УДК 517.9

А. Ю. Константинов, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

КЛАСС ДОПУСТИМЫХ ФУНКЦИЙ В ПРИНЦИПЕ ИНВАРИАНТНОСТИ ВОЛНОВЫХ ОПЕРАТОРОВ *

The class of admissible functions satisfying the well known invariance principle in the scattering theory is extended.

Розширюється клас припустимих функцій, для яких має місце відомий в теорії розсіяння принцип інваріантності.

1. В замечательной работе М. Г. Крейна и М. Ш. Бирмана [1] (см. также обзор [2]) установлена связь между функцией спектрального сдвига и матрицей рассеяния. Там же в предположении ядерности разности резольвент самосопряженных операторов H_1 и H_2 было доказано существование и равенство волновых операторов (в. о.) для пары H_1, H_2 и пары унитарных операторов V_1, V_2 — преобразований Кэли H_1 и H_2 соответственно. Как выяснилось позднее, подобное равенство является отражением общего принципа инвариантности (см. [3 – 8]), утверждающего равенство в.о. для пары H_2, H_1 и пары $f(H_1)$, $f(H_2)$ для широкого класса монотонно возрастающих абсолютно непрерывных функций f. В [3, 4] на f налагались некоторые дополнительные условия гладкости. В частности, требовалось, чтобы f' (локально) удовлетворяла условию Гельдера либо была непрерывна и имела (локально) ограниченную вариацию. Оставался открытым вопрос о доказательстве принципа инвариантности для произвольной непрерывно дифференцируемой возрастающей функции f. Настоящая работа восполняет этот пробел (на самом деле принцип инвариантности устанавливается для существенно более широкого класса функций). Отметим, что идея приводимых ниже рассуждений содержалась еще в [9, 10], но полное доказательство, к сожалению, не было опубликовано.

2. Пусть H_1, H_2 — самосопряженные операторы, действующие в сепарабельных гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ соответственно. J — ограниченный оператор из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$ (так называемый оператор отождествления). Положим $U_j(t) := \exp(-itH_j)$, $R_j(z) := (H_j - z \cdot \mathbb{1})^{-1}$, P_j — проектор на абсолютно непрерывное подпространство оператора H_j, σ_j — спектр H_j, $j = 1, 2$. Ниже $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, $\operatorname{meas}(\cdot)$ — мера Лебега на прямой, $S_1(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ — класс ядерных операторов из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$.

Волновые операторы (в. о.) для пары H_1, H_2 и отождествления J определяются как сильные пределы

$$W_{\pm}(H_2, H_1, J) = s - \lim_{t \to \pm\infty} U_2(-t) J U_1(-t) P_1$$

в предположении их существования.

Будем говорить, что борелевская функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *допустима* (для пары H_1, H_2), если существует открытое множество Γ такое, что $\operatorname{meas}(\sigma \setminus \Gamma) = 0$, $f \in C^1(\Gamma)$ и $f'(x) > 0$ для $x \in \Gamma$.

Теорема. *Пусть функция f допустима и*

* Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по науке и технологиям.

$$R_2(z)J - JR_1(z) \in S_1(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2), \qquad z \notin \sigma.$$

Тогда для пары $f(H_1)$, $f(H_2)$ *существует в. о. и*

$$W_\pm(f(H_2), f(H_1), J) = W_\pm(H_2, H_1, J).$$

Из результатов [4] следует (см. также [5 – 8]), что для доказательства теоремы достаточно установить следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть* $f \in C^1[a,b]$ *и* $\forall x \in [a,b]$ $f'(x) > 0$. *Тогда*

$$I(t) := \left(\int\limits_0^\infty \left| \int\limits_b^a \exp(-itf(x) - isx)\,dx \right|^2 ds \right)^{1/2} \to 0, \quad t \to +\infty.$$

Поясним, что при дополнительном условии $f' \in BV[a,b]$ приведенная лемма доказывается интегрированием по частям (см. [4]). В нашем случае ее доказательство становится не вполне банальным и является главной целью данной работы.

3. *Доказательство леммы* 1. Обозначим $\psi(t,s,x) := \exp(-itf(x) - isx)$, $c := \min\{f'(x) \mid x \in [a,b]\} > 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Подберем ступенчатую на $[a,b]$ функцию g:

$$g(x) = \sum_{k=1}^m c_k \chi_{[a_k, a_{k+1})}(x), \quad a = a_1 < a_2 < \ldots < a_{m+1} = b,$$

такую, что $\| f' - g \|_{L_2(a,b)} < \varepsilon$ и $g \geq c$ на $[a,b]$. Имеем

$$I(t) \leq I_1(t) + I_2(t),$$

где

$$I_1(t) = \left(\int\limits_0^\infty \left| \int\limits_b^a t\psi(t,s,x) \frac{g(x) - f'(x)}{s + tg(x)}\,dx \right|^2 ds \right)^{1/2},$$

$$I_2(t) = \left(\int\limits_0^\infty \left| \int\limits_b^a \psi(t,s,x) \frac{s + tf'(x)}{s + tg(x)}\,dx \right|^2 ds \right)^{1/2}.$$

Оценим (для $t > 0$) $I_1(t)$. Пусть δ — такая перестановка чисел $\{1, 2, \ldots$ $\ldots, m\}$, что $c_{\delta(1)} \leq c_{\delta(2)} \leq \ldots \leq c_{\delta(m)}$. Положим для $k = 1, \ldots, m$

$$E_k(t,s) = \sum_{j=1}^k \int\limits_{a_{\delta(j)}}^{a_{\delta(j)+1}} \psi(t,s,x)(g(x) - f'(x))\,dx =$$

$$= (2\pi)^{1/2} F\left(\exp(-itf)(g - f')\chi_{[a_{\delta(j)}, a_{\delta(j+1)}]}\right)(s).$$

Здесь F — преобразование Фурье на прямой. Отметим, что из равенства Парсеваля следует

$$\| E_k(t, \cdot) \|_{L_2(\mathbb{R})} \leq (2\pi)^{1/2} \| g - f' \|_{L_2(a,b)} \leq (2\pi)^{1/2} \varepsilon.$$

Применим теперь преобразование Абеля

$$I_1(t) = \left(\int_0^\infty \left|\sum_{k=1}^m \frac{t}{s+tc_{\delta(k)}} \int_{a_{\delta(k)}}^{a_{\delta(k)+1}} \psi(t,s,x)(g(x)-f'(x))\,dx\right|^2 ds\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int_0^\infty \left|\sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{t}{s+tc_{\delta(k)}} - \frac{t}{s+tc_{\delta(k+1)}}\right) E_k(t,s) + t\,(s+t\,c_{\delta(m)})^{-1} E_m(t,s)\right|^2 ds\right)^{1/2} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{m-1} \sup_{s\ge 0} \left|\left(\frac{t}{s+tc_{\delta(k)}} - \frac{t}{s+tc_{\delta(k+1)}}\right)\right| \| E_k(t,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} + c_{\delta(m)}^{-1} \| E_m(t,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le$$

$$\le (2\pi)^{1/2}\varepsilon \left(\sum_{k=1}^{m-1} \left|c_{\delta(k)}^{-1} - c_{\delta(k+1)}^{-1}\right| + c_{\delta(m)}^{-1}\right) = \sqrt{2\pi}\,\varepsilon / c_{\delta(1)} \le \sqrt{2\pi}\,\varepsilon / c.$$

Приведенная оценка показывает, что достаточно проверить, что $I_2(t) \to 0$, $t \to +\infty$. Имеем (при $t > 0$)

$$I_2^2(t) = \int_0^\infty \left|\int_a^b (s + tg(x))^{-1} \frac{d}{dx}(\psi(t,s,x))\,dx\right|^2 ds =$$

$$= \int_0^\infty \left|\sum_{k=1}^m (s+tc_k)^{-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{d}{dx}(\psi(t,s,x))\,dx\right|^2 ds \le 4m^2 \int_0^\infty \frac{ds}{(s+tc)^2} = \frac{4m^2}{tc}.$$

Лемма доказана.

4. Отметим некоторое обобщение приведенных результатов. Непосредственно из доказательства леммы 1 видно, что достаточно требовать лишь принадлежность f' пространству L_2 (аппроксимация ведется в среднем квадратичном). Точнее, справедлив следующий результат.

Лемма 2. *Пусть f абсолютно непрерывна на $[a,b]$, причем $f' \in L_2(a,b)$ и* $\operatorname{essinf}\{f'(x) \mid x \in [a,b]\} > 0$. *Тогда справедливо утверждение леммы* 1.

Ясно как можно ослабить условие гладкости и в определении допустимой функции. Можно требовать, чтобы f была (локально) абсолютно непрерывной на Γ, причем $f' \in L_{2,\,\mathrm{loc}}(\Gamma)$, $(f')^{-1} \in L_{\infty,\,\mathrm{loc}}(\Gamma)$ и $f'(x) > 0$ для $x \in \Gamma$.

1. *Бирман М. Ш., Крейн М. Г.* К теории волновых операторов и операторов рассеяния // Докл. АН СССР. – 1962. – **144**, №3. – С. 475 – 478.
2. *Бирман М. Ш., Яфаев Д. Р.* Функция спектрального сдвига. Работы М. Г. Крейна и их дальнейшее развитие // Алгебра и анализ. – 1992. – **4**, №5. – С. 1 – 44.
3. *Бирман М. Ш.* Об условиях существования волновых операторов // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1963. – **27**, №4. – С. 883 – 906.
4. *Kato T.* Wave operators and unitary equivalence // Pacif. J. Math. – 1965. – **15**. – P. 171 – 180.
5. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
6. *Рид. М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. – М.: Мир, 1982. – Т.3. – 443 с.
7. *Baumgartel H., Wollenberg M.* Mathematical scattering theory. – Berlin: Akademie-Verlag, 1983. – 449 p.
8. *Yafaev D. R.* Mathematical scattering theory. – Providence, R. I.: AMS, 1992. – 400 p.
9. *Константинов А. Ю.* Принцип инвариантности волновых операторов // Докл. АН СССР. – 1985. – **281**, №5. – С. 1041 – 1044.
10. *Константинов А. Ю.* О принципе инвариантности волновых операторов // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, №6. – С. 704 – 709.

Получено 31. 08. 93