УДК 519.4

В. И. Фущич, А. Ф. Баранник, Л. Ф. Баранник

Непрерывные подгруппы обобщенной группы Евклида

Описание подгрупповой структуры группы Ли используется при решении ряда задач теоретической и математической физики: разделение переменных в дифференциальных уравнениях в частных производных [1], построение точных частных решений нелинейных дифференциальных уравнений [2], редукция представлений группы на подгруппы [3].

Систематическое изучение непрерывных подгрупп неоднородных групп преобразований квантовой механики начато в работе [4], в которой предложен общий метод классификации относительно определенной сопряженности подалгебр конечномерной алгебры Ли L с нетривиальным абелевым идеалом N и полупростой фактор-алгеброй L/N. Этим методом проведена классификация подалгебр алгебр Ли групп Пуанкаре $P(1,3)$ [4], $P(1,4)$ [5, 6] и групп Евклида $E(3)$ [7], $E(4)$ [8].

В настоящей работе дается дальнейшее уточнение общего метода из [4], позволяющее свести проблему классификации относительно $E(n)$-сопряженности подалгебр алгебры Евклида $LE(n)$ к описанию относительно $O(n)$-сопряженности неприводимых частей подалгебр алгебры $LO(n)$. В качестве применения полученных общих результатов дано описание максимальных абелевых подалгебр алгебры $LE(n)$, $n \geqslant 2$, и всех подалгебр алгебры $LE(5)$.

Пусть R — поле вещественных чисел, R^n — n-мерное арифметическое пространство над R, $O(n)$ — группа ортогональных матриц порядка n, $\langle X_1, \ldots, X_s \rangle$ — векторное пространство или алгебра Ли над полем R с базисом $X_1, \ldots, X_s$. Группой Евклида $E(n)$ называется мультипликативная группа матриц $\begin{pmatrix} A & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $A \in O(n)$, $X \in R^n$. Через LG обозначим алгебру Ли группы Ли G. Алгебра Евклида $LE(n)$ определяется такими коммутационными соотношениями:

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \delta_{ad}J_{bc} + \delta_{bc}J_{ad} - \delta_{ac}J_{bd} - \delta_{bd}J_{ac}, \quad [P_a, J_{bc}] = \delta_{ab}P_c - \delta_{ac}P_b,$$
$$[P_a, P_b] = 0, \; J_{ba} = -J_{ab}, \quad a, b, c = 1, 2, \ldots, n.$$

Генераторы поворотов J_{ab} порождают алгебру $LO(n)$, а генераторы трансляций P_c — коммутативный идеал N, причем $LE(n) = N \dotplus LO(n)$. Алгебру $LO(n)$ мы рассматриваем как алгебру кососимметрических матриц порядка n над R, дополненных снизу и справа соответственно нулевой строкой и нулевым столбцом, а $P_1, P_2, \ldots, P_n$ считаем единичными векторами векторного пространства

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| X \in R^n \right\}.$$

При этих предположениях получаем, что если $Y \in LO(n)$, а $Z \in N$, то $[Y, Z] = Y \cdot Z$.

Пусть C — такая матрица порядка $n+1$ над R, что отображение $\varphi_C : X \to CXC^{-1}$ является автоморфизмом $LE(n)$. Если $C \in E(n)$, то φ_C называется $E(n)$-автоморфизмом. Если

$$C = \begin{pmatrix} \lambda E & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in R, \quad \lambda > 0,$$

то автоморфизм φ_C называется гомотетией.

Подалгебры K и K' алгебры $LE(n)$ называются $E(n)$-сопряженными, если $\varphi_C(K) = K'$ для некоторого $E(n)$-автоморфизма φ_C алгебры $LE(n)$.

Пусть π — проектирование алгебры $LE(n)$ на $LO(n)$, F — подалгебра $LO(n)$, $\hat{F}$ — такая подалгебра алгебры $LE(n)$, что $\pi(\hat{F}) = F$. Если алгебра $\hat{F}$ $E(n)$-сопряжена алгебре $M \dotplus F$, где M есть F-инвариантное подпространство пространства N, то $\hat{F}$ будем называть расщепляемой в алгебре $LE(n)$. Если любая подалгебра $\hat{F} \subset LE(n)$, удовлетворяющая условию $\pi(\hat{F}) = F$, является расщепляемой, то будем говорить, что подалгебра F обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре $LE(n)$.

Теорема 1. *Подалгебра $F \subset LO(n)$ обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре $LE(n)$ тогда и только тогда, когда F полупроста или не сопряжена подалгебре алгебры $LO(n-1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно убедиться в справедливости теоремы для коммутативных подалгебр алгебры $LO(n)$. Пусть F — некоммутативная подалгебра алгебры $LO(n)$, не сопряженная подалгебре алгебры $LO(n-1)$. Тогда $F = D \oplus Q$, где D — центр, Q — фактор Леви. Так как по теореме Уайтхеда полупростые алгебры обладают только расщепляемыми расширениями, то можно предполагать, что $Q \subset F$. Если из условия $[Q, X] = 0$, $X \in N$, вытекает $X = 0$, то вследствие полупростоты Q-подпространств пространства N можно утверждать, что $D \subset F$.

Допустим, что для некоторого ненулевого элемента $X \in N$ выполняется $[Q, X] = 0$. Обозначим через M максимальное подпространство пространства N, имеющее свойство $[Q, M] = 0$. Если $\dim M = n-k$, $0 < k < n$, то можно предполагать, что $M = \langle P_{k+1}, \ldots, P_n \rangle$. Но тогда $Q \subset LO(k)$. Отсюда и из тождества Якоби вытекает, что $[D, M] \subset M$, а потому D является подалгеброй алгебры $LO(k) \oplus LO(M)$. Пусть D' — проекция D на $LO(M)$. Поскольку F не сопряжена подалгебре алгебры $LO(n-1)$, то D' имеет только расщепляемые расширения в $M \dotplus LO(M)$. Отсюда следует, что $D \subset F$. Теорема доказана.

Пусть $F = D \oplus Q$ — разложение подалгебры $F \subset LO(n)$ в прямую сумму центра D и фактора Леви Q. Обозначим через W максимальное подпространство N, обладающее тем свойством, что $[F, W] = 0$. Если $\dim W = n-k$, $0 \leqslant k < n$, то можно предполагать, что $W = \langle P_{k+1}, \ldots, P_n \rangle$. Но тогда $F \subset LO(k)$. Отсюда в силу теоремы 1 заключаем, что алгебра $\hat{F} \subset LE(n)$ со свойством $\pi(\hat{F}) = F$ допускает разложение $\hat{F} = V \dotplus (D' \oplus Q)$, где V — подпространство N, инвариантное относительно F, а D' — подалгебра прямой суммы алгебр D и $\langle P_{k+1}, \ldots, P_n \rangle$. Алгебры типа D' можно классифицировать с помощью метода Ли — Гурса [4].

Из полученных результатов вытекает, что для описания подалгебр алгебры $LE(n)$ важно решить вопрос о структуре подпространств пространства N, инвариантных относительно $F \subset LO(n)$.

Подалгебра F алгебры $LO(n)$, $n \geqslant 2$, называется неприводимой, если тривиальное представление F в $LO(n)$ является неприводимым.

Тривиальное представление Γ ненулевой алгебры $F \subset LO(n)$ в $LO(n)$ вполне приводимо: $\Gamma = \operatorname{diag}[\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p]$, где Γ_i — неприводимое представление F в $LO(W_i)$, $W_i \subset N$ и $\dim W_i \geqslant 2$, $i = 1, \ldots, m$; $m \leqslant p$. Пусть $F_i = \{\operatorname{diag}[0, \ldots, \Gamma_i(X), \ldots, 0] \mid X \in F\}$. Очевидно, F_i — неприводимая подалгебра алгебры $LO(W_i)$. Алгебру F_i будем называть неприводимой частью алгебры F. Если Γ_i и Γ_j суть эквивалентные представления, то будем предполагать, что для любого $X \in F$ выполняется равенство $\Gamma_i(X) = \Gamma_j(X)$.

Объединив эквивалентные неприводимые ненулевые представления, получим ненулевые дизъюнктные примарные подпредставления представления Γ. Соответствующие им подалгебры алгебры $LO(n)$, построенные по тому же правилу, что и неприводимые части F_i, будем называть примарными частями алгебры F.

Л е м м а. *Пусть F — неприводимая подалгебра алгебры $LO(n)$. Группа автоморфизмов алгебры $N \dotplus F$ разлагается в прямое произведение группы $E(n)$-автоморфизмов и группы гомотетий.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $D \oplus Q$ — разложение F в прямую сумму центра D и фактора Леви Q. Если φ — автоморфизм алгебры $N \dotplus F$, то $\varphi(N \dotplus D) = N \dotplus D$ и с точностью до $E(n)$-автоморфизмов $\varphi(Q) = Q$. Вследствие неприводимости F имеем $\varphi(N) = N$. Поскольку F не сопряжена подалгебре алгебры $LO(n-1)$, то на основании теоремы 1 $\varphi(D) = D$.

Так как $[\varphi(X), \varphi(P_j)] = \varphi([X, P_j])$, то для каждого $X \in F$ матрица оператора $\varphi(X)$ в базисе $\varphi(P_1), \varphi(P_2), \ldots, \varphi(P_n)$ совпадает с матрицей оператора X в базисе $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Отсюда вытекает, что если B—матрица перехода от базиса $P_1, P_2, \ldots, P_n$ к базису $\varphi(P_1), \varphi(P_2), \ldots, \varphi(P_n)$, то $BXB^{-1} = \varphi(X)$. Матрицу B можно записать в виде TU, где T — положительно определенная симметрическая, а U — ортогональная матрицы. Используя лемму Шура, получаем $T = \lambda E$, где $\lambda > 0$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть* $K_1, K_2, \ldots, K_q$ — *примарные части ненулевой подалгебры* F *алгебры* $LO(n)$, M — *подпространство пространства* N, *инвариантное относительно* F. *Тогда* $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_q \oplus \tilde{M}$, *где* $M_i = [K_i, M_i] = [K_i, M]$, $[K_j, M_i] = 0$ *при* $j \neq i$, $\tilde{M} = \{X \in M \mid [F, X] = 0\}$. *Если примарная алгебра* K *является подпрямой суммой неприводимых подалгебр* $S_1, S_2, \ldots, S_r$ *соответственно алгебр* $LO(W_1)$, $LO(W_2), \ldots$ $\ldots, LO(W_r)$, *то относительно* $O(n)$-*сопряженности ненулевые подпространства* W *пространства* N *с условием* $[K, W] = W$ *исчерпываются пространствами*: W_1, $W_1 \oplus W_2, \ldots, W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_r$.

Доказательство. Так как $M = \tilde{M} \oplus \tilde{M}^{\perp}$, то будем предполагать, что $\tilde{M} = 0$. Пусть K_i—подпрямая сумма неприводимых частей $K_{i1}, \ldots, K_{is_i}$, $M_{ij} = [K_{ij}, M]$, π_{ij}—проектирование M на M_{ij}, $i = 1, \ldots, q$; $j = 1, \ldots, s_i$. Допустим, что $\pi_{ab}(M) \neq 0$. На основании леммы и теоремы Ли—Гурса [4] о подалгебрах прямой суммы алгебр в пространстве M существует такое максимальное F-инвариантное подпространство V, что $\pi_{ab}(V) \neq 0$ и $\pi_{cd}(V) = 0$, где $1 \leqslant c \leqslant q$, $c \neq a$, $1 \leqslant d \leqslant s_c$. Отсюда следует, что в M существует максимальное F-инвариантное подпространство U_{ab} со свойством: $\pi_{ab}(U_{ab}) \neq 0$, $\pi_{cd}(U_{ab}) = 0$ для всех $c \neq a$, $d = 1, 2, \ldots, s_c$. Очевидно, $M_a = U_{ab}$.

Пусть примарная алгебра K является подпрямой суммой неприводимых подалгебр $S_1, S_2, \ldots, S_r$ соответственно алгебр $LO(W_1)$, $LO(W_2), \ldots$ $\ldots, LO(W_r)$, где $W_i = \langle P_{(i-1)k+1}, P_{(i-1)k+2}, \ldots, P_{ik}\rangle$, $i = 1, \ldots, r$. Если $[K, W] = W$ и $W \neq 0$, то переставляя, если это необходимо, подалгебры $S_1, S_2, \ldots$ $\ldots, S_r$, можно предполагать, что W содержит элементы $P_j + \sum_{j=1}^{r-1} \lambda_j P_{jk+i}$, $i = 1, \ldots, k$.

Пусть

$$C_j(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} E & 0 & \ldots & 0 & \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} E \\ 0 & E & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & E & 0 \\ \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} E & 0 & \ldots & 0 & -\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} E \end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, r-1,$$

$$tE = \operatorname{diag}[\underbrace{E, \ldots, E}_{t}],$$

где E — единичная матрица порядка k. Очевидно, $C_j(\lambda) \in O(jk + k)$. Легко получаем

$$C_1(\lambda) \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} C_1(\lambda) \tag{1}$$

для любой матрицы X порядка k и

$$C_1(\lambda) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ \lambda y_1 \\ \vdots \\ \lambda y_k \end{pmatrix} = \sqrt{1+\lambda^2} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Пусть φ_{A_j} — автоморфизм $LE(rk)$, соответствующий матрице $A_j = \mathrm{diag}[C_j(\lambda), (r-j-1)E]$. На основании равенств (1), (2) имеем $\varphi_{A_j}(K) = K$, и автоморфизм

$$\varphi_{A_{r-1}}(\lambda_{r-1})\,\varphi_{A_{r-2}}(\lambda_{r-2})\ldots\varphi_{A_1}(\lambda_1)$$

отображает W на $W_1 \oplus W'$, где W' — подпространство пространства $W_2 \oplus \oplus \ldots \oplus W_r$. Остается применить индуктивное предположение. Теорема доказана.

Известно, что $LO(n)$ обладает относительно $O(n)$-сопряженности только одной максимальной разрешимой подалгеброй, совпадающей с подалгеброй Картана $\mathfrak{h}(n) = \langle J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{2m-1,2m}\rangle$, $m = [n/2]$. Отсюда вытекает, что алгебра $\mathfrak{h}(n) = N \dotplus \mathfrak{h}(n)$ является максимальной разрешимой подалгеброй алгебры $LE(n)$ и каждая максимальная разрешимая подалгебра алгебры $LE(n)$ сопряжена с $\iota\mathfrak{h}(n)$.

Очевидно, $\langle J_{12}\rangle$ — неприводимая подалгебра алгебры $LO(2)$. Примарные части алгебры $F \subset \mathfrak{h}(n)$ можно найти таким способом.

Зафиксируем некоторый базис $Y_1, \ldots, Y_t$ алгебры F. Если Y_j — такой первый базисный вектор F, что его проекция на $\langle J_{2k-1,2k}\rangle$ отлична от нуля, то считаем, что коэффициент при $J_{2k-1,2k}$ в Y_j является положительным числом. В каждом базисном элементе алгебры F соберем слагаемые с коэффициентами, равными по модулю, вынесем за скобки модуль коэффициентов, а затем в полученных выражениях выделим суммы, содержащие максимально возможное число слагаемых с одним и тем же знаком. Пусть $S = \{X_1, \ldots, X_l\}$ — множество всех таких сумм, взятых со знаком $+$. Если X_i и X_j имеют общие слагаемые, то из множества S исключаем X_i, X_j и вводим $X_i \cap X_j$, $X_i - X_i \cap X_j$, $X_j - X_i \cap X_j$, где $X_i \cap X_j$ — сумма общих слагаемых элементов X_i, X_j. В полученном множестве снова находим ненулевые пересечения его элементов и производим дальнейшее преобразование множества S. На конечном шаге мы получим множество $\{H_1, H_2, \ldots, H_a\}$, в котором H_i, H_j не имеют общих слагаемых при $1 \leqslant i < j \leqslant a$. Алгебры $\langle H_1\rangle, \langle H_2\rangle, \ldots, \langle H_a\rangle$ суть примарные части алгебры F.

На основании теорем 1, 2 можно доказать такие утверждения.

Предложение 1. *Каждая разрешимая подалгебра алгебры $LE(n)$ сопряжена с $W \dotplus A$, где $W \subset N$, A — абелева подалгебра.*

Предложение 2. *Каждая нильпотентная подалгебра алгебры $LE(n)$ является абелевой.*

Предложение 3. *Пусть $m = [n/2]$, $\delta = 0$ при $n = 2m$, $\delta = 1$ при $n = 2m+1$. Максимальные абелевы подалгебры алгебры $LE(n)$ исчерпываются относительно $E(n)$-сопряженности такими алгебрами:*

$$\langle P_1, P_2, \ldots, P_n\rangle,\quad \langle J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{2m-1,2m}, \delta P_n\rangle,\quad \langle P_1, P_2, \ldots, P_{2r}, \delta P_n,$$

$$J_{2r+1,2r+2}, \ldots, J_{2m-1,2m}\rangle,$$

где $r = 1, 2, \ldots, m-1$. Число максимальных абелевых подалгебр алгебры $LE(n)$ равно $m+1$.

Если речь идет об алгебрах $W_1 \dotplus F, \ldots, W_s \dotplus F$, то используем обозначение $F : W_1, \ldots, W_s$.

Теорема 3. *Относительно $E(5)$-сопряженности подалгебры алгебры $LE(5)$ исчерпываются такими алгебрами:*

$$0,\ \langle P_1\rangle,\ \langle P_1, P_2\rangle,\ \langle P_1, P_2, P_3\rangle,\ \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle,\ \langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle;$$

$$\langle J_{12}\rangle : 0,\ \langle P_3\rangle,\ \langle P_1, P_2\rangle,\ \langle P_3, P_4\rangle,\ \langle P_1, P_2, P_3\rangle,\ \langle P_3, P_4, P_5\rangle,\ \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle,$$
$$\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle;\quad \langle J_{12} + \alpha J_{34}\rangle : 0,\ \langle P_5\rangle,\ \langle P_1, P_2\rangle,\ \langle P_3, P_4\rangle,\ \langle P_1, P_2, P_5\rangle;$$
$$\langle P_3, P_4, P_5\rangle,\quad \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle,\quad \langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle,\quad 0 < \alpha < 1;$$
$$\langle J_{12} + J_{34}\rangle : 0,\quad \langle P_5\rangle,\quad \langle P_1, P_2\rangle,\quad \langle P_1, P_2, P_5\rangle,\quad \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle,$$
$$\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle;\quad \langle J_{12}, J_{34}\rangle : 0,\quad \langle P_5\rangle,\quad \langle P_1, P_2\rangle,\quad \langle P_1, P_2, P_5\rangle,$$
$$\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle,\quad \langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle;\quad \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle : 0,\quad \langle P_4\rangle,\quad \langle P_4, P_5\rangle,$$

$$\langle P_1,\ P_2,\ P_3\rangle,\ \ \langle P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4\rangle,\ \ \langle P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5\rangle;\ \ \langle J_{12}+J_{34},\ \ J_{13}-$$

$$-J_{24},\ \ J_{14}+J_{23}\rangle:0,\ \ \langle P_5\rangle,\ \ \langle P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4\rangle,\ \ \langle P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5\rangle;$$

$$\langle 2J_{12}+J_{34},\ \ J_{13}+J_{24}-\sqrt{3}J_{45},\ J_{23}-J_{14}+\sqrt{3}J_{35}\rangle:0,\ \ \langle P_1,P_2,P_3,P_4,P_5\rangle;$$

$$\langle J_{12}+J_{34},\ J_{13}-J_{24},\ J_{14}+J_{23},\ J_{12}-J_{34}\rangle:0,\ \ \langle P_5\rangle,\ \langle P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4\rangle,$$

$$\langle P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5\rangle;\ \ \langle J_{12},\ J_{13},\ J_{23},\ J_{45}\rangle:0,\ \langle P_4,\ P_5\rangle,\ \langle P_1,\ P_2,\ P_3\rangle,$$

$$\langle P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5\rangle;$$

$$LO(4):0,\ \langle P_5\rangle,\ \langle P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4\rangle,\ \langle P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5\rangle;\ LO(5):0,$$

$$\langle P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5\rangle;\ \ \langle J_{12}+aP_5\rangle:0,\ \langle P_3\rangle,\ \ \langle P_1,\ P_2\rangle,\ \langle P_3,\ P_4\rangle,\ \langle P_1,\ P_2,\ P_3\rangle,$$

$$\langle P_1,P_2,P_3,P_4\rangle,\ \ a>0;\ \langle J_{12}+\alpha J_{34}+aP_5\rangle:0,\ \ \langle P_1,P_2\rangle,\ \langle P_3,P_4\rangle,\ \langle P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4\rangle,$$

$$0<\alpha<1;\ \ \ a>0;\ \ \langle J_{12}+J_{34}+aP_5\rangle:0,\ \ \langle P_1,\ P_2\rangle,\ \langle P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4\rangle,\ \ a>0;$$

$$\langle J_{12}+aP_5,\ J_{34}+bP_5\rangle:0,\ \langle P_1,\ P_2\rangle,\ \langle P_3,\ P_4\rangle,\ \langle P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4\rangle,\ a>0,$$

$$b\geqslant 0;\ \ \langle J_{12}-J_{34}+aP_5,\ J_{12}+J_{34},\ J_{13}-J_{24},\ J_{14}+J_{23}\rangle:0,$$

$$\langle P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4\rangle,\ \ \ a>0.$$

Теорема 3 доказывается на основании теорем 1, 2 с использованием предложенного алгоритма для нахождения примарных частей подалгебр подалгебры Картана $\mathfrak{h}(n)$. Как видно из теоремы 3, алгебра $LO(5)$ обладает двумя неприводимыми подалгебрами: $LO(5)$, $\langle 2J_{12}+J_{34},\ \ J_{13}+J_{24}-\sqrt{3}J_{45},\ J_{23}-J_{14}+\sqrt{3}J_{35}\rangle$.

1. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных.— М. : Мир, 1981.— 342 с.
2. *Фущич В. И.* О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики.— В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983, с. 4—23.
3. *Никитин А. Г.*, *Фущич В. И.*, *Юрик И. И.* Редукция неприводимых унитарных представлений обобщенных групп Пуанкаре по их подгруппам.— Теорет. мат. физика, 1976, **26**, № 2, с. 206—220.
4. *Patera J.*, *Winternitz P.*, *Zassenhaus H.* Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincare group. — J. Math. Phys., 1975, **16**, N 8, p. 1597—1614.
5. *Федорчук В. М.* Расщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре P (1, 4).— Укр. мат. журн., 1979, **31**, № 6, с.717—722.
6. *Федорчук В. М.* Нерасщепляющиеся подалгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре P (1, 4).— Там же, 1981, **33**, № 5, с. 696—700.
7. *Beckers J.*, *Patera J.*, *Perroud M.*, *Winternitz P.* Subgroups of the Euclidean group and symmetry in nonrelativistic quantum mechanics. — J. Math. Phys., 1977, **18**, N 1, p. 72—83.
8. *Баранник А. Ф.*, *Баранник Л. Ф.*, *Москаленко Ю. Д.* Непрерывные подгруппы группы Евклида четырехмерного пространства.— В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики. Киев : Ин-т математики АН УССР. 1983, с. 119—123.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Полтав. пед. ин-т

Получено 26.03.85