УДК 517.944

В. Б. МОСЕЕНКОВ, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН УССР, Киев)

Начально-краевая задача конвекции вязкой слабо сжимаемой жидкости при наличии осевой симметрии. II. Устойчивость обобщенных решений

Продолжается исследование осесимметричной задачи конвекции вязкой термически неоднородной слабо сжимаемой жидкости, заполняющей полость в твердом теле. Доказана теорема о непрерывной зависимости ее обобщенных решений от начальных условий и возмущений. Получены оценки экспоненциального типа, характеризующие затухание решений (в среднем) при больших значениях времени.

Продовжується дослідження осесиметричної задачі конвекції в'язкої термічно неоднорідної слабо стисливої рідини, що заповнює порожнину в твердому тілі. Доведена теорема про неперервну залежність її узагальнених розв'язків від початкових умов та збурень. Одержані оцінки експоненціального типу, які характеризують затухання розв'язків (у середньому) при великих значеннях часу.

4. Данная работа посвящена исследованию вопросов устойчивости обобщенных решений задачи (10)—(16), для которой в [7] установлена глобальная (по времени) теорема существования и единственности.

Теорема 2. *Обобщенное решение задачи* (10) — (16) *непрерывно зависит от данных задачи. А именно, если* $(\psi^{(1)}, \tau^{(1)}, q^{(1)}, u^{(1)})$, $(\psi^{(2)}, \tau^{(2)}, q^{(2)}, u^{(2)})$ *есть два решения задачи* (10) — (16), *отвечающие начальным данным* $(\psi_0^{(1)}, \tau_0^{(1)})$, $(\psi_0^{(2)}, \tau_0^{(2)})$ *и возмущениям* $F_i^{(1)}, F_i^{(2)}$, $i = 1, 2, 3$, *и удовлетворяющие оценкам* (33) — (35), *то для* $\psi = \psi^{(1)} - \psi^{(2)}$, $\tau = \tau^{(1)} - \tau^{(2)}$, $q = q^{(1)} - q^{(2)}$, $u = u^{(1)} - u^{(2)}$ *выполняются оценки*

$$|\psi|^2_{V^{2,0}_{2,0}(\Pi_1^T)} + |\tau|^2_{V^{1,0}_{2,0}(\Pi_2^T)} \leqslant c_1 \left[\left\| \frac{\nabla\psi_0}{r} \right\|^2_{\Pi_1} + \|\tau_0\|^2_{\Pi_2} + \||F_1\||^2_{p_1, \Pi_1^T} + \right.$$

$$\left. + \||F_2\||^2_{p_2, \Pi_2^T} + \varepsilon (\|F_2\|^2_{p_2, 2, \Pi_1^T} + \|F_3\|^2_{p_3, 2, \Pi_1^T}) \right] \equiv W(\psi_0, \tau_0, F), \tag{48}$$

$$\|q\|^2_{(1), \Pi_1^T} \leqslant c_2 [W(\psi_0, \tau_0, F) + \sqrt{W(\psi_0, \tau_0, F)} + \|F_3\|^2_{p_3, 2, \Pi_1^T}], \tag{49}$$

$$\|u\|^2_{(1), \Pi_1^T} \leqslant c_3 [W(\psi_0, \tau_0, F) + \|F_2\|^2_{p_2, 2, \Pi_1^T}], \tag{50}$$

где $F_i = F_i^{(1)} - F_i^{(2)}$, $\psi_0 = \psi_0^{(1)} - \psi_0^{(2)}$, $\tau_0 = \tau_0^{(1)} - \tau_0^{(2)}$, *а константы* c_i *зависят от* $\psi_0^{(j)}, \tau_0^{(j)}, F_i^{(j)}$, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, p, \Pi_1, \Pi_2, \delta$.

Доказательство. Исходя из равенств типа (36)—(39), которые отличаются наличием слагаемых, содержащих F_i, $i = 1, 2, 3$, легко установить оценки, аналогичные (42)—(44):

$$\frac{\bar{\nu}}{2}|\psi|^2_{V^{2,0}_{2,0}(\Pi^{t_2}_{1t_1})} \leqslant \left\|\frac{\nabla\psi}{r}\right\|^2_{\Pi_1}\Big|_{t=t_1} + c_4|\tau|^2_{V^{1,0}_{2,0}(\Pi^{t_2}_{2t_1})} + c_5\mu_1(t_1,t_2)\times$$

$$\times|\psi|^2_{V^{2,0}_{2,0}(\Pi^{t_2}_{1t_1})} + \frac{5\varepsilon}{\alpha}|\tau|^2_{V^{1,0}_{2,0}(\Pi^{t_2}_{2t_1})} + \frac{2\varepsilon}{\alpha}|\psi|^2_{V^{2,0}_{2,0}(\Pi^{t_2}_{1t_1})} + \frac{\varepsilon}{\beta}(\|F_2\|^2_{p_2,2,\Pi^{t_2}_{1t_1}} +$$

$$+ \|F_3\|^2_{p_3,2,\Pi^{t_2}_{1t_1}}) + c_6|||F_1|||^2_{p_1,\Pi^{t_2}_{1t_1}}, \tag{51}$$

где α, β — произвольные константы, которые будут определены ниже, c_4 не зависит от α и β, а c_5 зависит, $\mu_1(t_1, t_2)$ имеет тот же вид, что и в (42);

$$\frac{\bar{\varkappa}}{2}|\tau|^2_{V^{1,0}_{2,0}(\Pi^{t_2}_{2t_1})} \leqslant \|\tau\|^2_{\Pi_2}\big|_{t=t_1} + c_7[\mu_2(t_1,t_2)|\psi|^2_{V^{2,0}_{2,0}(\Pi^{t_2}_{1t_1})} + \mu_3(t_1,t_2)\times$$

$$\times|\tau|^2_{V^{1,0}_{2,0}(\Pi^{t_2}_{2t_1})}] + \frac{2\varepsilon}{\alpha}|\tau|^2_{V^{1,0}_{2,0}(\Pi^{t_2}_{2t_1})} + \frac{\varepsilon}{\alpha}|\psi|^2_{V^{2,0}_{2,0}(\Pi^{t_2}_{1t_1})} +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{\beta}\|F_2\|^2_{p_2,2,\Pi^{t_2}_{1t_1}} + c_8|||F_2|||^2_{p_2,\Pi^{t_2}_{2t_1}}, \tag{52}$$

где c_7 зависит от α и β, а $\mu_2(t_1,t_2)$, $\mu_3(t_1,t_2)$ имеют тот же вид, что и в (43).

Выбрав α равным $4(2\bar{\nu} + 5\bar{\varkappa} + 4c_4)(\overline{\nu\varkappa})^{-1}\varepsilon$, β равным $2(2c_4 + \bar{\nu})\bar{\nu}^{-1}$, из оценок (51), (52) получим неравенство

$$|\psi|^2_{V^{2,0}_{2,0}(\Pi^{t_2}_{1t_1})} + |\tau|^2_{V^{1,0}_{2,0}(\Pi^{t_2}_{2t_1})} \leqslant c_9\left(\left\|\frac{\nabla\psi}{r}\right\|^2_{\Pi_1} + \|\tau\|^2_{\Pi_2}\right)\Big|_{t=t_1} + c_{10}\mu(t_1,t_2)\times$$

$$\times[|\psi|^2_{V^{2,0}_{2,2}(\Pi^{t_2}_{1t_1})} + |\tau|^2_{V^{1,0}_{2,0}(\Pi^{t_2}_{2t_1})}] + c_{11}[|||F_1|||^2_{p_1,\Pi^{t_2}_{1t_1}} + |||F_2|||^2_{p_2,\Pi^{t_2}_{2t_1}} +$$

$$+ \varepsilon(\|F_2\|^2_{p_2,2,\Pi^{t_2}_{1t_1}} + \|F_3\|^2_{p_3,2,\Pi^{t_2}_{1t_1}})], \tag{53}$$

справедливое для всяких t_1, t_2 из $[0, T]$ (здесь $\mu(t_1, t_2)$ имеет вид (44)).

Проводя соответствующее разбиение отрезка $[0, T]$ на k отрезков типа (45), получаем

$$|\psi|^2_{V^{2,0}_{2,0}(\Pi^{t_{i+1}}_{1t_i})} + |\tau|^2_{V^{1,0}_{2,0}(\Pi^{t_{i+1}}_{2t_i})} \leqslant c_{12}\left(\left\|\frac{\nabla\psi}{r}\right\|^2_{\Pi_1} + \|\tau\|^2_{\Pi_2}\right)\Big|_{t=t_i} + v_{i+1}, \tag{54}$$

где

$$v_{i+1} = c_{13}[|||F_1|||^2_{p_1,\Pi^{t_{i+1}}_{1t_i}} + |||F_2|||^2_{p_2,\Pi^{t_{i+1}}_{2t_i}} + \varepsilon(\|F_2\|^2_{p_2,2,\Pi^{t_{i+1}}_{1t_i}} +$$

$$+ \|F_3\|^2_{p_3,2,\Pi^{t_{i+1}}_{1t_i}})], \quad i = 0, 1, \ldots, k-1; \qquad k \leqslant c_{14}(M_1^4 + M_1^2M_2^4 + M_4^2) \equiv M,$$

$$M_s = \max_{j=1,2}\{M_s^{(j)}\}, \quad s = 1, 2, 3, 4,$$

а $M_s^{(j)}$ имеют вид (32) — (34).

Вводя обозначения $\alpha = c_{12}\,(\alpha \geqslant 1)$, $u_{i+1} = |\psi|^2_{V^{2,0}_{2,0}(\Pi^{t_{i+1}}_{1t_i})} + |\tau|^2_{V^{1,0}_{2,0}(\Pi^{t_{i+1}}_{2t_i})}$, $u_0 = \left\|\frac{\nabla\psi_0}{r}\right\|^2_{\Pi_1} + \|\tau_0\|^2_{\Pi_2}$, из (54) получим $u_{i+1} \leqslant \alpha u_i + v_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots$ $\ldots, k-1$, откуда и следует оценка (48):

$$|\psi|^2_{V^{2,0}_{2,0}(\Pi^T_1)} + |\tau|^2_{V^{1,0}_{2,0}(\Pi^T_2)} \leqslant \sum_{i=0}^{k-1} u_{i+1} \leqslant \sum_{i=0}^{k-1}\left(\alpha^{i+1}u_0 + \sum_{l=1}^{i+1}\alpha^{i-l+1}v_l\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha^{k+1} - \alpha}{\alpha - 1}u_0 + \frac{\alpha^k - 1}{\alpha - 1}\sum_{l=1}^{k} v_l$$

(константа c_1 в (48) есть мажоранта $\alpha(\alpha^k - 1)(\alpha - 1)^{-1}$ и $(\alpha^{k-1} - 1) \times \times (\alpha - 1)^{-1} c_{13}$).

Неравенства (49) и (50) следуют из неравенств (25), (48) и свойств монотонности оператора в левой части (13).

Замечание 4. Теорема 2 несколько слабее теоремы 1 [8], где оценка, аналогичная (48), доказана для $V_{2,0}^{3,0}(\Pi_1^T)$-норм функции тока ψ.

Теорема 3. *Если*

$$\int_0^\infty \| F_i \|_{p_i, \Pi_i}^{\frac{2p_i}{3p_i-2}} dt < \infty \quad 1 < p_i \leqslant 2, \quad i = 1, 2, \tag{55}$$

то обобщенное решение (ψ, τ) *задачи* (10)—(16) *асимптотически устойчиво, т. е.*

$$\lim_{t\to\infty} \| \psi \|_{(2), \Pi_1} = \lim_{t\to\infty} \| \tau \|_{\Pi_2} = 0$$

для всяких φ_0, τ_0, F, *удовлетворяющих условию* $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0(\overline{M})$ (*см.* (33)—(35)). *Кроме того, если* $F_i \in L_{p_i, \frac{2p_i}{3p_i-2}}(\Pi_i^\infty) \cap L_{p_i,2}(\Pi_i^\infty)$, $i = 1, 2$, $F_3 \in L_{p_3,2}(\Pi_1^\infty)$, *то найдутся положительные константы* C_i, $i = 1, 2, 3, 4$, *для которых при условии, что*

$$C_\varepsilon \equiv C_0 - \varepsilon^2 C_4 M_2 > 0 \quad (M_2 = M_2(\infty), \quad C_0 = \min\{C_1, C_2\}),$$

выполняются неравенства

$$\| \psi \|_{(2),\Pi_1}^2 \leqslant E_1 \| \psi_0 \|_{(2),\Pi_1}^2 [e^{-C_1 t} + \varepsilon^2 e^{-C_\varepsilon t} P_{11}(\varepsilon, t)] + E_2 \| \tau_0 \|_{\Pi_2}^2 P_{12}(\varepsilon, t) \times \times e^{-C_\varepsilon t} + S_1(\varepsilon, t, F), \tag{56}$$

$$\| \tau \|_{\Pi_2}^2 \leqslant E_3 \| \tau_0 \|_{\Pi_2}^2 [e^{-C_2 t} + \varepsilon^2 e^{-C_\varepsilon t} P_{21}(\varepsilon, t)] + \varepsilon^2 E_4 \| \psi_0 \|_{(2),\Pi_1}^2 e^{-C_\varepsilon t} + S_2(\varepsilon, t, F), \tag{57}$$

где $E_i = E_i(\varepsilon)$, $E(0) = 1$, $i = 1, 2, 3, 4$, $P_{ij}(\varepsilon, t)$ — *полином j-го порядка по* t, $i, j = 1, 2$, $F = (\| F_1 \|_{p_1,\Pi_1}^2, \| F_2 \|_{p_2,\Pi_2}^2, \| F_3 \|_{p_3,\Pi_1})$; S_1 *и* S_2 *таковы, что*

$$\lim_{t\to\infty} S_1(\varepsilon, t, F) = c_{14} \lim_{t\to\infty} (\| F_1 \|_{p_1,\Pi_1}^2 + \| F_2 \|_{p_2,\Pi_2}^2 + \| F_3 \|_{p_3,\Pi_1}^2), \tag{58}$$

$$\lim_{t\to\infty} S_2(\varepsilon, t, F) = c_{15} \lim_{t\to\infty} [\| F_2 \|_{p_2,\Pi_2}^2 + \varepsilon^2 (\| F_1 \|_{p_1,\Pi_1}^2 + \| F_3 \|_{p_3,\Pi_1}^2)], \tag{59}$$

если пределы справа существуют.

Доказательство. Асимптотическая устойчивость (ψ, τ) следует из теоремы 1 (неравенств (35) при $T = \infty$) и неравенства Пуанкаре:

$$\int_0^\infty \| \psi \|_{(2),\Pi_1}^2 dt \leqslant c_{16} \| \psi \|_{(3),\Pi_1^\infty}^2 \leqslant 2M_1, \qquad \int_0^\infty \| \tau \|_{\Pi_2}^2 dt \leqslant c_{17} \| \tau \|_{(1),\Pi_2^\infty}^2 \leqslant 2M_2.$$

В силу теоремы 1 решение (ψ, τ) удовлетворяет энергетическим равенствам

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \psi \|_{(2),\Pi_1}^2 + \int_{\Pi_1} \nu \left| \nabla \left(\frac{D\psi}{r^2} \right) \right|^2 r dr dz = \int_{\Pi_1} \left\{ \nu_r \left| \frac{D\psi}{r^2} \right|^2 + \tau \left(\frac{D\psi}{r^2} \right)_r + \right. \\ + [\varepsilon^{-1} \rho(\varepsilon\tau) - \tau] \left(\frac{D\psi}{r^2} \right)_r + \varepsilon \left[(U(\psi, \tau) + V(\psi, u)) \cdot \nabla \left(\frac{D\psi}{r^2} \right) + \right. \\ \left. \left. + (\varepsilon^{-1} F_1 - \partial(q, \tau)) \frac{D\psi}{r^2} \right] \right\} dr dz, \tag{60}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \tau \|_{\Pi_2}^2 + \int_{\Pi_2} \varkappa(\varepsilon\tau, \varepsilon\nabla\tau) | \nabla\tau |^2 r dr dz = \int_{\Pi_2} [F_2 + \varepsilon(\Phi_1(\psi) - \nabla u \cdot \nabla\tau)] \tau r dr dz \tag{61}$$

при почти всех t из $[0, \infty)$.

Оценивая правую часть (60), в силу неравенства

$$\| q \|_{(1),\Pi_1} \leqslant c_{18} [\| \tau \|_{\Pi_2} + \| \psi \|^{3/2}_{(2),\Pi_1} \| \psi \|^{1/2}_{(3),\Pi_1} + \| F_3 \|_{p_3,\Pi_1}], \tag{62}$$

которое справедливо при почти всех t и следует из оценки типа (24), и неравенства

$$\| \tau \|_{2(\gamma_1+1),\Pi_1} \leqslant c_{19} \| \tau \|^{\frac{1}{2}}_{\Pi_1} \| \nabla\tau \|^{\frac{2\gamma-\gamma_1+1}{2(\gamma_1+1)\gamma}}_{\Pi_1} \| \nabla\tau \|^{\frac{(\gamma_1-1)(\gamma+1)}{2(\gamma_1+1)\gamma}}_{2+2\gamma,\Pi_1} + \| \tau \|^{\frac{\gamma_1}{\gamma_1+1}}_{\Pi_2} \| \nabla\tau \|^{\frac{1}{\gamma_1+1}}_{\Pi_2}, \tag{63}$$

которое выводится аналогично (21), получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \psi \|^2_{(2),\Pi_1} + \nu_0 \| \psi \|^2_{(3),\Pi_1} \leqslant c_{20} [\varepsilon \| \tau_r \|_{\Pi_1} \| \psi \|_{(2),\Pi_1} \| \psi \|_{(3),\Pi_1} +$$

$$+ \| \tau \|_{\Pi_1} \| \psi \|_{(3),\Pi_1} + \varepsilon^{\gamma_1} \| \psi \|_{(3),\Pi_1} (\| \tau \|^{\frac{\gamma_1+1}{2}}_{\Pi_1} \| \nabla\tau \|^{\frac{2\gamma-\gamma_1+1}{2\gamma}}_{\Pi_1} \| \nabla\tau \|^{\frac{(\gamma_1-1)(\gamma+1)}{2\gamma}}_{2+2\gamma,\Pi_1} +$$

$$+ \| \tau \|^{\gamma_1}_{\Pi_2} \| \nabla\tau \|_{\Pi_2}) + \varepsilon \| \psi \|^{3/2}_{(3),\Pi_1} \| \psi \|^{1/2}_{(2),\Pi_1} (\| \nabla\tau \|_{4,\Pi_1} + \| \nabla u \|_{4,\Pi_1}) +$$

$$+ \varepsilon (\| \tau \|_{\Pi_2} + \| \psi \|^{3/2}_{(2),\Pi_1} \| \psi \|^{1/2}_{(3),\Pi_1} + \| F_3 \|_{p_3,\Pi_1}) \| \psi \|^{1/2}_{(2),\Pi_1} \| \psi \|^{1/2}_{(3),\Pi_1} \| \nabla\tau \|_{4,\Pi_1} +$$

$$+ \| F_1 \|_{p_1,\Pi_1} \| \psi \|_{(3),\Pi_1}] \leqslant \frac{\nu_0}{2} \| \psi \|^2_{(3),\Pi_1} + c_{21} (\| \tau \|^2_{\Pi_1} + \| F_1 \|^2_{p_1,\Pi_1} +$$

$$+ \| F_3 \|^2_{p_3,\Pi_1}) + \varepsilon c_{22} [\varepsilon \| \tau \|^2_{(1),\Pi_1} \| \psi \|^2_{(2),\Pi_1} + \varepsilon^{2\gamma_1-1} (\| \tau \|^{\gamma_1-1}_{\Pi_1} \| \nabla\tau \|^{\frac{2\gamma-\gamma_1+1}{\gamma}}_{\Pi_1} \times$$

$$\| \nabla\tau \|^{\frac{(\gamma_1-1)(\gamma+1)}{\gamma}}_{2+2\gamma,\Pi_1} + \| \tau \|^{2(\gamma_1-1)}_{\Pi_2} \| \nabla\tau \|^2_{\Pi_2}) \| \tau \|^2_{\Pi_2} + \varepsilon^3 (\| \nabla\tau \|^4_{4,\Pi_1} + \| \nabla u \|^4_{4,\Pi_1}) \times$$

$$\times \| \psi \|^2_{(2),\Pi_1} + \varepsilon \| \psi \|_{(3),\Pi_1} \| \nabla\tau \|^2_{4,\Pi_1} \| \psi \|^3_{(2),\Pi_1},$$

откуда

$$\frac{d}{dt} \| \psi \|^2_{(2),\Pi_1} + c_{23} \| \psi \|^2_{(2),\Pi_1} \leqslant c_{24} (\| \tau \|^2_{\Pi_1} + \| F_1 \|^2_{p_1,\Pi_1} + \| F_3 \|^2_{p_3,\Pi_1}) +$$

$$+ \alpha_1(t) \| \psi \|^2_{(2),\Pi_1} + \beta_1(t) \| \tau \|^2_{\Pi_2}, \tag{64}$$

где

$$\alpha_1(t) = c_{25} [\varepsilon^2 \| \tau \|^2_{(1),\Pi_1} + \varepsilon^4 (\| \nabla\tau \|^4_{4,\Pi_1} + \| \nabla u \|^4_{4,\Pi_1}) + \varepsilon^2 \| \psi \|_{(3),\Pi_1} \times$$

$$\times \| \psi \|_{(2),\Pi_1} \| \nabla\tau \|^2_{4,\Pi_1}],$$

$$\beta_1(t) = c_{25} [\| \tau \|^{\gamma_1-1}_{\Pi_1} \| \nabla\tau \|^{\frac{2\gamma-\gamma_1+1}{\gamma}}_{\Pi_1} \| \nabla\tau \|^{\frac{(\gamma_1-1)(\gamma+1)}{\gamma}}_{2+2\gamma,\Pi_1} + \| \tau \|^{2(\gamma_1-1)}_{\Pi_2} \| \nabla\tau \|^2_{\Pi_2}].$$

Аналогично оценивая в (61) имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \tau \|^2_{\Pi_2} + \varkappa_0 \| \tau \|^2_{(1),\Pi_2} \leqslant c_{26} (\| F_2 \|_{p_2,\Pi_2} \| \tau \|_{(1),\Pi_2} + \varepsilon \| \psi \|_{(2),\Pi_1} \times$$

$$\times \| \psi \|_{(3),\Pi_1} \| \tau \|_{(1),\Pi_2} + \varepsilon \| \tau \|^{3/2}_{(1),\Pi_2} \| \tau \|^{1/2}_{\Pi_2} \| \nabla u \|_{4,\Pi_1} \leqslant \frac{\varkappa_0}{2} \| \tau \|^2_{(1),\Pi_2} +$$

$$+ c_{27} (\| F_2 \|^2_{p_2,\Pi_2} + \varepsilon^2 \| \psi \|^2_{(3),\Pi_1} \| \psi \|^2_{(2),\Pi_1} + \varepsilon^4 \| \nabla u \|^4_{4,\Pi_1} \| \tau \|^2_{\Pi_2}),$$

откуда

$$\frac{d}{dt} \| \tau \|^2_{\Pi_2} + c_{28} \| \tau \|^2_{\Pi_2} \leqslant c_{29} \| F_2 \|^2_{p_2,\Pi_2} + \alpha_2(t) \| \psi \|^2_{(2),\Pi_1} + \beta_2(t) \| \tau \|^2_{\Pi_2}, \tag{65}$$

где $\alpha_2(t) = \varepsilon^2 c_{30} \| \psi \|^2_{(3),\Pi_1}$, $\beta_2(t) = \varepsilon^4 c_{31} \| \nabla u \|^4_{4,\Pi_1} \leqslant \alpha_1(t)$.

Итак, получена система дифференциальных неравенств

$$dv/dt + C_1(t) v \leqslant C_3(t) u + f_1, \tag{66}$$

$$du/dt + C_2(t) u \leqslant \varepsilon^2 w v + f_2, \tag{67}$$

где

$$v(t) = \|\psi\|^2_{(2),\Pi_1}, \quad u(t) = \|\tau\|^2_{\Pi_2}, \quad C_1(t) = C_1 - \alpha_1(t),$$

$$C_2(t) = C_2 - \beta_2(t), \quad C_3(t) = C_3 + \beta_1(t) \quad (C_1 = c_{23}, \quad C_2 = c_{28}, \quad C_3 = c_{24}),$$

$$\omega(t) = c_{30}\|\psi\|^2_{(3),\Pi_1}, \quad f_1(t) = c_{24}(\|F_1\|^2_{p_1,\Pi_1} + \|F_3\|^2_{p_3,\Pi_1}),$$

$$f_2(t) = c_{29}\|F_2\|^2_{p_2,\Pi_2}.$$

Введем обозначения

$$C(t) = C_0 - \alpha_1(t), \quad \varepsilon_1 = \varepsilon^2 \int_0^\infty \omega(t)\,dt, \quad \varepsilon_2 = \int_0^\infty \alpha_1(t)\,dt, \quad \varepsilon_2 = \int_0^\infty \beta_1(t)\,dt,$$

$$\varepsilon_4 = \int_0^\infty \beta_2(t)\,dt$$

и покажем, что ε_i существуют. Действительно, в силу теоремы 1 имеем

$$\varepsilon_4 \leqslant \varepsilon_1 = \varepsilon^2 c_{30}\|\psi\|^2_{(3),\Pi_1^\infty} \leqslant 2\varepsilon^2 c_{30} M_2,$$

$$\varepsilon_2 \leqslant c_{25}[\varepsilon^2\|\tau\|^2_{(1),\Pi_2^\infty} + \varepsilon^4(\|\nabla\tau\|^4_{4,\Pi_1^\infty} + \|\nabla u\|^4_{4,\Pi_1^\infty}) +$$

$$+ \varepsilon^2 \max_{0\leqslant t}\|\psi\|_{(2),\Pi_1}\|\psi\|_{(3),\Pi_1^\infty}\|\nabla\tau\|^2_{4,\Pi_1^\infty}] \leqslant \varepsilon^2 c_{31}(M_1 + M_4 + M_1^{1/2}M_2),$$

$$\varepsilon_3 \leqslant \varepsilon^{2\nu_1} c_{25} \max_{0\leqslant t}(\|\tau\|^{\nu_1-1}_{\Pi_1}\|\nabla\tau\|^{\frac{2\nu-\nu_1+1}{\nu}}_{\Pi_1^\infty}\|\nabla\tau\|^{\frac{(\nu_1-1)(\nu+1)}{\nu}}_{2+2\nu,\Pi_1^\infty} + \|\tau\|^{2(\nu_1-1)}_{\Pi_2}\|\nabla\tau\|^2_{\Pi_2^\infty}) \leqslant$$

$$\leqslant c_{32}(\varepsilon^{\nu_1+1}M_1^{\frac{\nu_1+1}{2}} + \varepsilon^{2\nu_1}M_1^{\nu_1}),$$

где $M_i = M_i(\infty)$ (см. (32) — (34)).

Из неравенства (66) получим

$$\frac{d}{dt}\left(ve^{\int_0^t C_1(\xi)d\xi}\right) \leqslant C_3(t)\,u(t)\,e^{\int_0^t C_1(\xi)d\xi} + f_1(t)\,e^{\int_0^t C_1(\xi)d\xi},$$

откуда

$$v(t) \leqslant v(0)\,e^{-\int_0^t C_1(\xi)d\xi} + e^{-\int_0^t C_1(\xi)d\xi}\int_0^t f_1(\xi)\,e^{\int_0^\xi C_1(\sigma)d\sigma}\,d\xi +$$

$$+ e^{-\int_0^t C_1(\xi)d\xi}\int_0^t C_3(\xi)\,u(\xi)\,e^{\int_0^\xi C_1(\sigma)d\sigma}\,d\xi. \tag{68}$$

Из неравенств (67), (68) имеем

$$\frac{d}{dt}\left(ue^{\int_0^t C_2(\xi)d\xi}\right) \leqslant \varepsilon^2\omega(t)\,e^{\int_0^t [C_2(\xi)-C_1(\xi)]d\xi}\left[v(0) + \int_0^t f_1(\xi)\,e^{\int_0^\xi C_1(\sigma)d\sigma}\,d\xi +\right.$$

$$\left. + \int_0^t C_3(\xi)\,u(\xi)\,e^{\int_0^\xi C_1(\sigma)d\sigma}\,d\xi\right] + f_2(t)\,e^{\int_0^t C_2(\xi)d\xi},$$

откуда следует оценка

$$u(t) \leqslant e^{-\int_0^t C_2(\xi)d\xi}\left\{u(0) + \int_0^t f_2(\xi)\,e^{\int_0^\xi C_2(\sigma)d\sigma}\,d\xi + \varepsilon^2 v(0)\int_0^t \omega(\xi) \times\right.$$

$$\times e^{\int\limits_0^{\xi}[G_2(\sigma)-G_1(\sigma)]d\sigma} d\xi + \varepsilon^2 \int\limits_0^t \omega(\xi) e^{\int\limits_0^{\xi}[G_2(\sigma)-G_1(\sigma)]d\sigma} \int\limits_0^{\xi} f_1(\sigma) e^{\int\limits_0^{\sigma} C_1(\xi)d\xi} d\sigma d\xi +$$

$$+ \varepsilon^2 \int\limits_0^t \omega(\xi) e^{\int\limits_0^{\xi}[C_2(\sigma)-C_1(\sigma)]d\sigma} \int\limits_0^{\xi} C_3(\sigma) u(\sigma) e^{\int\limits_0^{\sigma} C_1(\xi)d\xi} d\sigma d\xi \leqslant f(t) +$$

$$+ \varepsilon_1 e^{-\int\limits_0^t C(\xi)d\xi} \int\limits_0^t C_3(\xi) u(\xi) e^{\int\limits_0^{\xi} C(\sigma)d\sigma} d\xi, \qquad (69)$$

где

$$f(t) = e^{-\int\limits_0^t C_2(\xi)d\xi} \left[u(0) + \int\limits_0^t f_2(\xi) e^{\int\limits_0^{\xi} C_2(\sigma)d\sigma}\right] +$$

$$+ \varepsilon_1 e^{-\int\limits_0^t C(\xi)d\xi} \left[v(0) + \int\limits_0^t f_1(\xi) e^{\int\limits_0^{\xi} C(\sigma)d\sigma} d\xi\right].$$

Введем функцию

$$U(t) = \int\limits_0^t C_3(\xi) u(\xi) e^{\int\limits_0^{\xi} C(\sigma)d\sigma}$$

и перепишем неравенство (69) в виде

$$\frac{dU}{dt} - \varepsilon_1 C_3(t) U \leqslant C_3(t) f(t) e^{\int\limits_0^t G(\xi)d\xi},$$

откуда

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\varepsilon_1 \int\limits_0^t C_3(\xi)d\xi} U(t)\right) \leqslant C_3(t) f(t) e^{\int\limits_0^t [C(\xi)-\varepsilon_1 C_3(\xi)]d\xi}$$

и, следовательно,

$$U(t) \leqslant e^{\varepsilon_1 \int\limits_0^t C_3(\xi)d\xi} \int\limits_0^t C_3(\xi) f(\xi) e^{\int\limits_0^{\xi}[C(\sigma)-\varepsilon_1 C_3(\sigma)]d\sigma} d\xi. \qquad (70)$$

Из неравенств (69), (70) и оценки $C_0 - \varepsilon_1 C_3 > 0$ ($C_4 = 2\, C_2 c_{30}$) окончательно получим

$$u(t) \leqslant f(t) + \varepsilon_1 e^{-\int\limits_0^t [C(\xi)-\varepsilon_1 C_3(\xi)]d\xi} \int\limits_0^t C_3(\xi) f(\xi) e^{\int\limits_0^{\xi}[C(\sigma)-\varepsilon_1 C_3(\sigma)]d\sigma} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant u(0) e^{-(C_0-\varepsilon_1 C_3)t} \left[e^{(C_0-C_2-\varepsilon_1 C_3)t+\varepsilon_2} + \varepsilon_1 C_3 e^{\varepsilon_2+\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_3} \frac{1-e^{(C_0-C_2-\varepsilon_1 C_3)t}}{C_2 - C_0 + \varepsilon_1 C_3} +\right.$$

$$\left.+ \varepsilon_1 \varepsilon_3 e^{\varepsilon_2+\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_3}\right] + \varepsilon_1 v(0) e^{-(C_0-\varepsilon_1 C_3)t} [e^{-\varepsilon_1 C_3 t+\varepsilon_4} + e^{\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_3} + \varepsilon_1\varepsilon_3 e^{\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_3}] +$$

$$+ e^{-C_2 t+\varepsilon_4} \int\limits_0^t f_2(\xi) e^{C_2\xi} d\xi + e^{\varepsilon_2+\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_3} \varepsilon_1 \left(\varepsilon_3 + \frac{C_3}{C_2 - C_0 + \varepsilon_1 C_3}\right) e^{-(C_0-\varepsilon_1 C_3)t} \times$$

$$\times \int_0^t f_2(\xi) e^{(C_0-\varepsilon_1 C_3)t} d\xi + \varepsilon_1 \Big[e^{-C_0 t+\varepsilon_2} \int_0^t f_1(\xi) e^{C_0(\xi)} d\xi + e^{\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_3} (C_3+\varepsilon_1\varepsilon_3) \times$$

$$\times e^{-(C_0-\varepsilon_1 C_3)t} \int_0^t f_1(\xi) e^{(C_0-\varepsilon_1 C_3)\xi} d\xi \Big],$$

откуда в силу очевидного неравенства

$$te^{-\max\{\alpha,\beta\}t} \leqslant (\alpha-\beta)^{-1}(e^{-\beta t}-e^{-\alpha t}) \leqslant te^{-\min\{\alpha,\beta\}t}, \quad t \geqslant 0, \qquad (71)$$

справедливого для всяких положительных констант α и β, следует оценка (57).

Последнее неравенство для $u(t)$ вместе с (68) и (71) приводит к оценке (56).

Замечание 5. Из неравенств (56), (57) при условии, что пределы в правых частях (58), (59) существуют, следуют оценки

$$\lim_{t\to\infty} \|\psi\|^2_{(2),\Pi_1} \leqslant c_{14} \lim_{t\to\infty} (\|F_1\|^2_{p_1,\Pi_1} + \|F_2\|^2_{p_2,\Pi_2} + \|F_3\|^2_{p_3,\Pi_1}), \qquad (72)$$

$$\lim_{t\to\infty} \|\tau\|^2_{\Pi_2} \leqslant c_{15} \lim_{t\to\infty} [\|F_2\|^2_{p_2,\Pi_2} + \varepsilon^2 (\|F_1\|^2_{p_1,\Pi_1} + \|F_3\|^2_{p_3,\Pi_1})]. \qquad (73)$$

Замечание 6. Для несжимаемой жидкости ($u \equiv 0$ в (9)) в силу соотношений

$$\|\omega\|^2_{\Pi_1} = \int_{\Pi_1} (|v^r_r|^2 + |v^z_z|^2 + |v^r_z|^2 + |v^z_r|^2 + |r^{-1}v^r|^2)\, rdrdz,$$

$$\left\| \frac{\nabla\psi}{r} \right\|^2_{\Pi_1} \leqslant c_{33} \|\omega\|^2_{\Pi_1} \leqslant c_{34} \|\psi\|^2_{(2),\Pi_1}, \quad \psi \in \mathring{W}^{(3)}_{2,0}(\Pi_1),$$

из оценки (56) следует асимптотическая устойчивость скорости жидкости и ее экспоненциальное затухание (в среднем) при $t \to \infty$.

Для слабо сжимаемой жидкости скорость (9) таким свойством, вообще говоря, не обладает, хотя $\operatorname{rot} v = (0,\ r^{-1}D\psi,\ 0)$ экспоненциально затухает при больших t.

7. *Мосеенков В. Б.* Начально-краевая задача конвекции вязкой слабо сжимаемой жидкости при наличии осевой симметрии. I. Однозначная разрешимость в целом // Укр. мат. журн.— 1990.— 42, № 12.— С. 1664—1672.
8. *Мосеенков В. Б.* Об устойчивости решений осесимметричной задачи конвекции вязкой жидкости // Там же.— 1989.— 41, № 2.— С. 182—188.

Получено 11.04.90