УДК 513. 88

Ю. М. Арлинский,
В. И. Могилевский, кандидаты физ.-мат. наук (Луган. машиностроит. ин-т)

КОММУТИРУЮЩИЕ РАСШИРЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ

We obtain existence criteria and describe the commuting maximal proper extensions of a closed Hermite operator and a dual pair of continuous operators in a Hilbert space.

Одержані критерії існування та опис переставних власних максимальних розширень замкненого ермітова оператора і дуальних пар неперервних операторів у гільбертовому просторі.

В настоящей статье получены критерий существования и описание коммутирующих собственных максимальных расширений замкнутого эрмитова оператора и дуальной пары непрерывных операторов в гильбертовом пространстве.

Ранее в [1] эти задачи решены для квазисопряженных сжимающих (qsc) расширений эрмитова сжатия [2] и m-аккретивных собственных расширений неотрицательного эрмитова оператора.

В дальнейшем используются следующие обозначения: $\mathfrak{L}(H, K)$ — множество ограниченных операторов из гильбертова пространства H в гильбертово пространство K, $\mathcal{B}(H, K)$ — множество сжатий из H в K, $D_N = (I - N^*N)^{1/2}$ — дефектный оператор для $N \in \mathcal{B}(H, K)$, $\mathfrak{D}_N = \overline{D_N H}$, P_G — ортопроектор на $G \subset H$, $\Pi_{G_1}(\Pi_{G_2})$ — косой проектор на $G_1(G_2)$ в прямом разложении $H = G_1 \dot{+} G_2$, $\Pi_+(\Pi_-)$ — открытая верхняя (нижняя) полуплоскость, $\mathfrak{D}(T)$, $\mathfrak{R}(T)$, $\operatorname{Ker} T$ — соответственно область определения, область значений и ядро линейного оператора T, $\rho(T)$ — его резольвентное множество.

1. Пусть H_1, H_1' — подпространства гильбертова пространства H. Говорят, что $A_1 \in \mathfrak{L}(H_1, H)$, $A_2 \in \mathfrak{L}(H_1', H)$ образуют дуальную пару (д. п.) $\langle A_1, A_2 \rangle$, если $(A_1 f, g) = (f, A_2 g)$ $\forall f \in H_1$, $\forall g \in H_1'$ и дуальную пару сжатий (д. п. с.), если кроме этого $\|A_1\| \le 1$, $\|A_2\| \le 1$ [3 – 7]. Оператор $B \in \mathfrak{L}(H, H)$ называется расширением д. п. $\langle A_1, A_2 \rangle$, если $B \supset A_1$, $B^* \supset A_2$.

Всякое расширение д. п. $\langle A_1, A_2 \rangle$ представимо в матричной форме относительно разложений $H = H_1 \oplus H_2$, $H = H_1' \oplus H_2'$, где $H_2 = H \ominus H_1$, $H_2' = H \ominus H_1'$:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \quad B_{ij} \in \mathfrak{L}(H_j, H_i'), \quad B_{ij} = P_{H_i'} B \restriction H_j, \quad i, j = 1, 2,$$

причем $A_1 = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} B_{11}^* \\ B_{12}^* \end{pmatrix}$, $B_{22} \in \mathfrak{L}(H_2, H_2')$ — произвольный оператор.

Пусть $A_1^* \in \mathfrak{L}(H, H_1)$, $A_2^* \in \mathfrak{L}(H, H_1')$ — сопряженные операторы.

Предложение 1. *Пусть B_1, B_2 — два расширения д. п. $\langle A_1, A_2 \rangle$. Тогда справедлива эквивалентность*

$$B_1 B_2 = B_2 B_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathfrak{R}(C) \subseteq H_2' \cap \operatorname{Ker} A_2^*, \\ \mathfrak{R}(C^*) \subseteq H_2 \cap \operatorname{Ker} A_1^*, \\ (B_{21} P_{H_1} + B_{22}^{(2)} P_{H_2}) C = C P_{H_2} (B_{12} + B_{22}^{(2)}), \end{cases} \tag{1}$$

где $B_{22}^{(k)} = P_{H_2'} B_k \restriction H_2$, $k = 1, 2$; $C = B_{22}^{(1)} - B_{22}^{(2)}$.

Доказательство. Если $B_1 B_2 = B_2 B_1$, то $(B_1 - B_2) B_2 = B_2 (B_1 - B_2)$. Поэтому $(B_1 - B_2) A_1 \restriction H_1 = 0$ и $(B_1^* - B_2^*) A_2 \restriction H_1' = 0$. Поскольку $B_1 - B_2 = C P_{H_2}$, то

$\mathfrak{R}(C^*) \subseteq H_2 \cap \operatorname{Ker} A_1^*$, $\mathfrak{R}(C) \subseteq H_2' \cap \operatorname{Ker} A_2^*$. Кроме того, $CP_{H_2}B_2 = B_2CP_{H_2}$. Отсюда $(B_{21}P_{H_1} + B_{22}^{(2)}P_{H_2})C = CP_{H_2}(B_{12} + B_{22}^{(2)})$, и соотношения (1) доказаны. С другой стороны, нетрудно видеть, что выполнение (1) влечет равенство $(B_1 - B_2)B_2 = B_2(B_1 - B_2)$, а значит, и $B_1B_2 = B_2B_1$.

Из предложения 1 следует, что необходимыми условиями существования неравных коммутирующих расширений д. п. являются $H_2 \cap \operatorname{Ker} A_1^* \neq \{0\}$, $H_2' \cap \operatorname{Ker} A_2^* \neq \{0\}$.

Рассмотрим более обозримый случай $H_1' = H_1$. Обозначим $G_j = H_2 \cap \operatorname{Ker} A_j^* (= (H \ominus A_j H_1) \cap (H \ominus H_1))$, $j = 1, 2$.

Теорема 1. *Пусть B_1, B_2 — расширения д. п. $\langle A_1, A_2 \rangle$, где $A_1, A_2 \in \mathfrak{L}(H_1, H)$. Тогда справедлива эквивалентность*

$$B_1B_2 = B_2B_1 \Leftrightarrow \begin{cases} (B_{22}^{(1)} - B_{22}^{(2)})H_2 \subseteq G_2, \\ (B_{22}^{(1)*} - B_{22}^{(2)*})H_2 \subseteq G_1, \\ B_{22}^{(1)}B_{22}^{(2)} = B_{22}^{(2)}B_{22}^{(1)}, \end{cases} \tag{2}$$

где $B_{22}^{(k)} = P_{H_2}B_k \mid H_2$, $k = 1, 2$. *Для существования неравных коммутирующих расширений д. п. $\langle A_1, A_2 \rangle$ необходимо и достаточно выполнения условий*

$$G_1 \neq \{0\}, \quad G_2 \neq \{0\}. \tag{3}$$

Доказательство. Эквивалентность (2) является следствием из (1), необходимость (3) отмечена выше. Для доказательства достаточности положим $B_{22}^{(2)} = 0$; $B_{22}^{(1)} = MP_{G_1} \mid H_2$, где $M \in \mathfrak{L}(G_1, G_2)$, $M \neq \{0\}$. Тогда условия (2) выполнены и $B_1 \neq B_2$.

Пусть $\langle A_1, A_2 \rangle$ — д. п. с. и $A_j \in \mathfrak{L}(H_1, H)$, $j = 1, 2$, тогда имеем

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_0 \\ N_2 D_{A_0} \end{pmatrix} : H_1 \to H_1 \oplus H_2, \quad A_2^* = (A_0\, D_{A_0^*} N_1) : H_1 \oplus H_2 \to H_1,$$

где $N_1 \in \mathfrak{B}(H_2, \mathfrak{D}_{A_0^*})$, $N_2 \in \mathfrak{B}(\mathfrak{D}_{A_0}, H_2)$, и всякое сжимающее расширение д. п. с. $\langle A_1, A_2 \rangle$ имеет вид [3 – 5]

$$B = \begin{pmatrix} A_0 & D_{A_0^*}N_1 \\ N_2 D_{A_0} & -N_2 A_0^* N_1 + D_{N_2^*} K D_{N_1} \end{pmatrix} : H_1 \oplus H_2 \to H_1 \oplus H_2, \tag{4}$$

где $K \in \mathfrak{B}(\mathfrak{D}_{N_1}, \mathfrak{D}_{N_2^*})$, и однозначно определяется по B.

Теорема 2. *Пусть B_1, B_2 — сжимающие расширения д. п. с. $\langle A_1, A_2 \rangle$, K_j — соответствующие сжатия, определяющие B_j по формуле* (4), $j = 1, 2$. *Тогда справедлива эквивалентность*

$$B_1B_2 = B_2B_1 \Leftrightarrow \begin{cases} N_1 D_{N_2^*}(K_1 - K_2) = 0, \\ N_2^* D_{N_1}(K_1^* - K_2^*) = 0, \\ (K_1 - K_2) D_{N_1} K_2 = K_2 D_{N_2^*}(K_1 - K_2). \end{cases} \tag{5}$$

Для существования неравных коммутирующих B_j необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$G_2 \cap (D_{A_1^*}H) \neq \{0\}, \quad G_1 \cap (D_{A_2^*}H) \neq \{0\}. \tag{6}$$

Доказательство. Полагая в (2) $B_{22}^{(j)} = -N_2 A_0^* N_1 + D_{N_2^*} K_j D_{N_1}$, $j = 1, 2$, после несложных преобразований получаем

$$B_1 B_2 = B_2 B_1 \Leftrightarrow \begin{cases} N_1 D_{N_2^*}(K_1 - K_2) = 0, \\ N_2^* D_{N_1}(K_1^* - K_2^*) = 0, \\ K_1 D_{N_1} D_{N_2^*} K_2 = K_2 D_{N_1} D_{N_2^*} K_1. \end{cases} \tag{7}$$

Из первых двух равенств в (7) получаем $D_{N_1} D_{N_2^*}(K_1 - K_2) = D_{N_2^*}(K_1 - K_2)$, $(K_1 - K_2) D_{N_1} D_{N_2^*} = (K_1 - K_2) D_{N_1}$. Следовательно, $(K_1 - K_2) D_{N_1} K_2 = K_2 D_{N_2^*}(K_1 - K_2)$ что влечет (5).

Из (5) получаем, что необходимым и достаточным условием существования неравных коммутирующих расширений B_1, B_2 является $\operatorname{Ker} N_1 \cap D_{N_2^*} H_2 \neq \{0\}$ $\operatorname{Ker} N_2^* \cap D_{N_1} H_2 \neq \{0\}$. Очевидно, что $\operatorname{Ker} N_1 = \operatorname{Ker} D_{A_0^*} N_1 = H_2 \cap \operatorname{Ker} A_2^* = G_2$, $\operatorname{Ker} N_2^* = \operatorname{Ker} D_{A_0} N_2^* = H_2 \cap \operatorname{Ker} A_1^* = G_1$. Из [4] получаем $D_{N_2^*} H_2 = H_2 \cap (D_{A_1^*} H)$, $D_{N_1} H_2 = (D_{A_2^*} H) \cap H_2$. Следовательно, справедливо (6).

Следствие. *В условиях теоремы 2 при дополнительном предположении* $G_1 = G_2 \overset{\text{def}}{=} G_0$ *справедлива эквивалентность*

$$B_1 B_2 = B_2 B_1 \Leftrightarrow \begin{cases} (K_1' - K_2') H_2 \subseteq G_0, \\ (K_1'^* - K_2^{*\prime}) H_2 \subseteq G_0, \\ K_1' K_2' = K_2' K_1', \end{cases} \tag{8}$$

где $K_j' = K_j P_{\mathfrak{D}_{N_1}}$. *Для существования коммутирующих неравных сжимающих расширений необходимо и достаточно, чтобы*

$$G_0 \neq \{0\}. \tag{9}$$

Доказательство. Так как $\operatorname{Ker} N_1 = G_2$, $\operatorname{Ker} N_2^* = G_1$, то $\operatorname{Ker} N_1 = \operatorname{Ker} N_2^*$. Отсюда и из равенств $N_2^* D_{N_2^*} = D_{N_2} N_2^*$, $N_1 D_{N_1} = D_{N_1^*} N_1$ имеем эквивалентность

$$N_1 D_{N_2^*}(K_1 - K_2) = 0 \Leftrightarrow N_2^*(K_1 - K_2) = 0,$$

$$N_2^* D_{N_1}(K_1^* - K_2^*) = 0 \Leftrightarrow N_1(K_1^* - K_2^*) = 0.$$

Если $N_2^*(K_1 - K_2) = 0$ и $N_1(K_1^* - K_2^*) = 0$, то $D_{N_2^*}(K_1 - K_2) = K_1 - K_2$, $D_{N_1}(K_1^* - K_2^*) = K_1^* - K_2^*$. Поэтому эквивалентность (5) трансформируется в (8). Поскольку $\operatorname{Ker} A_j^* \subseteq D_{A_j^*} H$, $j = 1, 2$, то (9) следует из (6).

Отметим, что утверждение следствия является обобщением результатов [1] для случая qsc-расширений эрмитова сжатия $(A_1 = A_2)$.

2. Пусть A — замкнутый эрмитов оператор с областью определения $\mathfrak{D}(A)$, не обязательно плотной в H. Для $\lambda \in \Pi_+ \cup \Pi_-$ обозначим $\mathfrak{M}_\lambda = (A - \lambda I)\mathfrak{D}(A)$, $\mathfrak{N}_\lambda = H \ominus \mathfrak{M}_\lambda$ — дефектное подпространство, $n_+(A)$, $n_-(A)$ — дефектные числа A. Назовем замкнутый плотно заданный оператор T максимальным собственным расширением A, если $T \supset A$, $T^* \supset A$, $\rho(T) \neq \varnothing$.

Через $\Omega_z(A)$ обозначим класс максимальных собственных расширений оператора A, имеющих регулярную точку $z \in \Pi_+ \cup \Pi_-$:

Рассмотрим дробно-линейные преобразования

$$U_{\lambda,z}(A) = (A - \lambda I)(A - zI)^{-1}, \quad W_{\lambda,z}(T) = (T - \lambda I)(T - zI)^{-1}, \quad T \in \Omega_z(A), \ \lambda \neq z.$$

При $\lambda = \bar{z}$ операторы $U_{\bar{z},z}(A)$ и $W_{\bar{z},z}(T)$ совпадают с преобразованиями Кели операторов A и T.

Легко проверить следующие свойства:

1) $U_{\lambda,z}(A)\mathfrak{M}_z = \mathfrak{M}_\lambda, \ U_{z,\lambda}(A) = U^{-1}_{\lambda,z}(A)$;

2) $W_{\lambda,z}(T) \in \mathfrak{L}(H, H), \ W_{\lambda,z}(T)\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}} \subseteq \mathfrak{N}_{\bar{z}}$;

3) $W_{\bar{\lambda},\bar{z}}(T^*) = W^*_{\lambda,z}(T)$;

4) отображение $W = W_{\lambda,z}(T)$ при фиксированных $\lambda, \ z$ задает биекцию множества $\Omega_z(A)$ на подмножество R ограниченных в H операторов, определяемое условиями

$$R = \{W \in \mathfrak{L}(H, H) : \operatorname{Ker}(W - I) = \operatorname{Ker}(W^* - I) = \{0\}, W \supset U_{\lambda,z}(A), \ W^* \supset U_{\bar{\lambda},\bar{z}}(A)\}.$$

При этом обратное преобразование имеет вид $T = (zW - \lambda I)(W - I)^{-1}, \ \mathfrak{D}(T) = \mathfrak{R}(W - I)$;

5) Для $T_1 \in \Omega_z(A), \ T_2 \in \Omega_\lambda(A)$ справедлива эквивалентность $T_1 = T_2 \Leftrightarrow W_{\lambda,z}(T_1) = W^{-1}_{z,\lambda}(T_2)$.

Согласно [8] при любых $\lambda, \ z$ таких, что $\operatorname{Im}\lambda \operatorname{Im} z > 0$, имеет место разложение

$$H = \mathfrak{M}_z \dotplus \mathfrak{N}_\lambda. \tag{10}$$

Обозначим $G_0 = (H \ominus A\,\mathfrak{D}(A)) \cap (H \ominus \mathfrak{D}(A))$. Легко видеть, что $G_0 = \mathfrak{N}_\lambda \cap \mathfrak{N}_z \ \forall \lambda, z \in \Pi_+ \cup \Pi_-, \ \lambda \neq z$. Пусть $\mathfrak{R}_z = \mathfrak{N}_z \ominus G_0 \ \forall z \in \Pi_+ \cup \Pi_-$.

Лемма 1. *При любом* $\mu \neq z$ *справедливо равенство*

$$\overline{\Pi_{\mathfrak{N}_\lambda}\mathfrak{M}_\mu} = \mathfrak{R}_\lambda, \tag{11}$$

где $\Pi_{\mathfrak{N}_\lambda}$ *— косой проектор на* $\mathfrak{N}_\lambda$ *в разложении* (10).

Доказательство. Пусть $f \in \mathfrak{M}_\mu$, тогда f и $\Pi_{\mathfrak{M}_z} f$ ортогональны G_0, следовательно, $\Pi_{\mathfrak{N}_\lambda} f = f - \Pi_{\mathfrak{M}_z} f \in \mathfrak{N}_\lambda \ominus G_0 = \mathfrak{R}_\lambda$. Пусть $g \in \mathfrak{R}_\lambda$ и $(\Pi_{\mathfrak{N}_\lambda} f, g) = 0$ $\forall f \in \mathfrak{M}_\mu$, тогда $\Pi^*_{\mathfrak{N}_\lambda} g \in \mathfrak{N}_\mu$. С другой стороны, $\Pi^*_{\mathfrak{N}_\lambda} g \in \mathfrak{N}_z$, и следовательно, $\Pi^*_{\mathfrak{N}_\lambda} g \in G_0$. Отсюда $\| g \|^2 = (\Pi^*_{\mathfrak{N}_\lambda} g, g) = 0$, что влечет (11).

Пусть $\operatorname{Im}\lambda \operatorname{Im} z < 0$. Рассмотрим прямые разложения $H = \mathfrak{M}_{\bar{z}} \dotplus \mathfrak{N}_\lambda$, $H = \mathfrak{M}_{\bar{\lambda}} \dotplus \mathfrak{N}_z$ и соответствующие им проекторы. Определим оператор $V_{z,\lambda}$ следующим образом: $V_{z,\lambda}\Pi_{\mathfrak{N}_\lambda} h = \Pi_{\mathfrak{N}_z} h$, где $h \in H \ominus \mathfrak{D}(A)$.

Можно доказать, что: 1) для $\varphi_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda, \ \varphi_z \in \mathfrak{N}_z$ включение $\varphi_\lambda + \varphi_z \in \mathfrak{D}(A)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi_z = -V_{z,\lambda}\varphi_\lambda$; 2) $\mathfrak{D}(V_{z,\lambda}) = \mathfrak{N}_\lambda \cap (\mathfrak{D}(A) \dotplus \mathfrak{N}_z)$, $\mathfrak{R}(V_{z,\lambda}) = \mathfrak{N}_z \cap (\mathfrak{D}(A) \dotplus \mathfrak{N}_\lambda)$. Для случая $z = \bar{\lambda}$ эти результаты установлены в [8, 9], причем $V_{\bar{\lambda},\lambda}$ — изометрия.

Назовем оператор $M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{N}_\lambda, \mathfrak{N}_z)$ допустимым, если равенство $Mf = V_{z,\lambda} f$

влечет $f = 0$.

Пусть $M' = \Pi_{\mathfrak{N}_{\bar z}} M^* P_{\mathfrak{N}_z} \upharpoonright \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$, где $\Pi_{\mathfrak{N}_{\bar z}}$ — проектор, соответствующий разложению $H = \mathfrak{M}_\lambda \dotplus \mathfrak{N}_{\bar z}$.

Отнесем $M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{N}_\lambda, \mathfrak{N}_z)$ к классу $S_{\lambda,z}$, если M и M' — допустимые операторы.

Лемма 2. *При любых* $z, \lambda \in \Pi_+ \cup \Pi_-$ *таких, что* $\operatorname{Im} z \operatorname{Im} \lambda < 0$ *формулы*

$$\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(A) \dotplus (M - I)\mathfrak{N}_{\bar\lambda},$$

$$T(f_A + M_{g_{\bar\lambda}} - g_{\bar\lambda}) = Af_A + zMg_{\bar\lambda} - \lambda g_{\bar\lambda}, \quad f_A \in \mathfrak{D}(A), \quad g_{\bar\lambda} \in \mathfrak{N}_{\bar\lambda} \tag{12}$$

задают биекцию $S_{\bar\lambda,\bar z}$ *на* $\Omega_z(A)$.

Доказательство. Пусть $T \in \Omega_z(A)$. Обозначим $M = W_{\lambda,z}(T) \upharpoonright \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$. Тогда $M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{N}_{\bar\lambda}, \mathfrak{N}_{\bar z})$ и $W_{\lambda,z}(T) = U_{\lambda,z}(A)\Pi_{\mathfrak{M}_z} + M\Pi_{\mathfrak{N}_{\bar\lambda}}$. Отсюда $W^*_{\lambda,z}(T) = \Pi_{\mathfrak{M}_{\bar\lambda}} U^*_{\lambda,z}(A) P_{\mathfrak{M}_\lambda} + \Pi_{\mathfrak{N}_z} M^* P_{\mathfrak{N}_{\bar z}}$, где $\Pi_{\mathfrak{M}_z}$, $\Pi_{\mathfrak{N}_{\bar\lambda}}$, $\Pi_{\mathfrak{M}_{\bar\lambda}}$, $\Pi_{\mathfrak{N}_z}$ — проекторы, соответствующие разложениям $H = \mathfrak{M}_z \dotplus \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$, $H = \mathfrak{M}_{\bar\lambda} \dotplus \mathfrak{N}_z$. Поскольку $W^*_{\lambda,z}(T) = W_{\bar\lambda,\bar z}(T^*)$ и $W_{\bar\lambda,\bar z}(T^*)\mathfrak{N}_\lambda \subseteq \mathfrak{N}_z$, то $W_{\bar\lambda,\bar z}(T^*) \upharpoonright \mathfrak{N}_\lambda = \Pi_{\mathfrak{N}_z} M^* P_{\mathfrak{N}_{\bar z}} = M'$. Из равенств $\operatorname{Ker}(W_{\lambda,z}(T) - I) = \{0\}$, $\operatorname{Ker}(W_{\bar\lambda,\bar z}(T^*) - I) = \{0\}$ следует, что M и M' — допустимые операторы, поэтому $M \in S_{\bar\lambda,\bar z}$.

Обратно, зададим T равенствами (12) с $M \in S_{\bar\lambda,\bar z}$. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{D}(T)$ плотно в H (это следует из допустимости оператора M'), и из разложения $H = \mathfrak{M}_z \dotplus \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ получаем, что $T \in \Omega_z(A)$.

***Замечание* 1.** При $z = \bar\lambda$ равенства (12) преобразуются в хорошо известные и имеются в [8 – 11].

В дальнейшем коммутируемость максимальных собственных расширений оператора A будем понимать как коммутируемость их резольвент.

Теорема 3. *Пусть* $T_1 \in \Omega_z(A)$, $T_2 \in \Omega_\lambda(A)$, $\operatorname{Im} z \operatorname{Im} \lambda < 0$, $M_1 \in S_{\bar\lambda,\bar z}$, $M_2 \in S_{\bar z,\bar\lambda}$ — *соответствующие* T_1, T_2 *операторы по лемме* 2. *Тогда* T_1, T_2 *коммутируют в том и только в том случае, когда*

$$M_2 M_1 \upharpoonright G_0 = M_1 M_2 \upharpoonright G_0, \quad \operatorname{Ker}(M_2 M_1 - I) \supseteq \mathfrak{R}_{\bar\lambda}, \quad \operatorname{Ker}(M_1 M_2 - I) \supseteq \mathfrak{R}_{\bar z}. \tag{13}$$

Доказательство. Рассмотрим разложения $H = \mathfrak{M}_z \dotplus \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ и $H = \mathfrak{M}_\lambda \dotplus \mathfrak{N}_{\bar z}$ и соответствующие им косые проекторы. Тогда

$$W_{\lambda,z}(T_1) W_{z,\lambda}(T_2) = (U_{\lambda,z}(A)\Pi_{\mathfrak{M}_z} + M_1 \Pi_{\mathfrak{N}_{\bar\lambda}})(U^{-1}_{\lambda,z}(A)\Pi_{\mathfrak{M}_\lambda} + M_2 \Pi_{\mathfrak{N}_{\bar z}}) =$$

$$= \Pi_{\mathfrak{M}_\lambda} + M_1 M_2 \Pi_{\mathfrak{N}_{\bar z}},$$

$$W_{z,\lambda}(T_2) W_{\lambda,z}(T_1) = \Pi_{\mathfrak{M}_z} + M_2 M_1 \Pi_{\mathfrak{N}_{\bar\lambda}}.$$

Следовательно, T_1 и T_2 коммутируют тогда и только тогда, когда

$$(I - M_1 M_2)\Pi_{\mathfrak{N}_{\bar z}} = (I - M_2 M_1)\Pi_{\mathfrak{N}_{\bar\lambda}}. \tag{14}$$

Если (14) выполнено, то $M_1 M_2 \upharpoonright G_0 = M_2 M_1 \upharpoonright G_0$ и из леммы 1 $(M_2 M_1 -$

$-I) \mid \mathfrak{R}_{\bar{\lambda}} = 0$, $(M_1M_2 - I) \mid \mathfrak{R}_{\bar{z}} = 0$, т. е. выполняется (13).

Пусть выполнены равенства (13). Очевидно, что $H = (\mathfrak{M}_z \dotplus \mathfrak{R}_{\bar{\lambda}}) \oplus G_0$, $H = (\mathfrak{M}_\lambda \dotplus \mathfrak{R}_{\bar{z}}) \oplus G_0$. Отсюда следует, что (14) выполняется на G_0 и $(M_2M_1 - I)\Pi_{\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}} \mid (\mathfrak{M}_z \dotplus \mathfrak{R}_{\bar{\lambda}}) = (M_2M_1 - I)\Pi_{\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}} \mid \mathfrak{R}_{\bar{\lambda}} = 0$. Аналогично, $(M_1M_2 - I)\Pi_{\mathfrak{N}_{\bar{z}}} \mid (\mathfrak{M}_\lambda \dotplus \mathfrak{R}_{\bar{z}}) = 0$. Значит, (14) выполнено всюду в H.

***Замечание* 2.** С операторами $M_1 \in \mathfrak{L}(\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}, \mathfrak{N}_{\bar{z}})$, $M_2 \in \mathfrak{L}(\mathfrak{N}_{\bar{z}}, \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}})$ связаны подпространства $\operatorname{Ker}(M_2M_1 - I)$ и $\operatorname{Ker}(M_1M_2 - I)$, которые в дальнейшем будем обозначать $L_{\bar{\lambda}}$ и $L_{\bar{z}}$ соответственно.

Если выполнено (13), то $L_{\bar{\lambda}} \supseteq \mathfrak{R}_{\bar{\lambda}}$, $L_{\bar{z}} \supseteq \mathfrak{R}_{\bar{z}}$ и $L_{\bar{\lambda}} \cap G_0 = L_{\bar{z}} \cap G_0$. Отсюда $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}} = F_0 \oplus L_{\bar{\lambda}}$, $\mathfrak{N}_{\bar{z}} = F_0 \oplus L_{\bar{z}}$, где $F_0 = G_0 \ominus (L_{\bar{\lambda}} \cap G_0)$ и $M_1 L_{\bar{\lambda}} = L_{\bar{z}}$, $M_2 L_{\bar{z}} = L_{\bar{\lambda}}$, $(M_1 \mid L_{\bar{\lambda}})^{-1} = M_2 \mid L_{\bar{z}}$.

Теорема 4. *Если при некоторых* z, λ *таких, что* $\operatorname{Im} z \operatorname{Im} \lambda < 0$ *существуют неравные коммутирующие расширения* $T_1 \in \Omega_z(A)$, $T_2 \in \Omega_\lambda(A)$, *то*

$$G_0 \neq \{0\}, \quad n_+(A) = n_-(A). \tag{15}$$

Обратно, если выполнено (15), *то при любых* z, λ: $\operatorname{Im} z \operatorname{Im} \lambda < 0$ *существуют неравные коммутирующие расширения* $T_1 \in \Omega_z(A)$, $T_2 \in \Omega_\lambda(A)$.

Доказательство. Пусть $T_1 \neq T_2$ и T_1, T_2 перестановочны. Тогда, если $G_0 = \{0\}$, то из (13) $M_2 = M_1^{-1}$, т. е. $W_{z,\lambda}(T_2) = W_{\lambda,z}^{-1}(T_1)$, и в силу свойства 5) операторов $W_{\lambda,z}$ $T_1 = T_2$, значит, $G_0 \neq \{0\}$. Поскольку выполнено (13), то из замечания 2 следует, что M_1 — изоморфизм $L_{\bar{\lambda}}$, $L_{\bar{z}}$, поэтому $\dim L_{\bar{\lambda}} = \dim L_{\bar{z}} \Rightarrow n_+(A) = n_-(A)$.

Обратно, пусть выполнено (15). Обозначим $F_0 \subseteq G_0$ конечномерное подпространство, $F_0 \neq \{0\}$. Тогда $\dim(\mathfrak{N}_i \ominus F_0) = \dim(\mathfrak{N}_{-i} \ominus F_0)$ и существует допустимая изометрия V из $\mathfrak{N}_i \ominus F_0$ на $\mathfrak{N}_{-i} \ominus F_0$. Положим $M_1 \mid F_0 = M_2 \mid F_0 = iI$, $M_1 \mid (\mathfrak{N}_i \ominus F_0) = V$, $M_2 \mid (\mathfrak{N}_{-i} \ominus F_0) = V^{-1}$. Тогда операторы $M_1 \in \mathfrak{L}(\mathfrak{N}_i, \mathfrak{N}_{-i})$, $M_2 \in \mathfrak{L}(\mathfrak{N}_{-i}, \mathfrak{N}_i)$ — допустимые изометрии, удовлетворяющие (13). По теореме 3 самосопряженные расширения T_1, T_2, соответствующие M_1, M_2 по лемме 2, коммутируют и $T_1 \neq T_2$.

Теорема 5. *Пусть* $T_1, T_2 \in \Omega_z(A)$ $(\operatorname{Im} z \neq 0)$, M_1, $M_2 \in S_{z,\bar{z}}$ — *соответствующие* T_1, T_2 *операторы по лемме* 2. *Для того чтобы* T_1 *и* T_2 *коммутировали, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$\begin{gathered} \operatorname{Ker}(M_1 - M_2) \supseteq \mathfrak{R}_z, \quad \operatorname{Ker}(M_1^* - M_2^*) \supseteq \mathfrak{R}_{\bar{z}}, \\ M_1 P_{\mathfrak{N}_z} M_2 = M_2 P_{\mathfrak{N}_z} M_1. \end{gathered} \tag{16}$$

Доказательство. Из леммы 2 $W_{\bar{z},z}(T_j) = U_{\bar{z},z}(A) P_{\mathfrak{M}_z} + M_j P_{\mathfrak{N}_z}$, $j = 1, 2$. Поэтому $W_{\bar{z},z}(T_1) - W_{\bar{z},z}(T_2) = P_{\mathfrak{M}_z}(M_1 - M_2) P_{\mathfrak{N}_z} + P_{\mathfrak{N}_z}(M_1 - M_2) P_{\mathfrak{N}_z}$. Из равенства

$$(W_{\bar{z},z}(T_1) - W_{\bar{z},z}(T_2)) W_{\bar{z},z}(T_2) = W_{\bar{z},z}(T_2)(W_{\bar{z},z}(T_1) - W_{\bar{z},z}(T_2)), \tag{17}$$

получаем $(M_1 - M_2) P_{\mathfrak{N}_z} U_{\bar{z},z}(A) P_{\mathfrak{M}_z} = 0$. Отсюда с учетом $U_{\bar{z},z}(A)\mathfrak{M}_z = \mathfrak{M}_{\bar{z}}$ и леммы 1 $(M_1 - M_2) \upharpoonright \mathfrak{R}_z = 0$, т. е. $\operatorname{Ker}(M_1 - M_2) \supseteq \mathfrak{R}_z$. Переходя в (17) к сопряженным операторам, получаем аналогично $\operatorname{Ker}(M_1^* - M_2^*) \supseteq \mathfrak{R}_{\bar{z}}$. Поэтому $(M_1 - M_2)\mathfrak{N}_z \subseteq G_0$, используя это включение в других следствиях из (17), получаем $M_1 P_{\mathfrak{N}_z} M_2 = M_2 P_{\mathfrak{N}_z} M_1$. Наоборот, если выполнены (16), то справедливо (17), значит, T_1, T_2 коммутируют.

Теорема 6. *Если при некоторых* z, λ: $\operatorname{Im} z \operatorname{Im} \lambda > 0$ *существуют неравные коммутирующие расширения* $T_1 \in \Omega_z(A)$, $T_2 \in \Omega_\lambda(A)$, *то* $G_0 \neq \{0\}$. *Обратно, если* $G_0 \neq \{0\}$, *то при любых* z, λ: $\operatorname{Im} z \operatorname{Im} \lambda > 0$ *существуют неравные коммутирующие расширения* $T_1 \in \Omega_z(A)$, $T_2 \in \Omega_\lambda(A)$.

Доказательство. Пусть $T_1 \in \Omega_z(A)$, $T_2 \in \Omega_\lambda(A)$, $T_1 \neq T_2$, $\operatorname{Im} \lambda \operatorname{Im} z > 0$. Тогда преобразования $W_{\lambda,z}(T_1)$, $W_{z,\lambda}(T_2)$ в матричной форме имеют вид

$$W_{\lambda,z}(T_1) = \begin{pmatrix} U_{\lambda,z}(A) & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix} : \mathfrak{M}_z \dotplus \mathfrak{N}_\lambda \to \mathfrak{M}_\lambda \dotplus \mathfrak{N}_z;$$

$$W_{z,\lambda}(T_2) = \begin{pmatrix} U_{\lambda,z}^{-1}(A) & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{pmatrix} : \mathfrak{M}_\lambda \dotplus \mathfrak{N}_z \to \mathfrak{M}_z \dotplus \mathfrak{N}_\lambda.$$

Отсюда находим

$$W_{\lambda,z}(T_1)W_{z,\lambda}(T_2) = \begin{pmatrix} I & U_{\lambda,z}(A)S_{12} + M_{12}S_{22} \\ 0 & M_{22}S_{22} \end{pmatrix} : \mathfrak{M}_\lambda \dotplus \mathfrak{N}_z \to \mathfrak{M}_\lambda \dotplus \mathfrak{N}_z,$$

$$W_{z,\lambda}(T_2)W_{\lambda,z}(T_1) = \begin{pmatrix} I & U_{\lambda,z}^{-1}(A)M_{12} + S_{12}M_{22} \\ 0 & S_{22}M_{22} \end{pmatrix} : \mathfrak{M}_z \dotplus \mathfrak{N}_\lambda \to \mathfrak{M}_z \dotplus \mathfrak{N}_\lambda.$$

Следовательно, T_1, T_2 коммутируют в том и только в том случае, когда

$$\Pi_{\mathfrak{M}_\lambda} + (U_{\lambda,z}(A)S_{12} + M_{12}S_{22})\Pi_{\mathfrak{N}_z} + M_{22}S_{22}\Pi_{\mathfrak{N}_z} =$$
$$= \Pi_{\mathfrak{M}_z} + (U_{\lambda,z}^{-1}(A)M_{12} + S_{12}M_{22})\Pi_{\mathfrak{N}_\lambda} + S_{22}M_{22}\Pi_{\mathfrak{N}_\lambda}$$

или

$$(U_{\lambda,z}(A)S_{12} + M_{12}S_{22})\Pi_{\mathfrak{N}_z} + (M_{22}S_{22} - I)\Pi_{\mathfrak{N}_z} =$$
$$= (U_{\lambda,z}^{-1}(A)M_{12} + S_{12}M_{22})\Pi_{\mathfrak{N}_\lambda} + (S_{22}M_{22} - I)\Pi_{\mathfrak{N}_\lambda}. \qquad (18)$$

Пусть T_1, T_2 коммутируют. Тогда из (18) с учетом леммы 1

$$(U_{\lambda,z}^{-1}(A)M_{12} + S_{12}M_{22}) \upharpoonright \mathfrak{R}_\lambda = 0, \quad (S_{22}M_{22} - I) \upharpoonright \mathfrak{R}_\lambda = 0,$$

$$(U_{\lambda,z}(A)S_{12} + M_{12}S_{22}) \upharpoonright \mathfrak{R}_z = 0, \quad (M_{22}S_{22} - I) \upharpoonright \mathfrak{R}_z = 0.$$

Если $G_0 = \{0\}$, то $\mathfrak{N}_\lambda = \mathfrak{R}_\lambda$, $\mathfrak{N}_z = \mathfrak{R}_z$, и следовательно, $W_{\lambda,z}(T_1)W_{z,\lambda}(T_2) = W_{z,\lambda}(T_2)W_{\lambda,z}(T_1) = I$. Тогда из свойства 5) операторов $W_{\lambda,z}$ $T_1 = T_2$, поэтому $G_0 \neq \{0\}$. Обратно, пусть $G_0 \neq \{0\}$. Зафиксировав $z \in \Pi_+ \cup \Pi_-$, положим $M_1 \upharpoonright G_0 = V$, $M_1 \upharpoonright \mathfrak{R}_z = 0$, $M_2 \upharpoonright \mathfrak{N}_z = 0$, где $V \in \mathfrak{L}(G_0, G_0)$ — изометрия, $\operatorname{Ker}(V - I) = \{0\}$. Операторы $M_1, M_2 \in \mathfrak{L}(\mathfrak{N}_z, \mathfrak{N}_{\bar{z}})$ удовлетворяют (16) и являются допустимыми сжатиями, поэтому соответствующие им по лемме 2 расширения $T_1, T_2 \in \Omega_z(A)$ коммутируют и являются максимальными диссипативными (аккумулятивными) операторами, причем $T_1 \neq T_2$. Следовательно, при любом λ таком, что $\operatorname{Im}\lambda \operatorname{Im} z > 0$, имеем также $T_1 \in \Omega_\lambda(A)$.

3. Найдем структуру коммутирующих самосопряженных и нормальных расширений A.

Пусть $G_0 \neq \{0\}$ и $H_0 = H \ominus G_0$. Тогда $\mathfrak{D}(A) \subseteq H_0$, $\mathfrak{R}(A) \subseteq H_0$ и в H_0 оператор A согласно теоремам 4 и 6 не имеет максимальных собственных неравных коммутирующих расширений.

Теорема 7. *Пусть дефектные числа оператора A равны и $G_0 \neq \{0\}$. Тогда неравные самосопряженные расширения A $\{T_j\}_{j=1}^n$ попарно коммутируют в том и только в том случае, когда $\{T_j\}$ имеет вид*

$$T_j = T_0' \oplus \tilde{T}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{19}$$

где T_0' — самосопряженное расширение A в подпространстве $H_0' \supseteq H_0$, $\{\tilde{T}_j\}$ — неравные коммутирующие самосопряженные операторы в подпространстве $F_0 = H \ominus H_0'$.

Доказательство. Если операторы $\{T_j\}_{j=1}^n$ имеют вид (19), то, очевидно, они коммутируют.

Обратно, пусть $\{T_j\}_{j=1}^n$ — неравные попарно коммутирующие самосопряженные расширения A, тогда $T_j \in \Omega_i(A) \cap \Omega_{-i}(A)$ и $\mathfrak{D}\{T_j\} = \mathfrak{D}\{A\} \dotplus (M_j - I)\mathfrak{N}_i = \mathfrak{D}\{A\} \dotplus (M_j^* - I)\mathfrak{N}_{-i}, j = 1, 2, \ldots, n$, где M_j — допустимые изометрические отображения $\mathfrak{N}_i$ на $\mathfrak{N}_{-i}$. По теореме 3 $M_j^* M_k \mid G_0 = M_k M_j^* \mid G_0$, $\operatorname{Ker}(M_j^* M_k - I) \supseteq \mathfrak{R}_i$, $\operatorname{Ker}(M_k M_j^* - I) \supseteq \mathfrak{R}_{-i}$, $j \neq k$. Пусть $L_i(j, k) = \operatorname{Ker}(M_j - M_k)$, $L_{-i}(j, k) = \operatorname{Ker}(M_j^* - M_k^*)$, $j \neq k$. Тогда $L_i(j, k) \supseteq \mathfrak{R}_i$, $L_{-i}(j, k) \supseteq \mathfrak{R}_{-i}$. Обозначим $L_i = \cap \{L_i(j, k), j \neq k\}$, $L_{-i} = \cap \{L_{-i}(j, k), j \neq k\}$. Из свойств операторов $\{M_j\}$ следует, что $L_i \cap G_0 = L_{-i} \cap G_0$, поэтому $\mathfrak{N}_i \ominus L_i = \mathfrak{N}_{-i} \ominus L_{-i} \overset{\text{def}}{=} F_0 \subseteq G_0$.

Поскольку все операторы $\{M_j\}$ совпадают на L_i, то обозначим $U_0 = M_j \mid L_i$. Тогда U_0 — изометрический оператор и $U_0 L_i = L_{-i}$. Пусть $M_j \mid F_0 = U_j \in \mathfrak{L}(F_0, F_0)$. Имеем $U_k U_j = U_j U_k$ $\forall j \neq k$. Полагая $H_0' = H \ominus F_0$, $\mathfrak{D}(T_0') = \mathfrak{D}(A) \dotplus (U_0 - I)L_i$, получаем $T_j \mid H_0' = T_0' = T_0'^*$, $T_j \mid F_0 = \tilde{T}_j = i(U_j + I)(U_j - I)^{-1} \mid F_0$, т. е. выполнено (19).

Теорема 8. *Пусть дефектные числа оператора A равны и $G_0 \neq \{0\}$. Тогда несамосопряженное максимальное собственное расширение T оператора A является нормальным в том и только в том случае, когда*

$$T = T_0' \oplus \tilde{T}, \tag{20}$$

где T_0' — самосопряженное расширение A в подпространстве $H_0' \supseteq H_0$, $\tilde{T}$ — несамосопряженный нормальный оператор в подпространстве $F_0 = H \ominus H_0'$ и $\rho(\tilde{T}) \neq \varnothing$.

Доказательство. Ясно, что если T имеет вид (20), то T — максимальное собственное нормальное расширение A, $T \neq T^*$.

Наоборот, пусть $T \neq T^*$ — максимальное собственное нормальное расширение A. Тогда $T \in \Omega_z(A)$ при некотором

$$z \in \Pi_+ \cup \Pi_-, \quad \mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(A) \dotplus (M - I)\mathfrak{N}_z, \quad \mathfrak{D}(T^*) = \mathfrak{D}(A) \dotplus (M^* - I)\mathfrak{N}_{\bar{z}},$$

$$\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(T^*), \quad M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{N}_z, \mathfrak{N}_{\bar{z}}).$$

По теореме 3 $M^*M \mid G_0 = MM^* \mid G_0$, $L_z = \operatorname{Ker}(M^*M - I) \supseteq \mathfrak{R}_z$, $L_{\bar{z}} = \operatorname{Ker}(MM^* - I) \supseteq \mathfrak{R}_{\bar{z}}$. Отсюда следует, что M отображает изометрически L_z на $L_{\bar{z}}$ и $M^* \mid L_z = M^{-1} \mid L_{\bar{z}}$. Кроме того, $MF_0 \subseteq F_0$, $M^*F_0 \subseteq F_0$. Полагая $H_0' = H \ominus F_0$, $T_0' = T \mid H_0'$, $\tilde{T} = T \mid F_0$, получаем $T_0' \supset A$, $T_0' = T_0'^*$, $\tilde{T}$ — нормальный оператор.

Отметим, что из теорем 7 и 8 получаем структуру неотрицательных самосопряженных коммутирующих и m-секториальных нормальных расширений неотрицательного замкнутого позитивно замыкаемого эрмитова оператора A, критерий существования которых и другое описание получено в [1].

В заключение рассмотрим следующий пример.

Пусть $H = L_2[0, 1]$, $\mathfrak{D}(A) = \{f(x)\colon f(x)$ — абсолютно непрерывна на $[0, 1]$, $f'(x) \in L_2[0, 1]$, $f(0) = f(1)$, $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x f(x)\,dx = 0\}$, $Af = i\dfrac{df}{dx}$, $f \in \mathfrak{D}(A)$.

Оператор A является замкнутым, неплотно заданным эрмитовым с дефектными числами $(2; 2)$ и $G_0 = (H \ominus \mathfrak{D}(A)) \cap (H \ominus A\mathfrak{D}(A)) = \mathfrak{L}_1$, где $\mathfrak{L}_1$ — одномерное подпространство, образованное функциями почти всюду постоянными на $[0, 1]$. Отметим также, что полудефектные числа оператора A равны $(0; 0)$.

Поэтому [10] все максимальные собственные расширения A имеют одну и ту же область определения $\mathfrak{D} = \{f$ — абсолютно непрерывна на $[0, 1]$, $f'(x) \in L_2[0, 1]$, $f(0) = f(1)\}$.

На основании теорем 7 и 8 получаем, что система коммутирующих самосопряженных расширений A имеет вид

$$T_j f = i\frac{df}{dx} + c(2x-1)\int_0^1 (2t-1)f(t)\,dt + b_j \int_0^1 f(t)\,dt, \quad f \in \mathfrak{D},$$

где $\operatorname{Im} c = 0$, $\operatorname{Im} b_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots n$, а несамосопряженное нормальное расширение A имеет вид

$$Tf = i\frac{df}{dx} + c(2x-1)\int_0^1 (2t-1)f(t)\,dt + b\int_0^1 f(t)\,dt, \quad f \in \mathfrak{D}, \quad \text{где } \operatorname{Im} c = 0, \ \operatorname{Im} b \neq 0.$$

1. *Арлинский Ю. М.* О коммутирующих и нормальных расширениях эрмитовых операторов // Изв. вузов. Математика. – 1986. – №12. – С. 3 – 10.
2. *Арлинский Ю. М., Цекановский Э. Р.* Несамосопряженные сжимающие расширения эрмитова сжатия и теоремы М. Г. Крейна // Успехи мат. наук. – 1982. – **37**, №1. – С. 131 – 132.
3. *Шмульян Ю. Л., Яновская Р. Н.* О блоках сжимающей операторной матрицы // Изв. вузов. Математика. – 1981. – №7. – С. 72 – 75.
4. *Arsene Gr., Gheondea A.* Completting matrix contractions // J. Oper. Theory. – 1982. – **7**, №1. – P. 179 – 189.
5. *Davis Ch., Kahan W. M., Weinberger H. E.* Norm preserving dilations and their applications to optimal error bound // SIAM J. Numer. Anal. – 1982. – **19**, №3. – P. 445 – 469.
6. *Арлинский Ю. М.* Сжимающие расширения и обобщенные резольвенты дуальной пары сжатий // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, №2. – С. 247 – 250.
7. *Маламуд М. М.* О расширениях эрмитовых, секториальных операторов и дуальных пар сжатий // Докл. АН СССР. – 1989. – **305**, №1. – С. 35 – 41.
8. *Штраус А. В.* О расширениях и характеристической функции симметрического оператора // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1988. – **32**. – №1. – С. 186 – 207.
9. *Красносельский М. А.* О самосопряженных расширениях эрмитовых операторов // Укр. мат. журн. – 1949. - **1**, №1. – С. 21 – 38.
10. *Цекановский Э. Р., Шмульян Ю. Л.* Теория бирасширений операторов в оснащенных гильбертовых пространствах. Неограниченные операторные узлы и характеристические функции // Успехи мат. наук. – 1977. – **32**, №6. – С. 69 – 124.
11. *Кужель А. В., Руденко Л. И.* Описание правильных расширений эрмитовых операторов // Функцион. анализ и его прил. – 1982. – 16, №1. – С. 74, 75.

Получено 26. 12. 91