УДК 517.5

Г. Р. Белицкий

О конечной определенности формальных отображений

Цель заметки — получение критерия конечной определенности формальных отображений в терминах оператора, сопряженного к инфинитезимальному.

Пусть $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $K[n, p]$ — пространство формальных отображений $F: K^n \to K^p$, $G[n, p]$ — группа всех контактных преобразований в $K[n, p]$. В [1] доказано, что для k-определенности отображения $F \in K[n, p]$ относительно «подгруппы Ли» $G \subset G[n, p]$ необходимо и достаточно, чтобы уравнение $S'_F(e)\lambda = \tau$ имело решение $\lambda \in \mathfrak{L}(G)$ для любого $\tau \in K[n, p]$ с нулевой k-струей. Здесь $S'_F(e): \mathfrak{L} \to K[n, p]$ — производная в единице $e \in G$ орбитного отображения $S_F(g) = gF$, $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(G)$ — алгебра Ли группы G.

Пусть P_i, Q_i — естественные проекторы в $K[n, p]$ и $\mathfrak{L}(G)$ на подпространство i-струй, т. е. полиномиальных отображений степени $\leqslant i$. Положим $L_i = P_i K[n, p]$, $\mathfrak{L}_i = Q_i \mathfrak{L}$. Предполагается, что $\mathfrak{L}_i \subset \mathfrak{L}$. Пусть также $L^{(i)}$, $\mathfrak{L}^{(i)}$ — соответствующие пространства однородных отображений: $L^{(i)} = (P_i - P_{i-1}) L$, $\mathfrak{L}^{(i)} = (Q_i - Q_{i-1}) \mathfrak{L}$. Введем в L_i и $\mathfrak{L}_i$ скалярные произведения (см. [1]). При этом $L^{(i)} \perp L^{(j)}$, $i \neq j$. Из ортогональности пространств $L^{(i)}$ и $L^{(j)}$ вытекает, что $(P_i S'_F(e) Q_i)^* h = (P_j S'_F(e) Q_j)^* h$, $j \geqslant i$, $h \in L_i$. Поэтому для каждого $h \in K_\infty[n, p] \overset{\text{def}}{=} \bigcup L_i$ можно положить $(S'_F(e))^* h \overset{\text{def}}{=} (P_j S'_F(e) Q_j)^* h$, $j \geqslant \deg h$.

Теорема. *Для конечной определенности отображения $F \in K[n, p]$ необходимо и достаточно, чтобы ядро оператора $(S'_F(e))^*: K_\infty[n, p] \to \mathfrak{L}_\infty = \bigcup \mathfrak{L}_i$ было конечномерным.*

Доказательство. Пусть ряд F k-определен. Так как

$$L_i = \operatorname{Im} P_i S'_F(e) Q_i \oplus \operatorname{Ker}(P_i S'_F(e) Q_i)^*, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

то

$$\dim \operatorname{Ker}(P_i S'_F(e) Q_i)^* = \dim L_i - \dim \operatorname{Im} P_i S'_F(e) Q_i.$$

Если $i \geqslant k + 1$, то

$$L_{i,k} = \{h \in L_i \mid P_k h = 0\} \subset \operatorname{Im} P_i S'_F(e) Q_i.$$

Поэтому $\dim \operatorname{Im} P_i S'_F(e) Q_i \geqslant \dim L_{i,k} = \dim L_i - \dim L_k$, т. е.

$$\dim \operatorname{Ker}(P_i S'_F(e) Q_i)^* \leqslant \dim L_k.$$

Следовательно,

$$\dim \operatorname{Ker}(S'_F(e))^* = \sup_i \operatorname{Ker}(P_i S'_F(e) Q_i)^* \leqslant \dim L_k.$$

Обратно, пусть $\dim \operatorname{Ker}(S'_F(e))^* < \infty$. Тогда имеет место разложение в прямую сумму

$$K[n, p] = \operatorname{Im} S'_F(e) + \operatorname{Ker}(S'_F(e))^*. \tag{1}$$

В самом деле, пусть $\tau \in K[n, p]$. Тогда при любом $i = 1, 2, \ldots$

$$P_i \tau = P_i S'_F(e) Q_i \lambda_i + P_i v_i,$$

$\lambda_i \in \mathfrak{L}_i$, $v_i \in \operatorname{Ker}(P_i S'_F(e) Q_i)^* \cap L_i$. По теореме Ленга [2] существуют такие $\lambda \in \mathfrak{L}$, $v \in \operatorname{Ker}(S'_F(e))^*$, что

$$P_i \tau = P_i S'_F(e) Q_i \lambda + P_i v, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Иными словами, $\tau = S'_F(e)\lambda + v$, что и доказывает (1).

Пусть теперь $h_1, \ldots, h_q$ — базис пространства $\operatorname{Ker}(S_F(e))^*$ и $k = \max \deg h_i$. Если $P_k \tau = 0$ и $\tau = S'_F(e)\lambda + v$, $v \in \operatorname{Ker}(S'_F(e))^*$, то $0 = P_k S'_F(e) Q_k \lambda + P_k v = P_k S'_F(e) Q_k \lambda + v$. Следовательно, $v \in \operatorname{Im} P_k S'_F(e) Q_k \cap \operatorname{Ker}(P_k S'_F(e) Q_k)^*$, т. е. $v = 0$ и $\tau \in \operatorname{Im} S'_F(e)$. Итак, F k-определен. Теорема доказана.

Операторы $(S'_F(e))^*$ легко вычисляются для любой подгруппы G и всегда являются дифференциальными операторами с полиномиальными коэффициентами.

Для их вычисления заметим, что группа $G[n, p]$ — прямое произведение группы преобразований в прообразе $G_r = \{g = (x + \varphi(x); y)\}$ и группы $\tilde{G}_e = \{g = (x; y + \psi(x, y)\}$. Для группы G_r имеем

$$(S_F'(e))^* h = (F'(\partial/\partial x))^* h, \quad h \in K_\infty[n, p],$$

а для группы $\tilde{G}_l$ —

$$((S_F'(e))^* h)(x, y) = \sum_I \frac{y^I}{I!} \overline{F}^I \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) h(x).$$

(Здесь звездочка и черта означают комплексное сопряжение.) Для получения оператора $(S_F'(e))^*$ относительно подгруппы $G \subset G_r \times \tilde{G}_l$ следует спроектировать оператор $(Th)(x, y) = \left(\left(F'\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)^* h(x), \sum_I \frac{y^I}{I!} \overline{F}^I \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) h(x)\right)$ на алгебру Ли группы G.

Таким образом, для конечной определенности ряда $F \in K[n, p]$ относительно всей группы контактных преобразований необходимо и достаточно, чтобы пространство полиномиальных решений системы уравнений $F'(\partial/\partial x) h = 0$, $\overline{F}^I(\partial/\partial x) h = 0$, $I = (I_1, \ldots, I_n)$, $I_\nu = 0, 1, 2, \ldots$, было конечномерным. Для конечной определенности относительно подгруппы G_r преобразований в прообразе необходима и достаточна конечномерность пространства решений уравнений $(F'(\partial/\partial x))^* h = 0$. В случае группы G_l преобразований в образе следует потребовать конечномерности пространства решений системы $\overline{F}^I(\partial/\partial x) h(x)|_{x=0} = 0$, $I = (I_1, \ldots, I_n)$, $I_\nu = 0, 1, \ldots$. Для группы G_{er} преобразований в образе — прообразе следует рассмотреть систему $(F'(\partial/\partial x))^* h = 0$, $\overline{F}^I(\partial/\partial x) h(x)|_{x=0} = 0$, $I = (I_1 \ldots, I_n)$, $I_\nu = 0, 1, \ldots$.

Для формальных векторных полей $F \in K[n, n]$ оператор $(S_F'(e))^*$ имеет вид

$$((S_F'(e))^* h)(x) = (F'(\partial/\partial x))^* h(x) - x(\overline{F}(\partial/\partial x) \otimes h(x)),$$

где $(\overline{F}(\partial/\partial x) \otimes h(x))_{i,j} = \overline{F}_i(\partial/\partial x) h_j(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$, F_i, h_j — координаты векторов $F = (F_1, \ldots, F_n)$ и $h = (h_1, \ldots, h_n)$ соответственно.

Если $G = G_c = \{(\Phi(x), \Phi(y)\}$, то

$$((S_F'(e))^* h)(x) = \left(F'\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)^* h(x) - \sum_I \frac{x^I}{I!} \overline{F}^I \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) h(x)|_{x=0}.$$

Укажем еще сопряженный оператор для группы преобразований внешних дифференциальных p-форм. Рассмотрим p-форму θ. Алгебру Ли соответствующей группы можно отождествить с пространством $K[n, n]$.

Если $\gamma = \sum_{\mathcal{T}} \gamma_{\mathcal{T}} dx^{\mathcal{T}}$, $\gamma_{\mathcal{T}} \in K_\infty[n, 1]$, — другая p-форма, то

$$((S_\theta'(e))^* \gamma)(x) = \sum (\theta_{\mathcal{T}}(\partial/\partial x))^* \gamma_{\mathcal{T}}(x) + \left\{\sum_{l,L} x_l \overline{\theta}_{j,L}(\partial/\partial x) \gamma_{l,L}(x)\right\}_{j=1}^n,$$

$$L = (L_1, \ldots, L_{k-1}).$$

П р и м е р. Пусть G — группа канонических преобразований в пространстве формальных гамильтоновых систем. Отождествляя такую систему с ее формальным гамильтонианом $F \in K[2n, 1]$, а каноническое преобразование с его производящим рядом, получаем $S_F'(e)\lambda = -\{F, \lambda\}$, $\lambda \in K[2n, 1]$, где $\{\cdot, \cdot\}$ — скобка Пуассона. Если $F \neq 0$, то ряды F^l, $l = 1, 2, \ldots$, линейно независимы и $F^l \in \operatorname{Ker} S_F'(e)$. Следовательно,

$$\dim(\operatorname{Ker} S_F'(l))^* = \sup_i \dim \operatorname{Ker} P_i S_F'(e) Q_i = \infty.$$

Таким образом, не существует конечно-определенных гамильтоновых систем ([7]).

Конечная определенность отображения F необходима и достаточна для существования инфинитезимально версальной деформации относительно группы G. Разложение (1) позволяет явно указать такую деформацию.

Следствие. *Пусть ряд* $F \in K[n, p]$ *конечно определен и* $h_1, \ldots, h_q \in \in \operatorname{Ker}(S'_F(e))^*$ — *базис. Положим*

$$F(x, \alpha) = F(x) + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i h_i(x), \quad \alpha_i \in K.$$

Тогда $F(x, \alpha)$ — *инфинитезимально версальная деформация ряда* F.

Если выполнена теорема версальности, то $F(x, \alpha)$ — версальная деформация. Теорема версальности справедлива для групп G_r, G_l, G_{er} (см. [3—5)], но не имеет места, например, для сопряженности (см. [6]).

1. *Белицкий Г. Р.* Нормальные формы, инварианты и локальные отображения.— Киев : Наук. думка, 1979.— 170 с.
2. *Leng S.* Hilbert's nullestensatz in infinite-dimensional space.— Proc. Amer. Math. Soc., 1952, N 3, p. 407—410.
3. *Закалюкин В. М.* Теорема версальности.— Функцион. анализ, 1973, 7, № 2, с. 28—31.
4. *Latour F.* Stabilite des champs d'applications differentiables; generalisation d'an theoreme de J. Mather.— C. r. Acad. sci. A, 1969 **268**, N 22, p. 1331—1334.
5. *Гомозов Е. П.* Теорема версальности для двусторонней группы замен переменных.— Функцион. анализ, 1975, **9**, № 4, с. 69—70.
6. *Белицкий Г. Р.* Эквивалентность и нормальные формы ростков гладких отображений.— Успехи мат. наук., 1978, **33**, № 1, с. 95—155.
7. *Лычагин В. В.* Локальная классификация уравнений в частных производных.— Там же, 1975, **33**, № 1, с. 53—97

Физ.-техн. ин-т низких температур
АН УССР, Харьков

Получено 17.02.84