(t)\,dt\right)^2 \le T\int_0^T z^2(t)\,dt,$$

и мы имеем

$$\log y(T) = \int_0^T z(t)\,dt \le T\sqrt{q}\left(1 + \frac{h}{T\sqrt{q}}\right)^{1/2}.$$

Пусть теперь условие (13) выполняется при всех $T > T_0$, где $T_0 > 0$. В этом случае

$$\log y(T) \le T\sqrt{q} + \frac{h}{2\sqrt{q}} + O\left(\frac{1}{T}\right), \quad T \to \infty,$$

откуда

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{\log y(T)}{T} \le \sqrt{q}. \tag{14}$$

В частном случае при $q(t) \equiv q$ получаем

$$y(T) = \frac{h + \sqrt{q}}{2\sqrt{q}}\, e^{T\sqrt{q}} - \frac{h - \sqrt{q}}{2\sqrt{q}}\, e^{-T\sqrt{q}},$$

и тогда

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log y(T)}{T} = \sqrt{q}.$$

Следовательно, оценка (14) в известном смысле точна.

II. Некоторые экстремальные задачи в классе решений уравнений Штурма – Лиувилля. Будем рассматривать решения уравнений

$$\ddot{y} + p(t)y = 0, \qquad t \ge 0, \tag{15}$$

удовлетворяющие начальным условиям $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$, где $p(t)$ — кусочно-непрерывные функции на интервале $(0, \infty)$ (значения $p(t)$ в точках разрыва не существенны), а также условию

$$0 < \omega_1^2 \le p(t) \le \omega_2^2. \tag{16}$$

Класс таких функций $y(t)$ будем обозначать $K(\omega_1, \omega_2)$.

Изучим некоторые экстремальные задачи в классе этих функций и затем применим полученные результаты к оценке фундаментальных функций задачи

$$\ddot{y} + \lambda^2 p(t)y = 0 \quad (y(0) = y(1) = 0)$$

при $p(t)$, удовлетворяющем условию (16). (Близкие задачи рассматривал М. Эссен [13, 14].)

1. Сначала докажем лемму, являющуюся некоторым изменением теоремы Штурма о сравнении.

Лемма 1. *Пусть функции y и z являются решениями уравнений*

$$\ddot{y} + p(t)y = 0; \qquad \ddot{z} + p_1(t)z = 0 \tag{17}$$

и при некотором α выполняются соотношения

$$y(\alpha) = z(\alpha) > 0; \quad \ddot{y}(\alpha) \geq \dot{z}(\alpha)$$

и $p_1(t) \geq p(t)$ при $t > \alpha$.

Тогда если t_1 — наименьший корень функции $z(t)$, находящийся правее точки α, то $y(t) \geq z(t)$ при $\alpha < t < t_1$.

Доказательство. Умножая (17) соответственно на z и y, вычитая и интегрируя затем полученное выражение от α до t, получаем

$$\dot{y}(t)z(t) - y(t)\dot{z}(t) = \int\limits_{\alpha}^{t} [p_1(t) - p(t)]\, y(t)z(t)\,dt + y(\alpha)\,[\,\dot{y}(\alpha) - \dot{z}(\alpha)] \geq 0.$$

Разделив на z^2, будем иметь

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{z}\right) \geq 0.$$

Интегрируя это неравенство от α до $t < t_1$ при $\alpha < t < t_1$, находим

$$\frac{y(t)}{z(t)} - 1 \geq 0.$$

***Замечания.* 1.** Очевидно, что знак равенства для какого-нибудь t из интервала (α, t_1) возможен лишь в случае, когда $\dot{y}(\alpha) = \dot{z}(\alpha)$, $p(t) = p_1(t)$.

2. Если в условии леммы $y(\alpha) = z(\alpha) < 0$ и $\dot{y}(\alpha) \leq \dot{z}(\alpha)$, то выполняется неравенство $|\,y(t)| \geq |\,z(t)|$, $\alpha < t < t_1$.

3. Если в условии леммы $y(\alpha) = 0$ и $|\,\dot{y}(\alpha)| \geq |\,\dot{z}(\alpha)|$, то и в этом случае справедливо неравенство $|y(t)| \geq |z(t)|$, $\alpha < t < t_1$.

Чтобы это доказать, следует рассмотреть решения уравнений (17), удовлетворяющие при некотором $\varepsilon \to 0$ начальным условиям

$$y_\varepsilon(\alpha) = \varepsilon, \quad \dot{y}_\varepsilon(\alpha) = \dot{y}(\alpha);$$

$$z_\varepsilon(\alpha) = \varepsilon, \quad \dot{z}_\varepsilon(\alpha) = \dot{z}(\alpha)\operatorname{sign}\dot{y}(\alpha),$$

при которых лемма 1 верна, и использовать непрерывную зависимость решений от начальных условий.

Из леммы 1 следует, что все функции класса $K(\omega_1, \omega_2)$ осциллируют, причем расстояние d между двумя соседними узлами удовлетворяет неравенствам

$$\frac{\pi}{\omega_2} \leq d \leq \frac{\pi}{\omega_1}.$$

Заметим также, что для произвольного $y(t) \in K(\omega_1, \omega_2)$ каждый корень есть узел, т. е. при переходе через корень $y(t)$ меняет знак.

В дальнейшем большую роль будет играть специальный подкласс T функций из класса $K(\omega_1, \omega_2)$.

Определение. *Функция* $y(t) \in K(\omega_1, \omega_2)$ *принадлежит классу* $T(\omega_1, \omega_2)$, *если ее график между любыми двумя узлами* t_k, t_{k+1} *состоит из двух гладко сопряженных синусоид с частотами* ω_1 *и* ω_2:

$$y(t) = A \sin \omega_1 (t - t_k) \text{ при } t_k \le t \le t'_k$$

и

$$y(t) = B \sin \omega_2 (t_{k+1} - t) \text{ при } t'_k \le t \le t_{k+1}.$$

Из гладкости сопряжения синусоид в точке $t'_k \in (t_k, t_{k+1})$ следует

$$\det \begin{pmatrix} \sin \omega_1 (t'_k - t_k) & \sin \omega_2 (t_{k+1} - t'_k) \\ \omega_1 \cos \omega_1 (t'_k - t_k) & -\omega_2 \cos \omega_2 (t_{k+1} - t'_k) \end{pmatrix} = 0$$

и при $t'_k \le t < t_{k+1}$ получаем

$$y(t) = A \left\{ \sin \omega_1 (t'_k - t_k) \cos \omega_2 (t - t'_k) + \frac{\omega_1}{\omega_2} \cos \omega_1 (t'_k - t_k) \sin \omega_2 (t - t'_k) \right\}.$$

Легко видеть, что $y(t_{k+1}) = 0$. Точки t'_k будем называть точками переключения.

Очевидно, что функции $y(t)$, входящие в класс T, соответствуют кусочно-постоянным функциям $p(t)$:

$$p(t) = \begin{cases} \omega_1^2 & \text{при} \quad t_k \le t < t'_k; \\ \omega_2^2 & \text{при} \quad t_k \le t < t'_{k+1}. \end{cases}$$

Лемма 2. *Для произвольной системы точек:* $t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots, t_n$; *удовлетворяющих неравенствам*

$$\frac{\pi}{\omega_2} \le t_{k+1} - t_k \le \frac{\pi}{\omega_1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

существует в классе T *единственная функция, имеющая узлы в точках* t_1, $t_2, \ldots, t_n$ *и только в них.*

Доказательство. Рассмотрим сначала интервал $(0, t_1)$. Построим на нем функцию $y(t)$, график которой состоит из двух гладко сопряженных синусоид:

$$y(t) = \begin{cases} \omega_1^{-1} \sin \omega_1 t, & 0 \le t \le t'; \\ \omega_1^{-1} \sin \omega_1 t' \cos \omega_2 (t - t') + \omega_2^{-1} \cos \omega_1 t' \sin \omega_2 (t - t'), & t' \le t < t_1. \end{cases}$$

В случае, когда точка переключения t' изменяется от 0 до π / ω_1, первый корень построенной функции $y(t)$ изменяется непрерывно и монотонно от π / ω_2 до π / ω_1. Действительно, из равенства

$$\frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 t' \cos \omega_2 (t_1 - t') + \frac{1}{\omega_2} \cos \omega_1 t' \sin \omega_2 (t_1 - t') = 0$$

получаем

$$\tan \omega_2 (t_1 - t') = -\frac{\omega_2}{\omega_1} \tan \omega_1 t'$$

и, значит,

$$t_1 = t' - \frac{1}{\omega_2} \arctan \left\{ \frac{\omega_2}{\omega_1} \tan \omega_1 t' \right\} + \frac{\pi}{\omega_2}.$$

Отсюда следует

$$dt_1 = \left\{1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 \cos^2 \omega_1 t' + \omega_2^2 \sin^2 \omega_1 t'}\right\} dt'. \tag{18}$$

Но при $t' < t < t_1$ имеем $y(t) = B \sin \omega_2 (t - t_1)$, где

$$B^2 = \frac{\sin^2 \omega_1 t'}{\omega_1^2} + \frac{\cos^2 \omega_1 t'}{\omega_2^2}.$$

Подставляя выражение для B^2 в (18), окончательно получаем следующую связь между dt_1 и dt':

$$dt_1 = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_1^2 \omega_2^2 B^2} \sin^2 \omega_1 t' \cdot dt'.$$

Итак, функция, определяющая зависимость t' от t_1, будет непрерывной и монотонной и, следовательно, каждому значению t_1 при $\pi / \omega_2 \le t \le \pi / \omega_1$ отвечает одно и только одно значение t'.

Допустим теперь, что $y(t)$ известна при $t \le t_k$. Построим на интервале (t_k, t_{k+1}) функцию $y(t)$ так:

$$y(t) = \dot{y}(t_k) \frac{\sin \omega_1 (t - t_k)}{\omega_1}$$

при $t_k \le t \le t'_k$ и

$$y(t) = \dot{y}(t_k) \{ \omega_1^{-1} \sin \omega_1 (t'_k - t_k) \cos \omega_2 (t - t'_k) + \omega_2^{-1} \cos \omega_1 (t'_k - t_k) \sin \omega_2 (t - t'_k) \}$$

при $t'_k \le t \le t_{k+1}$. Повторяя предыдущие рассуждения, из условия $y(t_{k+1}) = 0$ получаем, что при фиксированном t_k дифференциалы dt'_k и dt_{k+1} связаны соотношением

$$dt_{k+1} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_1^2 \omega_2^2 B_k^2} \sin^2 \omega_1 (t'_k - t_k)\, dt'_k, \tag{19}$$

где

$$B_k^2 = \frac{\sin^2 \omega_1 (t'_k - t_k)}{\omega_1^2} + \frac{\cos^2 \omega_1 (t'_k - t_k)}{\omega_2^2}.$$

При изменении t'_k от t_k до $t_k + \pi / \omega_1$ узел t_{k+1} меняется непрерывно и монотонно от $t_k + \pi / \omega_2$ до $t_k + \pi / \omega_1$ и, следовательно, точка переключения на интервале (t_k, t_{k+1}) однозначно определяется. Лемма доказана.

***Замечания.* 4.** Положение точки переключения t'_k на интервале с номером k зависит только от концов этого интервала и при фиксированном одном конце расстояние точки переключения от этого конца есть непрерывная возрастающая функция от длины интервала.

5. Если $y(t) \in K(\omega_1, \omega_2)$ и имеет узлы в точках $t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots, t_n$, а $z(t) \in$ $\in T(\omega_1, \omega_2)$ и имеет те же узлы, то, применяя лемму 1, получаем

$$|y(t)| \le |z(t)|, \quad t \in (0, t_n),$$

и во всех узлах $|\dot{y}(t_k)| \le |\dot{z}(t_k)|$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

2. *Первая экстремальная задача.* Пусть дана система точек $t_0 = 0, t_1$, $t_2, \ldots, t_n$, где $\pi\omega_2^{-1} \le t_{k+1} - t_k \le \pi\omega_1^{-1}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Обозначим через $K_1(t_1, \ldots, t_n)$ подкласс тех функций из $K(\omega_1, \omega_2)$, которые имеют узлы в этих точках. Будем искать такую функцию $\tilde{y} \in K_1(t_1, \ldots, t_n)$, чтобы $\tilde{y}(t_n)$ была максимальной во всем классе $K_1(t_1, \ldots, t_n)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Максимум функционала* $|\dot{y}(t_n)|$ *во всем классе* $K_1(t_1, \ldots, t_n)$ *достигается на функции класса* $T(\omega_1, \omega_2)$ *и только на ней.*

Доказательство. Для каждого $p(t)$, дающего узлы решения в точках t_1, $t_2, \ldots, t_n$, определим на интервале (t_k, t_{k+1}) решение уравнения (15), удовлетворяющее условиям $z(t_k) = 0$, $\dot{z}(t_k) = 1$. Очевидно, будем иметь $z(t_{k+1}) = 0$. Обозначим $M_k = |\dot{z}(t_{k+1})|$. Тогда очевидно, что для любого решения с узлами в точках $t_1, t_2, \ldots, t_n$ верно равенство*

$$|\dot{y}(t_n)| = M_1 M_2 \ldots M_n. \tag{20}$$

Покажем, что величина M_k принимает наибольшее значение, если $z \in T$ на интервале (t_k, t_{k+1}) и только в этом случае.

Пусть $\bar{z}(t) \in T$ на интервале (t_k, t_{k+1}), а $z(t)$ — произвольное решение (вообще говоря, с другим $p(t)$), причем $z(t_k) = z(t_{k+1}) = 0$, $\dot{z}(t_k) = 1$. Применяя к $\bar{z}(t)$ и $z(t)$ лемму 1, на интервале (t_k, t_k') будем иметь $\bar{z}(t_k') \ge z(t_k')$. Если в точке t_{k+1} выполняется неравенство $|\dot{\bar{z}}(t_{k+1})| \le |\dot{z}(t_{k+1})|$, то, по той же лемме, примененной к интервалу (t_k', t_{k+1}), получим $\bar{z}(t_k') \le z(t_k')$ и, следовательно, $\bar{z}(t_k') = z(t_k')$.

По лемме 1 отсюда следует, что $\bar{z}(t) \equiv z(t)$ на всем интервале (t_k, t_{k+1}). Таким образом, если $z(t) \notin T$, то

$$|\dot{\bar{z}}(t_{k+1})| > |\dot{z}(t_{k+1})|.$$

Теорема доказана.

Из приведенных рассуждений следует, что функция $\tilde{y}(t)$, решающая первую экстремальную задачу, всюду удовлетворяет неравенству $|\tilde{y}(t)| \ge |y(t)|$ для любого $y \in K_1(t_1, \ldots, t_n)$.

Вторая экстремальная задача. Зафиксируем номер n узла и будем искать функцию $y \in K(\omega_1, \omega_2)$, у которой $|\dot{y}(t)|$ в узле с номером n достигает максимума во всем классе.

Теорема 3. *Максимум функционала* $|\dot{y}(t_n)|$ *при фиксированном номере* n *узла* t_n *достигается во всем классе* $K(\omega_1, \omega_2)$ *на функции* $y(t)$, *соответствующей периодической кусочно-постоянной функции* $p(t)$ *с периодом* $\pi(\omega_1^{-1} + \omega_2^{-1})/2$, *равной*:

$$p(t) = \begin{cases} \omega_1^2 & \text{при} \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2\omega_1}, \\ \omega_2^2 & \text{при} \quad \dfrac{\pi}{2\omega_1} < t < \dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{1}{\omega_1} + \dfrac{1}{\omega_2}\right). \end{cases} \tag{21}$$

Максимум $|\dot{y}(t_n)|$ *достигается только на этой функции и равен* $(\omega_2/\omega_1)^n$.

* Близкие оценки изложены Сансоне [6], гл VII.

Доказательство. Максимум величины $|\dot z(t_{k+1})|$ при $z(t_k) = z(t_{k+1}) = 0$ и $\dot z(t_k) = 1$ достигается, как было показано, на функции $z(t)$, соответствующей кусочно-постоянной функции

$$p(t) = \begin{cases} \omega_1^2 & \text{при} \quad t_k \le t < t_k'; \\ \omega_2^2 & \text{при} \quad t_k' \le t < t_{k+1}, \end{cases}$$

и соответственно

$$z(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 (t - t_k) & \text{при} \quad t_k \le t < t_k'; \\ B_k \sin \omega_2 (t - t_{k+1}) & \text{при} \quad t_k' \le t < t_{k+1}. \end{cases}$$

При этом, как было показано,

$$B_k^2 = \frac{\sin^2 \omega_1 (t_k' - t_k)}{\omega_1^2} + \frac{\cos^2 \omega_1 (t_k' - t_k)}{\omega_2^2}.$$

Имеем $\dot z(t_{k+1}) = B_k \omega_2$. Легко видеть, что B_k достигает наибольшего значения ω_1^{-1} при $t_k' = t_k + \pi/(2\omega_1)$, и $t_{k+1} - t_k = \pi(\omega_1^{-1} + \omega_2^{-1})/2$. Таким образом, если не фиксировать узлы, то наибольшее значение $M_k = \omega_2/\omega_1$ получаем, если

$$p(t) = \begin{cases} \omega_1^2 & \text{при} \quad t_k < t \le t_k + \dfrac{\pi}{2\omega_1}; \\ \omega_2^2 & \text{при} \quad t_k + \dfrac{\pi}{2\omega_1} < t < t_{k+1}. \end{cases}$$

Из равенства (20) следует, что $\max |\dot y(t_n)| = (\omega_2/\omega_1)^n$ и достигается лишь на функции $p(t)$, определяемой равенствами (21). Теорема доказана.

Заметим, что для экстремальной функции будем иметь *

$$\max_{0 < t < t_n} |y(t)| = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^{n-1} \frac{1}{\omega_1}.$$

Третья экстремальная задача. Из функций класса $K(\omega_1, \omega_2)$, имеющих n-й узел в данной точке t_n, найти ту, у которой $|\dot y(t_n)|$ принимает наибольшее значение.

Для решения этой задачи докажем две леммы.

Лемма 3. *Пусть на интервале* (t_k, t_{k+1})

$$y(t) = \begin{cases} \omega_1^{-1} \sin \omega_1 (t - t_k), & t_k \le t < t_k'; \\ \omega_1^{-1} \sin \omega_1 (t_k' - t_k) \cos \omega_2 (t - t_k') + & \\ \quad + \omega_2^{-1} \cos \omega_1 (t_k' - t_k) \sin \omega_2 (t - t_k'), & t_k' \le t < t_{k+1}, \end{cases}$$

и t_k, t_{k+1} — *узлы функции* $y(t)$, *причем* t_k *зафиксировано, а* t_{k+1} *меняется. Тогда*

$$\frac{d}{dt_{k+1}} |\dot y(t_{k+1})|^2 = 2\omega_1 |\dot y(t_{k+1})|^2 \cot \omega_1 (t_k' - t_k).$$

Доказательство. При $t_k' \le t \le t_{k+1}$ можно записать

* Эта оценка была дана в [1] в 1936 г. (см. также Сансоне [6], гл. VII).

$$y(t) = B_k \sin \omega_2 (t - t_{k+1}),$$

где

$$B_k^2 = \frac{\sin^2 \omega_1 (t_k' - t_k)}{\omega_1^2} + \frac{\cos^2 \omega_1 (t_k' - t_k)}{\omega_2^2}.$$

Очевидно, что $|\dot{y}(t_{k+1})|^2 = B_k^2 \omega_2^2$. Подставляя значение B_k^2, получаем

$$|\dot{y}(t_{k+1})|^2 = \frac{\omega_2^2 \sin^2 \omega_1 (t_k' - t_k) + \omega_1^2 \cos^2 \omega_1 (t_k' - t_k)}{\omega_1^2},$$

откуда

$$\frac{d}{dt_k'} |\dot{y}(t_{k+1})|^2 = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_1} \sin 2\omega_1 (t_k' - t_k).$$

Из последнего равенства с учетом (19) получаем

$$\frac{d}{dt_{k+1}} |\dot{y}(t_{k+1})|^2 = 2\omega_1 |\dot{y}(t_{k+1})|^2 \cot \omega_1 (t_k' - t_k).$$

Лемма доказана.

Заметим, что если бы мы зафиксировали правый конец интервала, а левый меняли, то получили бы

$$\frac{d}{dt_k} |\dot{y}(t_{k+1})|^2 = -2\omega_1 |\dot{y}(t_{k+1})|^2 \cot \omega_1 (t_k' - t_k),$$

поскольку $\dot{y}(t_{k+1})$ зависит только от длины интервала.

Лемма 4. *Пусть $y(t)$ принадлежит классу T на отрезке $[t_0, t_2]$, имеем узлы в точках $t_0 < t_1 < t_2$ и $\pi/\omega_2 \le t_2 - t_1 \le \pi/\omega_1$, $\pi/\omega_2 \le t_1 - t_0 \le \pi/\omega_1$, причем t_0 и t_2 фиксированы, а t_1 можно менять. Тогда $\max|\dot{y}(t_2)|$ будет достигаться при $t_1 = (t_0 + t_2)/2$.*

Доказательство. Введем, как и раньше, функции $z_1(t)$ и $z_2(t)$ для интервалов (t_0, t_1) и (t_1, t_2) и обозначим $|\dot{z}_1(t_1)| = M_1$, $|\dot{z}_2(t_2)| = M_2$. Тогда $|\dot{y}(t_2)| = M_1 \cdot M_2$. По лемме 3

$$\frac{d \log M_1^2 \cdot M_2^2}{dt_1} = 2\omega_1 [\cot \omega_1 (t_1' - t_0) - \cot \omega_1 (t'' - t_1)],$$

где t' и t'' — точки переключения в интервалах (t_0, t_1) и (t_1, t_2). Из замечания к лемме 2 следует, что если t_1 — середина интервала (t_0, t_2), то $t' - t_0 = t'' - t_1$, и рассматриваемая производная равна нулю. Если $t' - t_0 < t'' - t_1$, то, очевидно, производная положительна; если же $t' - t_0 > t'' - t_1$, — то отрицательна. Итак, величина $\log M_1^2 M_2^2$ имеет максимум при $t_1 = (t_0 + t_2)/2$. Этот максимум единственный, так как $\omega_1 [(t'' - t_1) - (t' - t_0)] \ne k\pi$ при k целом и не равном нулю.

Теорема 4. *Из всех функций $y(t) \in K(\omega_1, \omega_2)$, имеющих n-й узел в фиксированной точке $t_n = \tau$, максимум величины $|\dot{y}(\tau)|$ достигается на функции $y(t)$ из класса T, имеющей равноотстоящие узлы и, следовательно, соответствующей периодической функции $p(t)$.*

Доказательство. Пусть $y(t)$ — решение, для которого $|\dot{y}(\tau)|$ максимально. Эта функция $y(t)$ имеет узлы в каких-то точках $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Очевидно, что в более узком классе $K_1(t_1, \ldots, t_n)$ функций $y(t)$, имеющих узлы в этих точках, функция $y(t)$ также дает максимум для величины $|\dot{y}(\tau)|$ и, следовательно, по теореме 2 она принадлежит классу T.

Выберем соответствующую этому решению функцию $p(t)$ и обозначим, как и прежде, через $z_k(t)$ решение уравнения (15) (при этом $p(t)$ на интервале (t_k, t_{k+1}) такое, что $z_k(t_k) = z_k(t_{k+1}) = 0$, $\dot{z}_k(t_k) = 1$) и через $M_k = |\dot{z}_k(t_{k+1})|$. Тогда получим

$$|\dot{y}(\tau)| = M_1 \cdot M_2 \cdot \ldots \cdot M_{k-1} \cdot M_k \cdot \ldots \cdot M_n. \tag{22}$$

Покажем, что узлы у экстремального решения должна быть равноотстоящими. Действительно, в противном случае можно сдвинуть один узел так, чтобы произведение двух соседних множителей в (22) увеличилось, а остальные множители не изменились. Теорема доказана.

Четвертая экстремальная задача. При заданном узле τ и таком номере n, что $n\pi/\omega_1 \le \tau \le n\pi/\omega_2$, найти функцию из класса $Q_\tau(\omega_1, \omega_2) = K(\omega_1, \omega_2) \cap \cap \{y : y(\tau) = 0\}$, имеющую наибольшее отклонение от нуля на отрезке $[0, \tau]$, т. е. наибольшее во всем классе значение величины $\max\{|y(t)|;\ 0 \le t \le \tau\}$.

Из леммы 2 и замечания 5 к ней, следует что решение этой задачи достигается на функции класса T. Кроме того,

$$\max_{0 \le t \le \tau} |y(t)| = \max_{t_{n-1} \le t \le \tau} |y(t)|,$$

так как если бы максимум достигался функцией не на последнем интервале, то можно было бы, не меняя длину интервалов, переставить его так, чтобы тот, на котором достигается максимум $|y(t)|$, стал последним. При этом производная на левом конце этого интервала только увеличилась бы, а следовательно, увеличился бы и максимум функции $|y(t)|$.

Далее, можно утверждать, что до точки $t = t_{n-1}$ функция, соответствующая экстремальной функции $y(t)$, периодическая. Действительно, в противном случае можно было бы, не меняя узла t_{n-1}, увеличить $|\dot{y}(t_{n-1})|$, и, следовательно, увеличить $|\dot{y}(t)|$ на последнем интервале (t_{n-1}, τ).

Обозначим $J(\tau) = \max\limits_{y \in T} \max\limits_{0 \le t \le \tau} y(t)$. Значение $J(\tau)$ зависит от соотношения между величинами ω_1 и ω_2. Рассмотрим возможные случаи:

$$1)\quad \frac{n-1}{2}\pi\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right) + \frac{\pi}{\omega_1} < \tau, \quad \text{т. е.} \quad \left(\tau - \frac{\pi}{\omega_1}\right) : (n-1) > \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right).$$

В этом случае в каждом из первых $n-1$ интервалов точка сопряжения синусоид лежит правее максимума функции на этом интервале. На последнем интервале точка сопряжения отсутствует, так как если бы она была, то, уменьшив первые $n-1$ интервалов и сдвинув точку сопряжения на последнем интервале вправо (так, чтобы τ оставалась узлом), мы увеличили бы производную в узле t_{n-1} и, следовательно, увеличили бы $\max_{t_{n-1} \le t \le \tau}|y(t)|$. Экстремальная функция получается при узлах, расположенных в точках

$$t_k = k\,\frac{\tau - \pi\omega_1^{-1}}{n-1}; \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Функция $p(t)$ на интервале $(0, \tau - \pi\omega_1^{-1})$ периодическая и определяется как ω_1 в начале каждого интервала и как ω_2 в конце. Точки пересечения лежат правее, чем $t_k + \pi/(2\omega_1)$. На всем последнем интервале $(\tau - \pi/\omega_1, \tau)$ функция $p(t) = \omega_1$ и на нем

$$y(t) = \dot{y}(t_{n-1})\,\frac{\sin\omega_1(t - t_{n-1})}{\omega_1}.$$

Таким образом, имеем

$$J(\tau) = \left(\frac{\sin^2\omega_1 x}{\omega_1^2} + \frac{\cos^2\omega_1 x}{\omega_2^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \omega_2^{n-1}\frac{1}{\omega_1},$$

где x определяется равенством

$$\frac{\tau - \pi\omega_1^{-1}}{n} = x + \frac{1}{\omega_2}\left[\pi - \arctan\left(\frac{\omega_2}{\omega_2}\tan\omega_1 x\right)\right]. \tag{23}$$

2) $\dfrac{n}{2}\pi\left(\dfrac{1}{\omega_1} + \dfrac{1}{\omega_2}\right) \le \tau \le \dfrac{n-1}{2}\pi\left(\dfrac{1}{\omega_1} + \dfrac{1}{\omega_2}\right) + \dfrac{\pi}{\omega_1}.$

Очевидно, что в этом случае экстремум достигается также при кусочно-постоянной функции $p(t)$. Выберем узлы t_k так, чтобы

$$t_{k+1} - t_k = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right); \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Тогда точки переключения на этих интервалах $x_k = t_k + \pi/(2\omega_1)$. На последнем интервале точка переключения получается правее, чем $t_{n-1} + \pi/(2\omega_1)$. Максимум достигается на левой синусоиде и равен

$$J(\tau) = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^{n-1}\frac{1}{\omega_1}.$$

Полученное решение дает экстремум, так как $(\omega_2/\omega_1)^{n-1}\omega_1^{-1}$ есть наибольшее отклонение от нуля с n узлами.

3) $\tau \le \dfrac{n\pi}{2}\left(\dfrac{1}{\omega_1} + \dfrac{1}{\omega_2}\right).$

В этом случае все точки сопряжения x_k в первых $n-1$ интервалах лежат левее, чем $t_{k-1} + \pi/(2\omega_1)$. Если бы в последнем интервале точка переключения x_n была бы правее, чем $t_{n-1} + \pi/(2\omega_1)$, то при сдвиге t_{n-1} вправо последняя точка переключения приблизилась бы к этому узлу. Так как при этом $|\dot{y}(t_{n-1})|$ увеличился бы, то увеличился бы и $\max|y(t)|$. Таким образом, у экстремальной функции точка x_n не может лежать правее точки $t_{n-1} + \pi/(2\omega_1)$ и $\max|y(t)|$ достигается на второй синусоиде в последнем интервале. В окрестности точки максимума имеем

$$y = \pm A\sin\omega_2(t - \tau); \qquad A = \max_{t_{n-1} \le t \le \tau}|y(t)| \ \text{ и } \ A = \frac{1}{\omega_2}|\dot{y}(t_n)|.$$

Таким образом, наибольшее отклонение имеет функция, которая дает наибольшее значение величины $|\dot{y}(\tau)|$, т. е. та, которая решает третью экстремальную задачу. Значит, функция $p(t)$ периодическая на $(0, \tau)$ и

$$J(\tau) = \left\{\frac{\sin^2 \omega_1 x}{\omega_1^2} + \frac{\cos^2 \omega_1 x}{\omega_2^2}\right\}\omega_2^{n-1},$$

где x определяется равенством (23).

3. *Оценка n-й собственной функции.* Дана краевая задача

$$\begin{gathered} \ddot{y} + \lambda^2 p(t) y = 0, \\ y(0) = y(1) = 0, \quad 0 < \omega_1^2 \le p(t) \le \omega_2^2. \end{gathered} \tag{24}$$

Нужно оценить максимум модуля n-й собственной функции $\varphi_n(t)$ при нормировке $\dot{\varphi}_n(0) = 1$.

Эта задача сводится к рассмотренной нами в п. 2.

Пусть λ_n — собственное значение. Обозначим $z(t) = y(t/\lambda_n)$ и $p_n(t) = p(t/\lambda_n)$. Тогда при $\lambda = \lambda_n$ уравнение (24) запишется в виде

$$\ddot{z}(t) + p_n(t) z(t) = 0,$$

$$z(0) = z(\lambda_n) = 0, \quad \dot{z}(0) = (1/\lambda_n), \quad 0 < \omega_1^2 \le p_n(t) \le \omega_2^2$$

и будем иметь

$$\max_{0 \le t \le 1} |\varphi_n(t)| = \max_{0 \le t \le \lambda_n} |z(t)|.$$

Так как фундаментальная функция с номером n должна иметь точно n узлов, то в качестве λ_n можно взять любое число, удовлетворяющее неравенствам

$$\frac{n\pi}{\omega_2} \le \lambda_n \le \frac{n\pi}{\omega_1}.$$

После выбора λ_n можно выбрать $p_n(t)$ так, чтобы функция $u_n(t) = \lambda_n z(t)$ имела между 0 и λ_n точно $n-1$ узел и имела бы наибольшее отклонение от нуля среди всех таких функций на интервале $(0, \lambda_n)$. Функция $y(t) = z(\lambda_n t)$ будет иметь при этом наибольшее отклонение от нуля из всех n собственных функций, соответствующих собственному значению λ_n и удовлетворяющих условию $\dot{y}(0) = 1$. Это наибольшее отклонение равно

$$K(\lambda_n) = \frac{1}{\lambda_n} \max_{0 \le t \le \lambda_n} u_n(t) = \frac{J(\lambda_n)}{\lambda_n}.$$

Теперь следует найти такое λ_n, при котором $K(\lambda_n)$ принимает наибольшее значение. Это наибольшее значение будет максимумом отклонения от нуля n-й собственной функции.

Поскольку отклонение от нуля функции $u_n(t)$ на интервале $(0, \lambda_n)$ принимает наибольшее значение при

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{2}\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right),$$

то бóльшие значения λ_n не нужно рассматривать. При

$$\lambda_n \le \frac{\pi n}{2}\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right)$$

будем иметь

$$\max_{0 \le t \le \lambda_n} |u_n(t)| = J(\lambda_n) = \left(\frac{\sin^2 \omega_1 x}{\omega_1^2} + \frac{\cos^2 \omega_1 x}{\omega_2^2}\right)^{n/2} \omega_2^{n-1}.$$

Величина x определяется из уравнения

$$\frac{\lambda_n}{n} = x + \frac{1}{\omega_2}\left[\pi - \arctan\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\tan\omega_1 x\right)\right]. \tag{25}$$

Подставляя найденное значение $J(\lambda_n)$ в $K(\lambda_n)$ и приравнивая нулю производную $K'(\lambda_n)$, получаем

$$\lambda_n \omega_1 = \tan\omega_1 x. \tag{26}$$

Подставляя далее (26) в $K(\lambda_n)$, находим

$$K_n = \max K(\lambda_n) = \frac{1}{\lambda_n \omega_2}\left(\frac{1 + \omega_2^2 \lambda_n^2}{1 + \omega_1^2 \lambda_n^2}\right)^{n/2}$$

Для получения точного значения λ_n нужно решить систему уравнений (25) и (26).

Заметим, что, как видно из (26), при $\lambda_n \to \infty$ будем иметь

$$x \to \frac{\pi}{2\omega_1} \quad \text{и} \quad \frac{\lambda_n}{n} \to \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right)$$

и получим асимптотическую формулу

$$\log K_n = n \log\frac{\omega_2}{\omega_1} - \log n - \log\left\{\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right)\omega_2\right\} + o(1).$$

4. Рассмотрим особый случай $\omega_1 = 0$, т. е. задачу об оценке решения

$$\ddot{y} + p(t)y = 0 \quad \text{при} \quad 0 \le p(t) \le \omega^2; \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1. \tag{27}$$

Если $y \ge 0$, т. е. решение не имеет узлов, то наибольшее решение получается при $p(t) \equiv 0$, т. е. $y(t) = t$.

Действительно, если в этом случае $p(t) \not\equiv 0$, то кривая $y = y(t)$ — вогнутая в сторону оси t, поэтому $y(t) \le t$, и начиная с некоторого места справедливо строгое неравенство.

Пусть t_1 — первый узел решения (27). Тогда, повторяя предыдущие рассуждения, основанные на лемме 1, получаем, что экстремальное решение на интервале $(0, t_1)$ состоит из двух дуг

$$Y = t \qquad \text{при} \quad 0 \le t \le t_1' < t_1,$$

$$Y = \frac{\beta_1}{\omega}\sin\omega(t_1 - t) \qquad \text{при} \quad t_1' < t \le t_1.$$

Любая другая функция из $K(0, \omega)$ с узлом в точке t_1 удовлетворяет неравенству $|y(t)| \le Y(t)$ на отрезке $[0, t_\Gamma]$. При этом постоянные β_1 и t_1' определяются из системы уравнений

$$\beta_1 \sin\omega(t_1 - t_1') = \omega t_1'; \quad -\beta_1 \cos\omega(t_1 - t_1') = 1.$$

Имеем $\tan\omega(t_1 - t_1') = -\omega t_1'$, или

$$t_1 = t_1' - \omega^{-1}\arctan\omega t_1', \qquad \beta_1^2 = 1 + (\omega t_1')^2. \tag{28}$$

Из первого уравнения (28) следует, что t_1 — возрастающая функция от t_1' и $t_1 - t_1' \searrow \pi/(2\omega)$ при $t_1' \nearrow +\infty$. Очевидно, по заданному первому узлу $t_1 \geq \pi/\omega$ можно найти и построить на отрезке $[0, t_1]$ экстремальное решение. Значение модуля производной $|\dot{Y}(t_1)|$ очевидно, наибольшее в этом классе и $|\dot{Y}(t_1)|^2 = \beta_1^2 = 1 + (\omega t_1')^2$, где t_1' определяется из уравнения (28).

Любая система точек $\pi/\omega \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ является, очевидно, системой узлов решения из $K(0, \omega)$ при условии $t_k - t_{k-1} \geq \pi/\omega$; $k = 1, 2, \ldots, n$. Строя соответствующее экстремальное решение в классе $T(0, \omega)$ на каждом интервале (t_{k-1}, t_k), получаем

$$\max|\dot{y}(t_n)| = \prod_{k=1}^{n} \{1 + (\omega\tau_k)^2\}, \tag{29}$$

где $y \in K(0, \omega)$ и имеет узлы в точках t_k, а τ_k — расстояние от t_{k-1} до точки переключения t_k'.

Покажем, что если зафиксировать последний узел t_n, а остальные выбирать произвольно, то максимум $|\dot{y}(t_n)|$ достигается при равенстве длин всех интервалов между соседними узлами. Для этого зафиксируем все узлы, кроме t_k. Тогда все множители в (29) сохранятся, за исключением двух: интервалам (t_{k-1}, t_k) и (t_k, t_{k+1}) отвечает произведение двух множителей

$$P_k = \{1 + (\omega\tau_k)^2\}\{1 + (\omega\tau_{k+1})^2\}.$$

Определим, при каком положении точек t_k величина P_k достигает максимума. Имеем

$$\frac{d\log P_k}{dt_k} = \frac{2\omega^2\tau_k}{1 + (\omega\tau_k)^2}\frac{d\tau_k}{dt_k} + \frac{2\omega^2\tau_{k+1}}{1 + (\omega\tau_{k+1})^2}\frac{d\tau_{k+1}}{dt_k} = 0. \tag{30}$$

Из (28) получаем $t_j - t_{j-1} = \tau_j\,\omega^{-1}\arctan\omega\tau_j$, $j = k, k+1$, откуда

$$dt_k = \frac{\omega^2\tau_k^2}{1 + (\omega\tau_k)^2}\,d\tau_k = -\frac{\omega^2\tau_{k+1}^2}{1 + (\omega\tau_{k+1})^2}\,d\tau_{k+1}.$$

Подставляя это выражение в (30), находим $\tau_k = \tau_{k+1}$ и снова в силу (28) $t_{k+1} - t_k = t_k - t_{k-1}$.

Отсюда получаем, что если какие-нибудь соседние интервалы не равны, то, сдвигая один узел, можно увеличить P_k. T-решения образуют компактные множества, максимум достигается в силу указанного при равных расстояниях между соседними узлами. Итак, для того чтобы получить $\max|\dot{y}(T)|$ при заданном $T > 0$, $y \in K(0, \omega)$ и $y(T) = 0$, следует определить максимум при целых n величины

$$Q_n = \{1 + (\hat{\tau}\omega)^2\}^n,$$

где число $\hat{\tau}$ определяется из уравнения

$$Tn^{-1} = \hat{\tau} + \omega\arctan(\hat{\tau}\omega), \tag{31}$$

правая часть которого есть монотонная функция от $\hat{\tau}$. Итак, мы получили следующую теорему.

Теорема 5. *При выбранных нами обозначениях* T *и* $\hat{\tau}$ *справедливо равенство*

$$\max\{\log|\dot{y}(T)|:\ y\in K(0,\omega),\ y(T)=0\} = \frac{1}{2}\max_{\tau}\left\{T\frac{\log\left((1+(\tau\omega)^2\right)}{\tau+\omega^{-1}\arctan(\tau\omega)}\right\},$$

причем максимум в правой части берется на множестве тех значений τ, *при которых множитель* $T\{\tau+\omega^{-1}\arctan(\tau\omega)\}^{-1}$ *принимает целые значения и* $\tau\in[b_T, T\omega/\pi]$, *где* b_T — *корень уравнения* (31) *при* $n=1$.

Отметим, что экстремальное значение производной достигается, как и в прежнем случае, на периодической функции $p(T)$ на отрезке $[0,T]$. Если продолжить ее периодически на всю числовую ось, то решение, дающее экстремум $|\dot{y}(T)|$, является решением Флоке при периоде T, а величина $\dot{y}(T)$ — мультипликатор.

Так же, как и в предыдущем случае, можно получить оценку n-го собственного значения, собственной функции и мультипликатора.

Тем же методом можно рассмотреть случай $-\omega_1^2\le p(t)\le\omega_2^2$ при $|\omega_1|<<|\omega_2|$, но мы не будем на этом останавливаться.

III. Оценка решений уравнения струны. Известно*, что уравнение Штурма – Лиувилля

$$\frac{d^2u}{dx^2}-q(x)u+\lambda^2u=0,\qquad q(x)\in L(0,S),$$

приводится специальной подстановкой к уравнению вида (1), т.е.

$$\ddot{y}+\lambda^2p(t)y=0,\qquad p\in L(0,T),\tag{32}$$

в котором $p(t)>0$ на $(0,T)$, причем если $q(x)$ периодическая, то и $p(x)$ — периодическая функция с другим (вообще говоря) периодом.

Оценка решения такого уравнения получена в п. I, но без ограничения $p(x)>0$. Таким образом, для решения уравнения (32) при условиях $y(0,\lambda)=0$, $\dot{y}(0,\lambda)=1$ верны оценки, которые получены в п. I, но, как мы убедимся, при $p(t)>0$ и вещественном λ эти оценки уже не являются точными. В данном пункте получим для решений уравнения (32) точные оценки. При этом мы пользуемся методом, который применяли в п. II.

Уравнение (32) можно записать в виде интегрального уравнения

$$y(t)+\lambda^2\int_0^t(t-\tau)p(\tau)y(\tau)\,d\tau = at+b.$$

в котором a и b определяются начальными условиями. Будем рассматривать более общее уравнение

$$y(t)=at+b-\lambda^2\int_0^t(t-\tau)\,y(\tau)\,d\sigma(\tau),\tag{33}$$

где $\sigma(t)$ — неубывающая функция на $[0,T]$. Для определенности будем считать ее нормированной в точках разрыва так: $\sigma(t+0)=\sigma(t)$.

* Доказательство этого утверждения содержится в статье М. Г. Крейна и К. Р. Коваленко [7].

Это уравнение ввел М.Г. Крейн, назвал его уравнением струны и изучил в большом цикле работ*. Струна называется периодической с периодом T (T-периодическая), если при любом $t \geq 0$ справедливо равенство $\sigma(t+T)-\sigma(t) \equiv \equiv \mathrm{const}$.

Конечно, периодической струне, так же, как уравнению (1), отвечают решения Флоке, мультипликаторы $\rho(\lambda)$ и целая функция $A(\lambda) = (1/2)(\rho(\lambda)+\rho^{-1}(\lambda))$, о которой шла речь в п. I.

В первых двух подпунктах данного пункта устанавливается точная (в известном смысле) оценка мультипликаторов уравнения (33), а значит, и (1). В п. 1 предполагается, что λ — вещественное число, а в п. 2 параметр λ — произвольное комплексное число. Величина мультипликатора характеризует рост общего решения уравнения струны.

Метод, применяемый в подпункте 1, является развитием одного геометрического приема, примененного Н. Е. Жуковским [9] в близком вопросе.

1. При начальных условиях $y(0) = 0$, $\dot{y}_+(0) = 1$ уравнение (33) эквивалентно уравнению

$$\dot{y}(t) - 1 + \lambda^2 \int_0^t y(\tau)\, d\sigma(\tau) = 0, \tag{34}$$

где $\sigma(t)$ — то же, что и в уравнении (33). Вместо условия $p(t) \leq \omega^2 < \infty$, использованного в п. II, потребуем, чтобы при некоторых постоянных $P > 0$, $T > 0$ выполнялось неравенство

$$T\{\sigma(t+T) - \sigma(t)\} \leq P^2. \tag{35}$$

Обозначим $K_n(0,T)$ класс всех непрерывных функций, удовлетворяющих уравнению (33), условию (35), $y(0) = y(T) = 0$, $\dot{y}_+(0) = 1$ и имеющих точно $n-1$ узел внутри интервала $(0,T)$.

Задача на экстремум состоит в том, чтобы найти функцию из класса K_n, т. е. имеющую точно $n-1$ узел в интервале $(0,T)$, у которой величина $|\dot{y}_-(T)|$ достигает наибольшего значения во всем классе, и определить соответствующую функцию $\sigma(t)$.

а. Решение экстремальной задачи в классе K_1. Функция $y(t)$ из этого класса не обращается в нуль внутри интервала $(0,T)$, положительна, и так как $\dot{y}(t)$ убывает, то $y(t)$ — вогнутая функция. Из уравнения (34) при $\lambda = 1$ получаем неравенство

$$1 - \dot{y}_-(T) = \int_0^T y(t)\, d\sigma(t) \leq \max y(t) \frac{P^2}{T}. \tag{36}$$

Рассмотрим совокупность функций $u_x(t)$, графиками которых являются непрерывные ломаные, состоящие из двух звеньев:

$$u_x(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t \leq x; \\ \dfrac{x(T-t)}{T-x} & \text{при } x \leq t \leq T. \end{cases}$$

Очевидно, что $\max u_x(t) = x$; $\dot{u}_x(T) = -x/(T-x)$, и для тех функций $u_x(t)$, которые принадлежат K_1, неравенство (36) примет вид

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{T-x} \leq \frac{P^2}{T}. \tag{37}$$

---

* Эти работы были опубликованы в 50-х годах. Их изложение имеется в [8, 15].

Условие (37) является и достаточным для того, чтобы функция $u_x(t)$ принадлежала классу K_1, так как при выполнении этого условия функция $u_x(t)$ есть решение уравнения (34) при $\sigma(t)$, равной:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \le t \le x; \\ \dfrac{T}{x(T-x)} & \text{при} \quad x \le t \le T. \end{cases}$$

Введем обозначение $C(x) = x^{-1} + (T-x)^{-1}$. Если при каком-то x_0 выполняется неравенство $C(x_0) < P^2/T$, то очевидно есть два значения параметра $x = \alpha$ и $x = \beta$ $(\alpha < x_0 < \beta)$ такие, что $C(\alpha) = C(\beta) = P^2/T$, и все значения x, для которых $C(x) \le P^2/T$, удовлетворяют неравенству $\alpha \le x \le \beta$. Рассмотрим функцию $\dot{u}_\beta(t)$. Для нее справедливо равенство

$$1 - \dot{u}_\beta(T) = \max_{t\in[0,T]} u_\beta(t)\frac{P^2}{T}$$

и в силу выбора параметра β выполняется неравенство

$$|\dot{u}_x(T)| \le |\dot{u}_\beta(T)|.$$

На этой функции будет достигаться $\max|\dot{y}(T)|$ во всем классе K_1, так как для произвольной функции $y(t) \in K_1$ можно построить функцию $u_x(t)$, имеющую с ней одинаковую производную на правом конце:

$$u_x(t) = \begin{cases} t & \text{при} \quad 0 \le t \le x; \\ -\dot{y}_-(T)(T-t) & \text{при} \quad x < t \le T. \end{cases}$$

Заметим, что максимум достигается только на функции $u_\beta(t)$. Действительно, предположим, что есть функция $\overline{y}(t) \in K_1$, на которой достигается этот максимум, отличная от вида $u_x(t)$. Построим для нее функцию $u_{\overline{x}}(t)$. Из вогнутости функции $\overline{y}(t)$ и равенств $\dot{y}_+(0) = \dot{y}_{\overline{x}}(0) = 1$, $\dot{u}_{\overline{x}}(T) = \dot{\overline{y}}_-(T)$ имеем $\max u_{\overline{x}}(t) > \max \overline{y}(t)$. Отсюда следует, что для $y = u_{\overline{x}}(t)$ неравенство (36) строгое, и в силу неравенства (37) получим $\overline{x}^{-1} + (T-\overline{x})^{-1} < P^2/T$, и поэтому $\dot{u}_{\overline{x}}(t) < \dot{u}_\beta(t)$, а это противоречит тому, что $\dot{u}_{\overline{x}}(T)$ — максимальное.

Решению, на котором достигается этот экстремум, соответствует кусочно-постоянная функция $\sigma(t)$ с единственным скачком на $(0,T)$ в точке $t = \beta$.

Из этих рассуждений ясно, что на функции $u_\beta(t)$ достигается также $\max\limits_{y\in K_1}\max\limits_{0\le t\le T} y(t)$. Для величины β имеем уравнение

$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{T-\beta} = \frac{P^2}{T},$$

из которого

$$\beta = T\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - P^{-2}}\right)$$

и, следовательно,

$$\max|\dot{y}_-(T)| = \frac{P + \sqrt{P^2-4}}{P - \sqrt{P^2-4}}.$$

Слева — вещественная величина, и мы получили, таким образом, следующее: для того чтобы класс K_1 не был пуст, необходимым и достаточным является условие $P^2 \geq 4$.

Если струна T периодическая, то из $y(0) = y(T) = 0$ следует, что $y(t)$ — решение Флоке с мультипликатором $\dot{y}_+(T)$. Если $P^2 < 4$, то по доказанному мультипликаторы не вещественны, а значит, верно $|\rho_1| = |\rho_2| = 1$ и $\rho_1 \neq \rho_2$. В этом случае из (2) следует, что общее решение ограничено всюду на $\mathbb{R}$.

Мы получили, таким образом, следующую теорему Н. Е. Жуковского и А. Н. Ляпунова [4, 9]:

Если в уравнении (32) λ — *вещественно и* $0 < |\lambda| < 2P^{-1}$, *то общее решение* (32) *ограничено, т. е. соответствующий интервал входит в зону устойчивости любого уравнения с данным* P.

Заметим, что если λ — собственное значение краевой задачи с нулевыми граничными условиями $y(0) = y(T) = 0$, то соответствующая собственная функция есть решение Флоке с вещественным мультипликатором, так как, по доказанному, при $|\lambda| < 2P^{-1}$ такого решения нет, то первое собственное значение удовлетворяет условию $|\lambda_1| \geq 2P^{-1}$. Это есть, собственно, другая формулировка теоремы Н. Е. Жуковского и А. М. Ляпунова.

b. *Решение задачи на экстремум в классе* K_2. Введем понятие „вес интервала". *Весом данного интервала* (α, β) *будем называть величину* $(\beta - \alpha)[\sigma(\beta) - \sigma(\alpha)]$. Каждая функция на K_2 имеет внутри интервала $[0, T]$ один узел. Возьмем произвольную точку $t_1 : 0 < t_1 < T$, веса интервалов $(0, t_1)$ и (t_1, T) обозначим соответственно P_1 и P_2. Через $J[t_1, \sigma(t_1)]$ обозначим $\max|\dot{y}(T)|$ по всем функциям из K_2, имеющим узел в точке t_1. Перенеся начало координат в узел t_1 и положив $y_1(t) = Cy(t + t_1)$, где $C = \{\dot{y}(t)\}^{-1}$, получим $y_1(0) = y_1(T - t_1) = 0$, $\dot{y}_1(0) = 1$, и, применив к $y_1(t)$, $0 \leq t \leq T - t_1$, прежнее рассуждение, будем иметь

$$\max|\dot{y}_1(T - t_1)| = \frac{P_2 + \sqrt{P_2^2 - 4}}{P_2 - \sqrt{P_2^2 - 4}}.$$

Поскольку для рассматриваемых функций

$$|\dot{y}(T)| = |\dot{y}(t_1)||\dot{y}_1(T - t_1)|,$$

то

$$J[t_1, \sigma(t_1)] = \frac{P_1 + \sqrt{P_1^2 - 4}}{P_1 - \sqrt{P_1^2 - 4}} \cdot \frac{P_2 + \sqrt{P_2^2 - 4}}{P_2 - \sqrt{P_2^2 - 4}}.$$

Докажем теперь, что максимум функционала $J[t_1, \sigma(t_1)]$ на K_2 будет достигаться на функции $y(t)$ при $t_1 = T/2$ и $P_1 = P_2$ (т. е. $\sigma(T/2) = \sigma(T)/2$).

Обозначим $\sigma(t_1) = \sigma_1$, $\sigma(T) - \sigma(t_1) = \sigma_2$, $T - t_1 = t_2$. Тогда

$$\log J[t_1, \sigma_1] = \log \frac{P_1 + \sqrt{P_1^2 - 4}}{P_1 - \sqrt{P_1^2 - 4}} + \log \frac{P_2 + \sqrt{P_2^2 - 4}}{P_2 - \sqrt{P_2^2 - 4}}.$$

Ищем максимум $\log J[t_1, \sigma_1]$ при $t_1 + t_2 = T$, $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma(T)$. Приравнивая нулю все частные производные от функции Лагранжа

$$Z = \log J[t_1, \sigma_1] - \mu(t_1 + t_2) - \nu(\sigma_1 + \sigma_2),$$

получаем $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma(T)/2$ и $t_1 = t_2 = T/2$. Обозначая J в этой точке через J_0, имеем

$$\log J_0 = 2\log\frac{P+\sqrt{P^2-16}}{P-\sqrt{P^2-16}}.$$

Отсюда, в частности, следует, что если класс K_2 не пуст, то должно выполняться неравенство $P \ge 4$. Покажем, что $J_0 \ge J$ при всех допустимых значениях σ_i и t_i.

Действительно, поскольку J вещественно, то $\sigma_1 t_1 \ge 4$ и $\sigma_2 t_2 \ge 4$, и, значит, все точки (t_1, σ_1) лежат в замкнутой области между двумя гиперболами: $t_1\sigma_1 = 4$ и $(T-t_1)[\sigma(T)-\sigma(t_1)] = 4$. Исследуем функцию $\log J$ на границе этой области, причем в силу симметрии достаточно это сделать на какой-либо одной кривой. При $t_1\sigma_1 = 4$ имеем

$$\log J = \log\frac{1+\sqrt{1-4/(\sigma_2 t_2)}}{1-\sqrt{1-4/(\sigma_2 t_2)}}$$

и максимум этой функции достигается при наибольшем значении величины $\sigma_2 t_2 = (T-t_1)[\sigma(T)-\sigma(t_1)] = P^2 - 4Tt_1^{-1} - \sigma(T)\,t_1 + 4$, которое получается при

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{T}{\sigma(T)}}.$$

Отсюда

$$\max_{t_1\sigma_1 = 4} \sigma_2 t_2 = (P-2)^2.$$

Таким образом, на границе области $J \le J_1$, где

$$\log J_1 = \log\frac{1+\sqrt{1-4(P-2)^{-2}}}{1-\sqrt{1-4(P-2)^{-2}}}.$$

Покажем, что $J_1 < J_0$. Положим $P = u$, $u \ge 4$, и запишем

$$\log J_1 = 2\log\{u - 2\sqrt{(u-2)^2-4}\} - 2\log 2,$$

$$\log J_0 = 4\log\{u + \sqrt{u^2-16}\} - 4\log 4.$$

Для функции $L(u) = \log J_0 - \log J_1$ имеем

$$L'(u) = \frac{4}{\sqrt{u^2-16}} - \frac{2}{\sqrt{u^2-4u}} > 0 \quad \text{при} \quad u > 4, \quad L(4) > 0.$$

Значит, $L(u) > 0$ и $J_1 < J_0$. Полученный результат можно сформулировать в более общей форме.

Пусть $\alpha < \beta < \gamma$ — *три последовательных узла решения уравнения* (32), *причем* α, β *и* $\dot y(\alpha)$ *фиксированы, и* P — *вес интервала* (α, β) — *задан. Тогда* $\max|\dot y(\gamma)|$ *достигается при* $\beta = (\alpha+\gamma)/2$ *и равных весах интервалов* (α, β) *и* (β, γ).

В частности, для функций из класса K_2 получаем

$$\max|\dot y(T)| = \left(\frac{P+\sqrt{P^2-16}}{P-\sqrt{P^2-16}}\right)^2.$$

c. *Решение задачи на экстремум при произвольном* n. Рассмотрим задачу на экстремум в классе $K_n(0,T)$ при любом фиксированном n. Покажем, что для существования вещественных решений уравнения (34) в классе K_n должно выполняться неравенство

$$P^2 \geq 4n^2. \tag{38}$$

Пусть $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$ — узлы функции $z(t)$ из K_n. Обозначим через $\dot z(t_k)$ значение производной в узле t_k, предположив, что $\dot z(t_{k-1}) = 1$. Тогда

$$|\dot y(t)| = |\dot z(t_1)\dot z(t_2)\ldots \dot z(t_n)|. \tag{39}$$

Если длины или веса двух рядом стоящих интервалов (t_{j-1}, t_j) и (t_j, t_{j+1}) неодинаковы, то можно, как показано в п. II, увеличить значение произведения $|\dot z(t_j)\dot z(t_{j+1})|$, не меняя при этом остальные множители. Поэтому $\max|\dot y(T)|$ достигается, когда длины интервалов Δt_k равны между собой и массы одинаковы:

$$\Delta t_k = \frac{T}{n}, \qquad P_k^2 = \Delta t_k \frac{\sigma}{n} = \frac{P^2}{n^2}.$$

Для вещественности решения уравнения (33) необходимо, чтобы выполнялось условие $P_k^2 > 4$. Отсюда и получается неравенство (38). Используя результат подпункта **a** и формулу (39), имеем

$$\max_{y\in K_n} |\dot y(T)| = \left(\frac{P+\sqrt{P^2-4n^2}}{P-\sqrt{P^2-4n^2}}\right)^n. \tag{40}$$

Функции $y(t)$, на которой достигается этот максимум, соответствует кусочно-гладкая функция $\sigma(t)$, имеющая n скачков в точках

$$\alpha_k = \frac{T}{n}\left\{k - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{n^2}{P^2}}\right\}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Величина каждого скачка равна $P^2/(nT)$.

По известной теореме об осцилляционных свойствах собственных функций краевой задачи n-я собственная функция относится к классу $K_n(0,T)$ и согласно проведенным рассуждениям справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Собственное значение* λ_n *краевой задачи для уравнения* (34) *при простейших условиях* $y(0) = y(T) = 0$ *удовлетворяет неравенству*

$$\lambda_n \geq 2nP^{-1}. \tag{41}$$

Эту теорему, принадлежащую И. М. Рапопорту [10] (см. также М. Г. Крейн [11]), можно считать обобщением теоремы Н. Е. Жуковского и А. М. Ляпунова, о которой выше шла речь.

d. *Оценка мультипликатора при вещественном значении параметра* λ. Для уравнения (33), решения которого принадлежат K_n, мультипликатор ρ уравнения равен $\dot y(T)$. Из (40) следует неравенство

$$|\rho| \leq \left(\frac{P+\sqrt{P^2-4n^2}}{P-\sqrt{P^2-4n^2}}\right)^n, \tag{42}$$

использовав которое докажем следующую лемму.

Лемма 5. *Мультипликатор* ρ *любого уравнения* (33), *если соответствующее решение этого уравнения принадлежит классу* K_n *при каком-либо* n, *удовлетворяет неравенству*

$$|\rho| \le e^{kP}, \tag{43}$$

где k — *некоторая абсолютная константа, меньшая единицы, явно вычисляемая в ходе доказательства. Причем, если* $kP/(2\sqrt{1+k^2})$ — *целое число, то знак равенства достигается.*

Доказательство. Обозначим правую часть неравенства (42) через $f(n)$, заменим n на ν — непрерывно изменяющееся и будем искать $f(\nu)$. Получим

$$\frac{d\log f(\nu)}{d\nu} = \log\frac{P+\sqrt{P^2-4\nu^2}}{P-\sqrt{P^2-4\nu^2}} - \frac{2P}{\sqrt{P^2-4\nu^2}}.$$

Вводя $\gamma = P^{-1}\sqrt{P^2-4\nu^2}$, получаем для значения γ, при котором достигается экстремум, уравнение

$$\log\frac{1+\gamma}{1-\gamma} - \frac{2}{\gamma} = 0. \tag{44}$$

Когда γ меняется от 0 до 1, левая часть уравнения монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Значит, уравнение имеет единственный корень γ_0. Соответствующее значение $\nu_0 = P\sqrt{1-\gamma_0^2}/2$. Из неравенства (41) следует

$$|\rho| \le \left(\frac{1+\gamma_0}{1-\gamma_0}\right)^{P\sqrt{1-\gamma_0^2}/2}$$

и, поскольку γ_0 — корень уравнения (44), получаем (43) с $k = \sqrt{1-\gamma_0^2}/\gamma_0$. Подсчет дает: $\gamma_0 = 0,833\ldots$, $k = 0,663\ldots$. Если $\nu_0 = kP(1+k^2)^{-1/2}/2$ — целое число, то для мультипликатора, который равен $\max\limits_{y\in K_{\nu_0}} |\dot y(T)|$, знак равенства достигается.

е. *Замечания о мультипликаторах уравнения*

$$\ddot y + p(t)y = 0 \tag{45}$$

при $p(t)$, удовлетворяющем условиям

$$p(t) > 0, \quad p(t)\in L(0,T), \quad \sup T\int_x^{x+T} p(t)\,dt \le p^2. \; . \; . \; . \; . \tag{46}$$

Совокупность решений (45), удовлетворяющих условиям

$$y(0) = y(T) = 0 \tag{47}$$

и имеющих $n-1$ узел, обозначим через $\tilde K_n$. Очевидно, $\tilde K_n \subset K_n$, не совпадает с ним и плотна в нем по метрике $C_1(0,T)$. Для функции $y(t)\in \tilde K_n$ величина $\dot y(T)\,\dot y^{-1}(0)$ является мультипликатором уравнения (45).

Если $y(t)$ — решение Флоке уравнения (45) и $t_0 \ne 0$ — узел этого решения, то, вводя функцию $z = y(t+t_0)$, получаем, что $z(t)$ — решение Флоке уравнения $\ddot z + q(t)z = 0$, в котором $q(t) = p(t+t_0)$; $q(t)$ удовлетворяет условиям

(46). Очевидно, $z(0) = z(T) = 0$. Тогда $\rho = \dot{z}(T)\,\dot{z}^{-1}(0)$, и задача об оценке мультипликатора ρ уравнения (45) сводится к оценке величины $|\dot{y}(T)|$ в объединении классов $\tilde{K}_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Применяя проведенные рассуждения к уравнению (45), получаем следующую теорему.

Теорема 7. *При выполнении условий* (47) *и при вещественном* λ *мультипликаторы уравнения* (45) *удовлетворяют неравенству*

$$|\rho(\lambda)| \le \exp(kP|\lambda|), \quad P^2 = T\int_0^T p(t)\,dt, \quad k = \frac{\sqrt{1-\gamma_0^2}}{\gamma_0}, \tag{48}$$

где γ_0 — *единственный корень уравнения* (44); *причем если* $\nu_0(\lambda) = kP|\lambda|/(2\sqrt{1+k^2})$ — *целое число, то неравенство точное.*

Если $\nu_0(\lambda)$ *не целое, то при* $\varepsilon > 0$, *некотором* N_ε *и* $|\lambda| > N_\varepsilon$ *существует уравнение вида* (45), *для мультипликатора которого справедливо неравенство*

$$|\rho(\lambda)| > (1-\varepsilon)e^{kP|\lambda|}.$$

Доказательство. Действительно, если рассмотреть вместо уравнения (45) уравнение (34) и учесть предыдущее замечание, то неравенство (43) можно переписать в виде

$$|\rho(\lambda)| \le e^{kP|\lambda|}.$$

Если $kP|\lambda|/(2\sqrt{1+k^2})$ — целое число n, то эта оценка точная, так как она достигается на некотором мультипликаторе уравнения (33) (заменяя $p(t)$ на $\lambda^2 p(t)$ и P на $P|\lambda|$), который с любой степенью точности аппроксимируется мультипликаторами уравнения (45).

Если же $\nu_0(\lambda)$ не целое, то наибольший мультипликатор в классе уравнений (45) получается при подстановке в функцию $f(\nu)$, введенную при доказательстве предыдущей леммы, вместо ν одного из двух целых чисел, между которыми заключено число $\nu_0(\lambda)$. Подставляя $\nu = \frac{1}{2}P|\lambda|k/\sqrt{1+k^2} + \chi_\lambda$, где $|\chi_\lambda| < 1$, в $f(\nu)$, после преобразований получаем асимптотическое равенство (при $\lambda \to \infty$)

$$\log|\rho(\lambda)| = kP|\lambda| + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right).$$

Итак, любому $\varepsilon > 0$ отвечает такое N_ε, что для произвольного вещественного λ, если только $|\lambda| > N_\varepsilon$, можно подобрать функцию $\sigma(t)$, а затем и $p(t)$, так что больший мультипликатор уравнения (45) удовлетворяет неравенству

$$|\rho(\lambda)| > e^{kP|\lambda|}(1-\varepsilon).$$

Теорема доказана.

2. *Оценка мультипликатора* $\rho(\lambda)$ *при* $\lambda \in \mathbb{C}$. В п. I установлено, что мультипликаторы $\rho(\lambda)$ уравнения (1) при выполнении условий на комплекснозначную функцию $p(t)$: $p(t) \in L(0, T)$ и $p(t+T) = p(t)$, и произвольном комплексном λ удовлетворяют неравенству

$$|\rho(\lambda)| \le \exp P|\lambda|, \tag{49}$$

причем знак равенства достигается при $p(t) \equiv \text{const}$ и $\lambda^2 p(t) \leq 0$. В теореме 3 установлена более жесткая оценка при $p > 0$ и вещественном значении λ. Сопоставляя эти две оценки, можно при $p(t) > 0$ получить более жесткую, чем (49), оценку $\rho(\lambda)$ во всей комплексной плоскости. Обозначим через $K(\varphi)$ опорную функцию выпуклой области $|z| \leq 1$; $|\Re z| \leq k$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 8. *При* $p(t) > 0$, $p(t) \in L(0, T)$, $p(t+T) = p(t)$ *мультипликатор уравнения* (45) *удовлетворяет во всей комплексной плоскости неравенству*

$$|\rho(\lambda)| \leq \exp\{K(\varphi) P |\lambda|\}, \tag{50}$$

где $\varphi = \arg \lambda$.

Доказательство. Из определения следует, что $A(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа и $\rho(\lambda) = A(\lambda) + \sqrt{A^2(\lambda) - 1}$ — аналитическая функция на двулистной римановой поверхности с точками ветвления в корнях уравнения *

$$A^2(\lambda) = 1. \tag{51}$$

Каждая точка λ, отличная от этих корней, имеет окрестность, в которой оба мультипликатора отличны от единицы и являются аналитическими функциями. Функция

$$u(\lambda) = \max\{\log|\rho_1(\lambda)|, \log|\rho_2(\lambda)|\}$$

субгармоническая всюду, кроме, быть может, корней уравнения (51), в которых $u(\lambda_j) = 0$. В окрестности V_j такой точки λ_j функция $\rho(\lambda)$ имеет разложение

$$\rho(\lambda) = \pm 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} (\lambda - \lambda_j)^{k/2},$$

и, выбрав определенное значение логарифма в V_j, будем иметь

$$\log \rho(\lambda) = m\pi i + \sum_{k=1}^{\infty} d_{jk} (\lambda - \lambda_j)^{k/2}.$$

Интегрируя это равенство по окружности (C_δ): $|\lambda - \lambda_j| = \delta$, обходя ее дважды, при достаточно малом $\delta > 0$ получаем

$$4m\pi^2 i = \int\limits_{(2C_\delta)} \log \rho(\lambda)\, d\varphi,$$

откуда

$$0 = \int\limits_{(2C_\delta)} \log|\rho(\lambda)|\, d\varphi,$$

и поскольку $u(\lambda_j) = 0$, то и в этих точках

$$u(\lambda_j) \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(\lambda_j + \delta e^{i\varphi})\, d\varphi.$$

Из этого неравенства следует, что $u(\lambda)$ субгармоническая во всей плоскости. Из оценки (49) при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ вытекает

* Квадраты этих корней — собственные числа периодической или антипериодической краевой задачи и поэтому положительны. Они являются границами зон устойчивости.

$$u(\lambda) \le P|\lambda|,$$

а из оценки (48) при вещественном λ

$$u(\lambda) \le kP|\lambda|.$$

Пусть $\alpha = \arccos k$. Тогда опорная функция $K(\varphi) = 1$ при $\alpha \le |\varphi| \le \pi - \alpha$ и внутри этих углов неравенство (49) совпадает с неравенством (50). Таким образом, достаточно рассмотреть углы $|\varphi| \le \alpha$ и $|\pi - \varphi| \le \alpha$. Пусть $0 \le \varphi \le \alpha$.

Функция

$$v(\lambda) = u(\lambda) - P\,\Re\,(e^{-i\alpha}\lambda)$$

субгармоническая во всей плоскости. На сторонах угла $0 \le \varphi \le \alpha$ имеем

$$v(r) \le 0, \quad v(re^{i\alpha}) \le 0.$$

Так как внутри этого угла $v(\lambda) < P|\lambda|$, то по теореме Фрагмена и Линделефа получаем

$$v(re^{i\varphi}) \le 0, \quad 0 \le \varphi \le \alpha.$$

Отсюда

$$u(re^{i\varphi}) \le P|\lambda|\cos(\varphi - \alpha) = K(\varphi)P|\lambda|.$$

Очевидно, точно так же получается оценка для $u(\lambda)$ в остальных углах.

Из неравенства

$$\log|\rho(\lambda)| \le u(\lambda)$$

следует неравенство (50). Эта оценка точная на мнимой и вещественной осях.

3. *Непериодический случай.* При периодическом $p(t)$ наибольший мультипликатор $\rho(\lambda)$ определяет рост общего решения $y(t, \lambda)$ уравнения (1). Действительно,

$$y(t, \lambda) = c_1 u_1(t, \lambda) + c_2 u_2(t, \lambda),$$

где*

$$u_1(t+1, \lambda) = \rho(\lambda) u_1(t, \lambda), \quad u_2(t+1, \lambda) = \rho^{-1}(\lambda) u_2(t, \lambda).$$

При $c_1 \ne 0$ справедливо равенство**

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{\log|y(t, \lambda)|}{t} = \log\rho(\lambda). \tag{52}$$

При $c_1 = 0$ этот верхний предел равен $-\log|\rho(\lambda)| \le 0$. Поэтому данная в предыдущих подпунктах оценка мультипликатора эквивалентна оценке левой части (52).

Дадим точную оценку верхнего предела для функции $y(t, \lambda)$, являющейся решением уравнения (1), не предполагая периодичности функции $p(t)$, а требуя лишь, чтобы функция $p(t)$ была локально суммируема и удовлетворяла условиям

$$p(t) \ge 0, \quad \int_0^t p(t)\,dt \le P^2 t, \quad t > 0, \tag{53}$$

---

* Считаем $T = 1$ и $|\rho(\lambda)| \ne 1$.

** Если потребовать, чтобы точка t находилась вне некоторой δ-окрестности множества узлов решения $y_1(t, \lambda)$, то верхний предел может быть заменен пределом.

где P фиксировано.

1. Сначала рассмотрим некоторую задачу на экстремум. Пусть $\tau > 0$ — произвольная точка на $\mathbb{R}_+$ и $H[P,\tau]$ — класс функций, удовлетворяющих следующим условиям:

а) каждая функция класса имеет во всех точках интервала $[0,\tau]$ правую и левую производную;

б) все функции класса удовлетворяют начальным условиям $y(0)=0$, $\dot{y}_+(0) = 1$;

в) каждой функции класса соответствует такая неубывающая функция $\sigma(t)$, что

$$\sigma(\tau) - \sigma(0) \le P^2\tau \tag{54}$$

и

$$\dot{y}_+(t) - 1 + \lambda^2 \int_0^t y(s)\,d\sigma(s) = 0, \quad \lambda^2 = \mathbb{R}_+. \tag{55}$$

Требуется найти функцию $y(t) \in H[P,\tau]$, для которой значение $|y(\tau)|$ будет наибольшим во всем классе.

Докажем, что задача имеет решение. Для этого установим, что функции класса $H[P,\tau]$ ограничены в совокупности и равностепенно непрерывны на $[0,\tau]$. Интегрируя (55) от нуля до t, получаем, что функции $y(t)$ из класса $H[P,\tau]$ удовлетворяют уравнению

$$y(t) = t - \lambda^2 \int_0^t (t-s)\,y(s)\,d\sigma(s), \tag{56}$$

эквивалентному (55) при начальных условиях $y(0) = 0$, $\dot{y}_+(0) = 1$. Сравнивая решения (56) с решением уравнения

$$Y(t) = t + |\lambda|^2 \int_0^t (t-s)\,Y(s)\,d\sigma(s), \tag{57}$$

с помощью итераций устанавливаем, что

$$|y(t)| \le Y(t).$$

Выбрав для $Y(t)$ в качестве первого приближения $Y_0(t) = t$, получим, что все итерации $Y_n(t)$ — положительные, монотонно растущие функции. Дифференцируя уравнение (57), получаем для $\dot{Y}_+(t)$ оценку

$$\dot{Y}_+(t) \le 1 + |\lambda|^2\, Y(t)\,[\sigma(t)-\sigma(0)] \le 1 + |\lambda|^2 P^2\tau\, Y(t).$$

Интегрируя это соотношение, находим

$$Y(t) \le t + |\lambda|^2 P^2\tau \int_0^t Y(s)\,ds. \tag{58}$$

Функция

$$z(t) = \frac{1}{|\lambda|^2 P^2\tau}\left(e^{|\lambda|^2 P^2 \tau t} - 1\right)$$

есть решение уравнения

$$z(t) = t + |\lambda|^2 P^2\tau \int_0^t z(s)\,ds. \tag{59}$$

Для функции $Y(t)$, а значит, и для произвольной функции $y(t)$, принадлежащей классу $H\,[P,\tau]$, справедливо неравенство*

$$|y(t)| \le \frac{1}{|\lambda|^2 P^2 \tau}\left(e^{|\lambda|^2 P^2 \tau t} - 1\right). \tag{60}$$

Из (54), (55) и (60) следует

$$|\dot{y}_+(t)| \le \exp(|\lambda|^2 P^2 \tau^2), \quad y \in H\,[P,\tau], \quad 0 \le t \le \tau.$$

По теореме Арцела семейство $H\,[P,\tau]$ компактно относительно равномерной сходимости. Из последовательности $\{y_n(t)\}$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} y_n(\tau) = \sup_{y \in H[P,\tau]} |y(\tau)|,$$

выделим подпоследовательность $\{y_n\}$, равномерно сходящуюся к некоторой функции $y_0(t)$. Из соответствующей последовательности $\sigma_k(t)$ можно выделить по теореме Хелли сходящуюся в основном подпоследовательность $\{\sigma_j(t)\}$. Для членов соответствующей подпоследовательности $\{\sigma_j(t)\}$ имеем

$$y_j(t) = t - \lambda^2 \int_0^t (t-s)\, y_j(s)\, d\sigma_j(s).$$

Переходя к пределу при $j \to \infty$, получаем

$$y_0(t) = t - \lambda^2 \int_0^t (t-s)\, y_0(s)\, d\sigma_0(s),$$

а после дифференцирования имеем

$$\dot{y}_0(t) = 1 - \lambda^2 \int_0^t y_0(s)\, d\sigma_0(s).$$

Таким образом, $y_0(t) \in H\,[P,\tau]$ и, значит,

$$|y_0(\tau)| = \max_{y \in H[P,\tau]} |y(\tau)|.$$

Перейдем к оценке и построению этой экстремальной функции. Пусть $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = T < \tau$ — узлы функции $y_0(t)$. Все функции класса $H[P,\tau]$ обращены вогнутостью в сторону оси абсцисс. Поэтому $y_0(t)$ на интервале (T,τ) должна быть линейной и, значит, приращение $\sigma_0(t)$ на этом интервале равно нулю. Действительно, если бы $y_0(t)$ не была линейной на (T,τ), то, заменив ее на этом интервале линейной и не изменив на других интервалах, мы увеличим $|y_0(\tau)|$ и одновременно уменьшим $\sigma(\tau) - \sigma(+0)$, т. е. новая функция будет принадлежать $H[P,\tau]$. Итак, для функции $y_0(t)$ имеем

$$|y_0(\tau)| = |\dot{y}_0(T)|(\tau - T). \tag{61}$$

Так как $y_0(t)$ — экстремальная функция, то из (61) следует, что $|\dot{y}_0(T)| =$

* Неравенство (60) для функции $Y(t)$ получается, если решать уравнение (59) итерациями, взяв в качестве $z_0(t)$ любую функцию $Y(t)$, удовлетворяющую неравенству (58). Это неравенство называют леммой Гронуолла.

$= \max|\dot{y}(T)|$ в классе $H[P,\tau]$. Функция $y_0(t)$ имеет в $[0,T]$ точно n узлов, и соответствующая функция $\sigma_0(t)$ удовлетворяет неравенству $[\sigma(T)-\sigma(+0)]T \le \le P^2\tau T$. Если заменить число P^2, входящее в определение класса K_n в п. 1, числом $|\lambda|^2P^2\tau T$, то функция $y_0(t)$ входит в класс K_n. Как было показано при решении экстремальной задачи III в п. 1, график экстремальной функции — ломаная с равноотстоящими узлами и с одной точкой излома между соседними узлами.

Заменяя в формуле (40) число P^2 на $P^2\tau T|\lambda|^2$, при $\lambda^2 \in \mathbb{R}_+$ получаем

$$\dot{y}_0(T) = \left(\frac{P|\lambda|\sqrt{\tau T} + \sqrt{P^2|\lambda|^2\tau T - 4n^2}}{P|\lambda|\sqrt{\tau T} - \sqrt{P^2|\lambda|^2\tau T - 4n^2}}\right)^n. \tag{62}$$

Выражение в правой части (62) достигает максимума при

$$n = \frac{P|\lambda|\sqrt{T\tau}}{2}\sqrt{1-\gamma_0^2}. \tag{63}$$

Отсюда получаем

$$\dot{y}_0(T) \le e^{k|\lambda|P\sqrt{T\tau}}$$

и

$$|y_0(\tau)| \le e^{k|\lambda|P\sqrt{T\tau}}(\tau - T), \tag{64}$$

где T — некоторое число между нулем и τ. Максимум правой части при $0 \le \le T \le \tau$ получается при

$$\tau - T = \frac{2\tau}{1+\sqrt{1+k^2|\lambda|^2P^2\tau^2}}.$$

Если при этом значении T правая часть (63) есть целое число, то, подставляя его в (62), получаем из (64) точную оценку для $|y(\tau)|$ при всех $y \in H[P,\tau]$, которая достигается на функции $y_0 \in H[P,\tau]$. Решение экстремальной задачи приводит нас к следующей теореме.

Теорема 9. *Каждая функция класса $H[P,\tau]$ с $\lambda = 1$ удовлетворяет оценке*

$$\max_{0\le t\le r}|y(t)| \le \frac{2\tau}{1+\sqrt{1+k^2P^2\tau^2}}\exp(kP\sqrt{T\tau}), \tag{65}$$

где

$$T = \tau - \frac{2\tau}{1+\sqrt{1+k^2P^2\tau^2}}.$$

Если при этом значении T правая часть (63) *есть целое число, то оценка достигается.*

Замечания. **1.** Из (65) следует более простая, но грубая оценка

$$|y(\tau)| \le \frac{2}{kP}\exp(kP\,\tau). \tag{66}$$

2. Если уравнение (56) содержит параметр λ^2 при $\lambda \in \mathbb{R}$, то формулы (65) и (66), очевидно, справедливы при замене P на $P|\lambda|$. Можно показать, что при этом неравенство (66) является асимптотически точным, т. е. при $\lambda \to \infty$

$$\max_{y \in H[P,\tau]} |y(\tau)| = [1 + o(1)]\, e^{kP|\lambda|\tau} \frac{2}{kP|\lambda|}.$$

Неравенство (65) дает оценку решений уравнений (55), а значит, и (1), при условиях (53) и при начальных условиях $y(0) = 0$; $\dot{y}_+(0) = 1$. Оценку решений при других начальных условиях легко свести к этой оценке, сместив начало координат в первый узел решения. Таким образом, построена функция, которая является решением задачи на экстремум в классе $H[P, \tau]$, в случае, когда правая часть (63) есть целое число, и получена для нее оценка в общем случае. Из этой оценки непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 10. *При выполнении условий* (53) *общее решение* $y(t, \lambda)$ *уравнения* (1) *при* $\lambda^2 \in \mathbb{R}$ *удовлетворяет неравенству*

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{\log|y(t,\lambda)|}{t} \le kP|\lambda|. \tag{67}$$

2. Для того чтобы получить функцию $y(t, \lambda)$, на которой в оценке (67) достигается знак равенства, следует выбрать функцию $p(t)$ периодической с периодом ω_λ таким, чтобы при фиксированном λ величина $2^{-1}P|\lambda|\,\omega_\lambda\sqrt{1-\gamma_0^2}$ была целым числом. Тогда в (43) достигается знак равенства, что вместе с (52) обусловливает знак равенства в (67). Для получения решения, „близко" подходящего к максимальной оценке, выберем ω_λ так, чтобы $2^{-1}P|\lambda|\omega_\lambda\sqrt{1-\gamma_0^2} = 1$, и положим

$$p_\lambda(t) = P^2\omega_\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - t' - k\omega_\lambda),^* \qquad t' = \frac{1+\gamma_0}{2}\omega_\lambda. \tag{68}$$

Очевидно, что функция $p_\lambda(t)$ удовлетворяет условиям, аналогичным (53). Число P^2 (из п. 1) следует заменить числом

$$P_\lambda^2 = \lambda^2\omega_\lambda \int_{k\omega_\lambda}^{(k+1)\omega_\lambda} p_\lambda(t)\,dt.$$

В силу выбора ω_λ для P_λ получаем равенство

$$P_\lambda^2 = P^2\omega_\lambda^2\lambda^2 = \frac{4}{1-\gamma_0^2}.$$

Решение уравнения (1) с потенциалом (68) при начальных условиях $y(\omega_\lambda, \lambda) = 0$; $\dot{y}(\omega_\lambda, \lambda) = 1$ будет иметь узлы в точках $m\omega_\lambda$, $m = 1, 2, \ldots, n$, и

$$|\dot{y}(m\omega_\lambda)| = \left(\frac{1+\gamma_0}{1-\gamma_0}\right)^{m-1} = e^{2(m-1)/\gamma_0}.$$

На каждом отрезке $m\omega_\lambda \le t \le (m+1)\,\omega_\lambda$ функция $y(t)$ достигает максимума при $t = \xi_m = (m + (1+\gamma_0)/2)\omega_\lambda$. Этот максимум равен

$$|y(\xi_m, \lambda)| = e^{2(m-1)/\gamma_0}\, \frac{4+\gamma_0}{2}\,\omega_\lambda.$$

Подставляя в это выражение значение ω_λ, получаем, что для построенного ре-

* Эта функция не обычная, а обобщенная, однако это обстоятельство несущественно.

шения $y(t,\lambda)$ (при фиксированном λ) в точках $t = \xi_m$, $m = 1, 2, \ldots$, выполняется равенство

$$|y(t,\lambda)| = e^{kP|\lambda|t} \frac{1}{kP|\lambda|} \frac{1+\gamma_0}{e^{2/\gamma_0}\gamma_0}.$$

Таким образом, построено решение, которое на последовательности точек отличается лишь постоянным множителем от правой части (66), дающей оценку, пригодную для всех решений. Итак, доказана точность оценки (67).

3. Задавая начальное условие равенством

$$y(0,\lambda)\cos\alpha + \dot{y}(0,\lambda)\sin\alpha = 0,$$

можно утверждать следующее: для каждого вещественного λ можно так подобрать функцию $p(t) = p_\lambda(t)$, удовлетворяющую условиям (53), что при всех значениях α, кроме одного, для решения уравнения (1) справедливо равенство

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log|y(t,\lambda)|}{t} = kP|\lambda|. \tag{69}$$

Начальное условие, при котором (69) не выполняется, назовем исключительным. Этому начальному условию удовлетворяет каноническое решение уравнения (1), которое имеет мультипликатор $\rho_2(\lambda) = \rho^{-1}(\lambda)$, $(|\rho_2(\lambda)| < 1)$ и для него

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log|y(t,\lambda)|}{t} = -kP|\lambda|.$$

Это решение можно получить, в частности, если в предыдущем примере в формуле (68) заменить число t' числом $t'' = (1-\gamma_0)\,\omega_\lambda/2$. Для этого решения

$$\dot{y}(m\,\omega_\lambda) = \left(\frac{1-\gamma_0}{1+\gamma_0}\right)^{m-1} e^{-2(m-1)/\gamma_0}.$$

Таким образом, переход от максимально растущего решения к максимально убывающему осуществляется сдвигом управления на величину $-\gamma_0\omega_\lambda$, т. е. опережением на время $-\gamma_0\omega_\lambda$. Иначе говоря, новое управление должно быть выбрано так: $\tilde{p}_\lambda(t) = p_\lambda(t-\gamma_0\,\omega_\lambda)$.

4. Для того чтобы ответить на вопрос: можно ли построить функцию $p(t)$, удовлетворяющую условиям (53), так, чтобы для соответствующего решения $y(t,\lambda)$ уравнения (1) в (67) имел место знак равенства при всех вещественных значениях λ, докажем предварительно лемму.

Лемма 6. *Для произвольного* λ_0 *и при фиксированной* 1-*периодической интегрируемой функции* $p(t)$ *существует окрестность* $V(\lambda_0)$ *такая, что при всех* $\lambda \in V(\lambda_0)$ *некоторое решение задачи* (1) *удовлетворяет неравенству*

$$\frac{\log|y(t,\lambda)|}{t} > \log|\rho(\lambda)| - \eta$$

при всех $t > T_{\eta,\lambda_0,\delta}$, *вне исключительного множества* δ*-окрестностей корней функции* $y(t,\lambda)$, *где* $\eta > 0$, $\delta > 0$ — *произвольные положительные числа.*

Доказательство. Уравнение (1) имеет решение Флоке $u_1(t,\lambda)$ и $u_2(t,\lambda)$:

$$u_1(1,\lambda) = \rho(\lambda)u_1(0,\lambda), \quad u_2(1,\lambda) = \rho^{-1}u_2(0,\lambda).$$

(Предполагаем, что $\rho^2(\lambda) \neq 1$.) Обозначим через $y_1(t, \lambda)$ и $y_2(t, \lambda)$ нормальную систему решений уравнения (1), т. е.

$$y_1(0, \lambda) = \dot{y}_2(0, \lambda) = 1, \qquad \dot{y}_1(0, \lambda) = y_2(0, \lambda) = 0.$$

Имеем

$$u_1(t, \lambda) = \frac{y_2(1, \lambda)}{\rho(\lambda) - y_1(1, \lambda)} y_1(t, \lambda) + y_2(t, \lambda),$$

$$u_2(t, \lambda) = \frac{y_2(1, \lambda)}{\rho^{-1}(\lambda) - y_1(1, \lambda)} y_1(t, \lambda) + y_2(t, \lambda).^* \tag{70}$$

Решения $u_1(t, \lambda)$ и $u_2(t, \lambda)$ линейно независимы. Поэтому произвольное решение может быть выражено через них. Имеем

$$y(t, \lambda) = c_1 y_1(t, \lambda) + c_2 y_2(t, \lambda).$$

Выразив $y_1(t, \lambda)$ и $y_2(t, \lambda)$ через решения Флоке, получаем

$$y(t, \lambda) = \frac{\rho(\lambda) - y_1(1, \lambda)}{\rho(\lambda)^{-1} - \rho(\lambda)} \left\{ \left[c_1 \frac{\rho^{-1}(\lambda) - y_1(1, \lambda)}{y_2(1, \lambda)} - c_2 \right] u_1(t, \lambda) + \right.$$
$$\left. + \left[-c_1 \frac{\rho(\lambda) - y_1(1, \lambda)}{y_2(1, \lambda)} + c_2 \right] u_2(t, \lambda) \right\}. \tag{71}$$

Выберем при заданном $\lambda = \lambda_0$ числа c_1 и c_2 так, чтобы функция $y(t, \lambda_0)$ удовлетворяла тем же начальным условиям, что и $u_1(t, \lambda)$, т. е. коэффициент при $u_1(t, \lambda_0)$ был равен единице, а коэффициент при $u_2(t, \lambda_0)$ — нулю. Для этого положим $c_1 = \bar{c}_1 = (y_2(1, \lambda)) / (\rho(\lambda) - y_1(1, \lambda))$; $c_2 = \bar{c}_2 = 1$. Тогда

$$y(t, \lambda_0) = u_1(t, \lambda_0).$$

В силу непрерывности коэффициента при $u_1(t, \lambda)$ в (71) получим при некотором $\delta_1 > 0$, что для всех λ из окрестности $|\lambda - \lambda_0| < \delta_1$ в решении $y(t, \lambda)$ с начальными условиями $y(0, \lambda) = \bar{c}_1$, $\dot{y}(0, \lambda) = \bar{c}_2$ коэффициент при $u_1(t, \lambda)$ будет отличен от нуля. Поэтому для всех точек λ из этой окрестности справедливо равенство

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\log |y(t, \lambda)|}{t} \log |\rho(\lambda)|.$$

При этом предполагаем, что t не принимает значений из некоторого множества окрестностей корней $u_1(t, \lambda)$, называемого в дальнейшем „малым множеством" („малость" этого множества следует из периодичности множества корней функции Флоке $u_1(t, \lambda)$, и поэтому мало сдвигаются при малых изменени-

* Необходимо заметить, что если $y_2(1, \lambda) = 0$, то $\rho(\lambda) - y_1(1, \lambda) = 0$, и множитель при $y_2(t, \lambda)$ в выражении для $u_2(t, \lambda)$ можно заменить равным ему выражением

$$\frac{\dot{y}_2(1, \lambda)}{\dot{y}_2(1, \lambda) - \rho(\lambda)},$$

в котором числитель и знаменатель отличны от нуля при $\rho^2(\lambda) \neq 1$, а $u_2(t, \lambda)$ совпадает с $y_1(t, \lambda)$. Если же $\rho^2(y_0) = 1$ и $y_2(1, \lambda) \neq 0$, то следует умножить (70) на $\rho(\lambda) - \rho^{-1}(\lambda)$ и перейти к пределу при $\lambda \to \lambda_0$.

ях λ). Если учесть еще непрерывность $\rho(\lambda)$, то получим, что существует окрестность заданной точки λ_0, в которой справедливо неравенство

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log|y(t,\lambda)|}{t} > \log|\rho(\lambda_0)| - \varepsilon.$$

Отсюда следует, что для любого $\eta > 0$ существуют такие окрестность V точки λ_0 и число $T = T_{\eta,\lambda_0}$, что при $\lambda \in V$ и $t > T_{\eta,\lambda_0}$ и вне „малого множества"

$$\frac{\log|y(t,\lambda)|}{t} > \log|\rho(\lambda_0)| - \eta,$$

и, снова используя непрерывность $\rho(\lambda)$, получаем доказываемое неравенство

$$\frac{\log|y(t,\lambda)|}{t} > \log|\rho(\lambda)| - \eta.$$

Лемма доказана.

Перейдем к построению уравнения, для которого верно это неравенство. Для заданного числа λ_0 выбираем $p_0(t)$ периодической с периодом ω_λ так, чтобы мультипликатор $\rho(\lambda_0)$ имел наибольшее возможное значение (это нужно сделать так, как было показано в начале п. 3); соответствующее решение Флоке обозначим через $u(t,\lambda)$. Тогда при любом ε существует такая окрестность $V_\varepsilon(\lambda_0)$, зависящая от ε, для всех точек которой решение $y(t,\lambda)$, удовлетворяющее тем же начальным условиям в точке $t = 0$, что и $u(t,\lambda_0)$, удовлетворяет неравенству

$$\frac{\log|y(t,\lambda)|}{t} > kP|\lambda| - \varepsilon,$$

при всех $t > T_{\lambda_0,\varepsilon,\delta}$ вне указанного выше малого множества. Выберем $\varepsilon = \varepsilon_1$ и из покрытия сегмента $[-1, 1]$ окрестностями $V_{\varepsilon_1}(\lambda)$ выберем конечное покрытие $V_{\varepsilon_1}(\lambda_1), V_{\varepsilon_1}(\lambda_2), \ldots, V_{\varepsilon_1}(\lambda_n)$, затем положим $\varepsilon = \varepsilon_2$ и построим конечное покрытие сегмента $[-2, 2]$ окрестностями $V_{\varepsilon_2}(\lambda_{n+1}), V_{\varepsilon_2}(\lambda_{n+2}), \ldots, V_{\varepsilon_2}(\lambda_{n+p})$ и т. д. При этом последовательность ε_n выберем так, чтобы $\varepsilon_n \searrow 0$. Затем полученные окрестности с центрами в точках $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ нумеруем в одну последовательность $V_1, V_2, V_3, \ldots$. Отметим, что каждая точка λ вещественной оси попадает в бесконечное множество окрестностей V_i.

Теперь для точки λ_1 строим функцию $p(t)$ на интервале $[0, T_1]$, где T_1 произвольно, так, чтобы решение Флоке $u(t,\lambda_1)$ имело наибольший возможный мультипликатор $\rho(\lambda_1)$ (т. е., как было показано ранее, по формуле (68)), и строим решение $y(t,\lambda)$, удовлетворяющее в нуле тем же начальным условиям, что и $u(t,\lambda_1)$. Тогда при достаточно большом T_1 и $\lambda \in V_1$ будем иметь

$$\sup_{0\le t\le T_1} \frac{\log|y(t,\lambda)|}{t} > kP|\lambda| - \varepsilon_1.$$

Можно считать, что T_1 находится на узле решения $y(t,\lambda_1)$, т. е. $T_1 = m\omega_\lambda$. Далее, в формуле (68) заменим δ-функцию, дающую скачок функции $p_\lambda(t)$ на интервале между $m\omega_\lambda$ и $(m+1)\,\omega_\lambda$ „прямоугольной" функцией :

$$p_\lambda(t) = P^2 \omega_\lambda \left\{ \sum_{k \neq m} \delta(t - t' - k\omega_\lambda) + \tilde{\delta}(t - t' - m\omega_\lambda) \right\},$$

где $\tilde{\delta} = (2h)^{-1}$ при $|t| < h$ и $\tilde{\delta}(t) = 0$ при $|t| > h > 0$. Тогда между T_1 и следующим узлом величина $\dot{y}(t, \lambda) / y(t, \lambda)$ будет непрерывно меняться от $+\infty$ до $-\infty$, и можно найти точку t_2, в которой начальные значения пропорциональны начальным значениям в точке T_2 решения Флоке $u(t, \lambda_2)$. Далее берем решение Флоке на отрезке (T_1, T_2) при таком выборе $p(t)$ на этом отрезке, что $|\rho(\lambda_2)|$ является максимальным. Получаем, что при $\lambda \in V_2$ и достаточно большом T_2 справедливо неравенство

$$\sup_{0 \le t \le T_2} \frac{\log|y(t, \lambda)|}{t} > kP|\lambda| - \varepsilon_2.$$

Затем находим числа t_3 и T_3 и т. д. Так как каждая точка λ входит в бесконечное множество окрестностей V_i, то мы получим, что при любом λ и T

$$\sup_{t > T} \frac{\log|y(t, \lambda)|}{t} = k\,P|\lambda|$$

и, следовательно, при всех λ

$$\lim_{t \to \infty} \sup \frac{\log|y(t, \lambda)|}{t} = k\,P|\lambda|.$$

Таким образом, доказано, что для уравнения вида (1) можно выбрать функцию $p(t)$ так, что есть решение, которое при всех λ имеет максимально возможный экспоненциальный рост.

1. *Левін Б. Я.* Про оцінку росту інтеграла рівняння Штурма-Ліувілля // Тр. Одеськ. ун-ту. Математика. – 1938. – **2**. – С. 39 – 43.
2. *Мирочник Л. Я.* Некоторые экстремальные задачи в классе решений уравнений Штурма и Лиувилля // Вестн. Харьк. политехн. ин-та. Математика и физика. – 1965. – Вып. 1. – С. 45 – 55.
3. *Мирочник Л. Я.* Оценка для мультипликаторов дифференциального уравнения Штурма-Лиувилля // Мат. исслед. – 1969. – **4**, №1. – С. 90 – 97.
4. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. – 471 с.
5. *Крейн М. Г.* Об одном предположении А. М. Ляпунова // Функцион. анализ и его прил. – 1973. – **7**, №3. – С. 45 – 54.
6. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, II. – М.: Изд-во иностр. лит., 1954. – 415 с.
7. *Крейн М. Г., Коваленко К. Р.* О некоторых исследованиях А.М.Ляпунова по дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1950. – **74**, №1. – С. 9 – 12.
8. *Кац И. С., Крейн М. Г.* О спектральной функции струны // Ф. Аткинсон. Дискретные и непрерывные граничные задачи. – М.: Мир, 1968. – С. 646 – 733.
9. *Жуковский Н. Е.* Условие конечности интегралов уравнения $dy^2/dx^2 + py = 0$. – Собр. соч. – М.: Из-во АН СССР, 1948. – Т.1. – С. 246 – 253.
10. *Рапопорт И. М.* Об одной вариационной задаче в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями // Докл. АН СССР. – 1950. – **63**, №5. – С. 889 – 890.
11. *Крейн М. Г.* О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских законах устойчивости // Прикл. математика и механика. – 1951. – **15**, вып. 3. – С. 323 – 348.
12. *Якубович В. А.* Об ограниченности решений уравнения $y'' + p(t)y = 0$, $p(t + \omega) = p(t)$ // Докл. АН СССР. – 1950. – **24**, вып 5. – С. 901 – 905.
13. *Essen M.* Optimization and rearrangements of the coefficient in the differential equation $y'' \pm qy = 0$ // C.R. Math. Acad. Sci. Canada. – 1984. – **6**, №1. – P. 15 – 20.
14. *Essen M.* On estimating eigenvalues of a second order linear differential operator // Int. Ser. Numer. Math. – 1987. – **80**. – P. 346 – 366.
15. *Dym H., McKean H.* Gaussian processes, function theory and the inverse spectral problem. – New York: Acad. press, 1976.

Получено 21. 10. 93