УДК 519.41/47

В. В. Атамась

О конечных непримарно факторизуемых группах

В работе [1] изучено строение конечных нпф-групп, т. е. непримарных конечных групп, все непримарные подгруппы которых дополняемы. В настоящей статье рассматриваются непримарные конечные группы, в которых условие дополняемости налагается только на те непримарные подгруппы, которые являются расширением элементарной абелевой группы с помощью циклической группы простого порядка. Вопрос о строении непримарных периодических групп с таким условием дополняемости (для удобства изложения будем называть их кэф-группами — квазиэлементарно факторизуемыми группами) был рекомендован автору С. Н. Черниковым, высказавшим при этом предположение, что конечные группы такого рода непримарно факторизуемы. Как показано ниже, это предположение оправдывается.

Лемма 1. *Любая конечная кэф-группа разрешима.*

Доказательство. В работе [2] содержится следующее предложение. Любая конечная неразрешимая группа G содержит такую минимальную ненильпотентную подгруппу H порядка $2^m q$ с циклической силовской 2-группой, что G является единственной подгруппой F из G, удовлетворяющей соотношению $HF = G$.

Доказательство леммы проведем методом от противного. Пусть G — неразрешимая кэф-группа. Тогда по сформулированному предложению она содержит подгруппу H порядка $2^m q$ с указанными свойствами. Возьмем в H минимальную непримарную подгруппу и обозначим ее через A. Такая подгруппа, как следует из результатов работы [3], является расширением элементарной абелевой группы с помощью циклической группы простого порядка и, следовательно, имеет порядок $2q$. По условию леммы подгруппа A дополняема в G и поэтому отлична от H, а значит, $m > 1$. Из дополняемости подгруппы A в G следует ее дополняемость в H. Ее дополнение K в H является собственной подгруппой некоторой силовской циклической 2-группы Q порядка 2^m. Но тогда подгруппа K дополняема в Q, что, очевидно, невозможно. Полученное противоречие доказывает разрешимость группы G.

Лемма 2. *В конечной кэф-группе G любой примарный нормальный делитель A является элементарной абелевой подгруппой.*

Доказательство. Обозначим через Φ подгруппу Фраттини группы A. Если $\Phi = 1$, то A — элементарная абелева группа. Пусть $\Phi \neq 1$ и x — элемент из G простого порядка $q \neq p$ (p — простое число, делящее порядок $|A|$ группы A).

Подгруппа $A \leftthreetimes \{x\}$ разрешима. В ней существует инвариантный ряд с абелевыми факторами, проходящий через Φ. Поэтому подгруппа Φ содержит абелеву p-подгруппу, инвариантную в $A \leftthreetimes \{x\}$. Элементы p-го порядка этой подгруппы составляют элементарную абелеву подгруппу F, инвариантную в $A \leftthreetimes \{x\}$. Поскольку подгруппа $F \leftthreetimes \{x\}$ дополняема в G, то она дополняема и в $A \leftthreetimes \{x\}$. Пусть K — ее дополнение в $A \leftthreetimes \{x\}$. Тогда $(F \leftthreetimes \{x\}) K = A\{x\}$ и $(F \leftthreetimes \{x\}) \cap K = 1$. Очевидно, K является p-подгруппой, а $F \leftthreetimes K$ — силовской p-подгруппой группы $A \leftthreetimes \{x\}$ и, значит, $A = F \leftthreetimes K$. Получили противоречие, так как никакая нетривиальная подгруппа подгруппы Фраттини группы A не может быть дополняемой в A Следовательно, $\Phi = 1$ и A — элементарная абелева группа.

Лемма 3. *Если G — конечная кэф-группа, а N_1 и N_2— два ее нееди ничных нормальных делителя взаимно простых порядков, то группа G впол не факторизуема.*

Доказательство. Построим два неуплотняемых инвариант ных ряда с абелевыми факторами, проходящих соответственно через N и N_2. Пусть P и Q — первые отличные от 1 члены этих рядов. Очевидно P — элементарная абелева p-группа, Q — элементарная абелева q-групп $(p,\ q$ — простые числа, $p \neq q)$.

Пусть $\{x\}$ — произвольная подгруппа простого порядка из G. Тогд либо $P \cap \{x\} = 1$, либо $Q \cap \{x\} = 1$. Если, например, $P \cap \{x\} = 1$, т подгруппа $P \leftthreetimes \{x\}$ — непримарная подгруппа, являющаяся расширение элементарной абелевой группы с помощью циклической группы простог порядка, и, значит, подгруппа $P \leftthreetimes \{x\}$ дополняема в G. Пусть K — е дополнение в G. Тогда подгруппа $\{x\}$ дополняема в G и $P \leftthreetimes K$ — ее до полнение. Следовательно, в группе G дополняема каждая подгруппа прос того порядка. Как известно [4], в этом случае G — вполне факторизуема Лемма доказана.

Лемма 4. *В конечной кэф-группе G каждый примарный нормаль ный делитель H дополняем.*

Доказательство. Пусть $|H| = p^\alpha$ и x — произвольный эле мент порядка $q \neq p$ группы G. Так как подгруппа H элементарная абелева то подгруппа $H \leftthreetimes \{x\}$ дополняема в G. Пусть K — ее дополнение. Есл K_p— силовская p-подгруппа группы G, то $H \leftthreetimes K_p = G_p$ — силовская p подгруппа группы G. Отсюда следует, что подгруппа H дополняема в каждой содержащей ее силовской подгруппе. Так как ввиду леммы 2 инвариантная подгруппа H абелева, то по теореме Гашюца [5] она допол няема в G.

Теорема. *Любая конечная кэф-группа G является нпф-группой*

Доказательство. Будем предполагать, что G не являетс вполне факторизуемой группой, так как иначе утверждение теоремы дл такой группы G было бы тривиальным.

Пусть F — подгруппа Фиттинга (максимальный нильпотентный нор мальный делитель) кэф-группы G. Как следует из лемм 2 и 3, F — эле ментарная абелева p-подгруппа группы G по некоторому простому p По лемме 4 подгруппа F дополняема в G.

Пусть $G = F \leftthreetimes H$. Докажем, что подгруппа H вполне факторизуема Пользуясь разрешимостью группы G и учитывая максимальность ее ниль потентного нормального делителя F, нетрудно убедиться, что в G сущест вует такой содержащий его нормальный делитель M, что $|M/F| = q^\alpha$ где q — некоторое простое число, отличное от p. Пусть $M = F \leftthreetimes Q$. Тог да группу G можно представить в виде

$$G = MN_G(Q) = FN_G(Q) \tag{1}$$

$(N_G(Q)$ — нормализатор подгруппы Q в группе $G)$.

Пусть $x \in N_G(Q)$, $x^r = 1$ (r — некоторое простое число). Если $r = p$, т подгруппа $Q \leftthreetimes \{x\}$ дополняема в $N_G(Q)$. Пусть K — ее дополнение в $N_G(Q)$ Тогда подгруппа $Q \leftthreetimes K$ является, очевидно, дополнением подгруппы $\{x\}$ в $N_G(Q)$. Если же $r \neq p$, то подгруппа $F \leftthreetimes \{x\}$ дополняема в G. Пусть K_1 — ее дополнение. Тогда подгруппа $F \leftthreetimes K_1$ — дополнение $\{x\}$ в G. Отсюда сле дует, что подгруппа $\{x\}$ дополняема в $N_G(Q)$. Но тогда, как следует из [4] группа $N_G(Q)$ — вполне факторизуема. Если $F \cap N_G(Q) = D$ и $N_G(Q) = D \leftthreetimes \leftthreetimes \overline{H}$, то ввиду разложения (1) $G = F \leftthreetimes \overline{H}$. Так как $G/F \simeq H$, то $H \simeq \overline{H}$ и поэтому группа H вполне факторизуема.

Таким образом, любая конечная кэф-группа имеет вид $G = F \leftthreetimes H$ где F — элементарная абелева p-группа, H — вполне факторизуема группа.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что в конечно кэф-группе дополняема любая непримарная подгруппа.

Пусть A — такая подгруппа из G, что $A \cap F = 1$, A не обязательно непримарная. Пусть $(F \leftthreetimes A) \cap H = H_1$. Поскольку H — вполне факторизуемая группа, то подгруппа H_1 дополняема в H. Если H_2 — дополнение H_1 в H, то $F \leftthreetimes H_2$ — дополнение подгруппы A в G. В самом деле, для любого $g \in G$

$$g = fh = fh_1h_2 = ff_1ah_2 = af^*h_2.$$

Здесь $a \in A$, $f, f_1, f^* \in F$, $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$, $h \in H$. Таким образом, любой элемент g из G можно представить в виде $g = af^*h_2$, где $a \in A$, $f^*h_2 \in F \leftthreetimes H_2$ и, значит, $G = A(F \leftthreetimes H_2)$.

Покажем, что $(F \leftthreetimes H_2) \cap A = 1$. Пусть $y \in (F \leftthreetimes H_2) \cap A$ и $y \neq 1$. Тогда $y \in F \leftthreetimes H_2$ и, значит, $y = fh_2$, где $f \in F$, $h_2 \in H_2$. Так как $y \in A$, то $h_2 = f^{-1}y \in F \leftthreetimes A$. Очевидно, $H_2 \cap (F \leftthreetimes A) = 1$ и потому $h_2 = 1$. Но тогда $f = y \neq 1$. Это означает, что отличный от 1 элемент y содержится в пересечении $A \cap F$, которое равно единице. Полученное противоречие доказывает, что $(F \leftthreetimes H_2) \cap A = 1$.

Пусть теперь $A \cap F = F_1 \neq 1$, где A — какая-нибудь непримарная подгруппа из G. Возьмем в A элемент x простого порядка $q \neq p$. Тогда подгруппа $F_1 \leftthreetimes \{x\}$ дополняема в G как расширение элементарной абелевой p-группы с помощью циклической группы простого порядка $q \neq p$. Пусть K — дополнение $F_1 \leftthreetimes \{x\}$ в G. Подгруппа $A \cap K$ имеет с F, очевидно, единичное пересечение и, значит, она по доказанному выше дополняема в G, а следовательно, и в K. Пусть K_1 — дополнение подгруппы $A \cap K$ в K. Тогда K_1 — дополнение A в G. Докажем это.

Для любого $g \in G$

$$g = f_1x^*k = f_1x^*k^*k_1 = ak_1,$$

где $f_1 \in F_1$, $x^* \in \{x\}$, $k^* \in A \cap K$, $k_1 \in K_1$, $k = k^*k_1 \in K$, $a = f_1x^*k^* \in A$. И, значит, $G = AK_1$.

Покажем, что $A \cap K_1 = 1$. Пусть $y \in A \cap K_1$; так как $y \in A$ и $y \in K_1 \leqslant K$, то $y \in A \cap K$. Но тогда $y \in (A \cap K) \cap K_1 = 1$. Следовательно, $y = 1$. Теорема доказана.

Из теоремы непосредственно вытекает, в частности, следующий результат [6]. Если в конечной непримарной группе дополняемы все ее бипримарные подгруппы, то она является нпф-группой.

1. *Алексеева Э. С.* Конечные непримарно факторизуемые группы.— В кн.: Группы с системами дополняемых подгрупп. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1971, с. 147—179
2. *Беркович Я. Г.* Строение группы и строение ее подгруппы.— Докл. АН СССР, 1968, 179, № 1, с. 13—16.
3. *Шмидт О. Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные.— Избр. тр.: Математика. М.: Изд-во АН СССР, 1959, с. 221—228.
4. *Горчаков Ю. М.* Примитивно факторизуемые группы.— Докл. АН СССР, 1960, **131**, № 6, с. 1246—1248.
5. *Gaschütz W.* Zur Erweiterungatheoric der endlichen Gruppen.—J. reine und angew. Math. 1952, **190**, S. 97—107.
6. *Кондратьев А. С.* Конечные непримарные группы с дополняемыми бипримарными подгруппами четного порядка.— Мат. зап. Урал. ун-та, 1975, вып. 9, № 3, с. 44—52.

Киев. пед. ин-т

Получено 03.10.84