УДК 512.55

А. А. Туганбаев

Дистрибутивные кольца и эндодистрибутивные модули

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Дистрибутивным модулем называется модуль с дистрибутивной структурой подмодулей. Кольцо R называется дистрибутивным справа, если модуль R_R дистрибутивен. Слова типа «дистрибутивное кольцо» означают, что соответствующие модульные условия выполнены справа и слева. Дистрибутивными кольцами являются дедекиндовы кольца (например, кольцо целых чисел), кольца нормирования, строго регулярные кольца. О дистрибутивных модулях и кольцах см. [1].

Основным результатом данной работы является теорема 1, в которой, в частности, доказано, что правая дистрибутивность кольца R равносильна тому, что любой инъективный правый R-модуль эндодистрибутивен, т. е. является дистрибутивным левым модулем над своим кольцом эндоморфизмов. Отсюда выводится ряд следствий, касающихся ситуаций, когда все модули различных естественных классов R-модулей эндодистрибутивны. Существенную роль при этом играет предложение 1, где доказано, что класс эндодистрибутивных модулей замкнут относительно прямых произведений, прямых сумм и прямых слагаемых. Эндодистрибутивные левые модули определяются аналогично правостороннему случаю. Доказана дистрибутивность структуры вполне инвариантных подмодулей произвольного периодического модуля над дедекиндовым кольцом. Модуль называется цепным, если структура его подмодулей является цепью. Правый (левый) модуль называется эндоцепным, если он является цепным левым (правым) модулем над своим кольцом эндоморфизмов. Модуль M называется квазиинъективным, если любой гомоморфизм $N \to M$, где N — произвольный подмодуль в M, продолжается до гомоморфизма $M \to M$. Модуль называется равномерным, если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. В работе используется терминология из [2].

Нам потребуется следующий известный результат:

Лемма 1 [1]. *Дистрибутивность модуля $_DM$ равносильна тому, что для любых его элементов a и b найдутся такие элементы f и g кольца D, что $1 = f + g$, $fa \in Db$, $gb \in Da$.*

Предложение 1. *Класс эндодистрибутивных модулей замкнут относительно перехода к прямым суммам, прямым произведениям, прямым слагаемым и вполне инвариантным подмодулям.*

Доказательство. Эндодистрибутивность вполне инвариантных подмодулей эндодистрибутивных модулей очевидна. Пусть $\{M_t\}_{t\in T}$ — некоторое множество эндодистрибутивных правых модулей над кольцом R,

M — их прямое произведение, N — их прямая сумма, M_1 — прямое сла гаемое модуля M, $D = \mathrm{End}\,(M)$, $e_t : M \to M_t$ — естественная проекция 1_t — тождественный автоморфизм модуля M_t для произвольного $t \in T$. Пусть a, b — элементы модуля M. По лемме 1 из эндодистрибутивности мс дулей M_t вытекает существование таких $f_t, g_t, h_t, d_t \in \mathrm{End}\,(M_t)$, что выпол няются равенства $1_t = f_t + g_t$, $f_t e_t a = h_t e_t a$, $g_t e_t a = d_t e_t a$. Тогда естествен ным образом определенные эндоморфизмы f, g, h, d модуля M таковы, чт $1 = f + g$, $fa = hb$, $ga = db$. По лемме 1 модуль M эндодистрибутивен. Тоі да и его вполне инвариантный подмодуль N эндодистрибутивен. Пусть a, b_1 — произвольные элементы модуля M_1, e — проекция M на M_1. Для мс дуля M_1 его кольцо эндоморфизмов и тождественный автоморфизм можн отождествить соответственно с eEe и e. По лемме 1 из эндодистрибутивност модуля M следует существование таких $\bar{f}, \bar{g}, \bar{h}, \bar{d} \in D$, что $1_M = \bar{f} + \bar{g}$ $\bar{f}a_1 = \bar{h}b_1$, $\bar{g}b_1 = \bar{d}a_1$. Положим $f_1 = e\bar{f}e$, $g_1 = e\bar{g}e$, $h_1 = e\bar{h}e$, $d_1 = e\bar{d}e$. Та как $ea_1 = a_1$, $eb_1 = b_1$, то $e = f_1 + g_1$, $f_1 a_1 = h_1 b_1$, $g_1 b_1 = d_1 a_1$. По лемме модуль M_1 эндодистрибутивен.

Следствие 1. *Левая дистрибутивность кольца R равносильн эндодистрибутивности всех прямых произведений проективных пр вых R-модулей.*

Доказательство. Так как кольца R и $\mathrm{End}\,(R_R)$ можно естес венным образом отождествить, то левая дистрибутивность кольца R ра носильна эндодистрибутивности модуля R_R. Теперь применяем предложе ние 1 и то, что любой проективный модуль является прямым слагаемым сво бодного модуля.

Так как любой квазиинъективный модуль вполне инвариантен в инъе тивной оболочке [2, с. 104], то справедливо такое следствие.

Следствие 2. *Если инъективная оболочка квазиинъективного м дуля E эндодистрибутивна, то E — эндодистрибутивный модуль.*

Лемма 2. *Пусть M — модуль, E — квазиинъективный модул Тогда равносильны следующие условия:*

а) *для любых гомоморфизмов $f, g : M \to E$ выполняется хотя бы одно і включений* $\mathrm{Ker}\,(f) \subseteq \mathrm{Ker}\,(g)$, $\mathrm{Ker}\,(g) \subseteq \mathrm{Ker}\,(f)$;

б) *для любых гомоморфизмов $f, g : M \to E$ выполняется хотя бы одно і равенств $f = hg$, $g = hf$, где $h \in \mathrm{End}\,(E)$;*

в) $\mathrm{Hom}\,(M, E)$ — *цепной левый модуль над кольцом* $\mathrm{End}\,(E)$.

Доказательство. Импликации б) $\Rightarrow$ в) $\Rightarrow$ а) тривиальны.

а) $\Rightarrow$ б). Будем считать, что $\mathrm{Ker}\,(f) \subseteq \mathrm{Ker}\,(g)$. Определим гомомо физм $t : f(M) \to g(M)$ правилом $t(f(m)) = g(m)$. Определение корректн поскольку $\mathrm{Ker}\,(f) \subseteq \mathrm{Ker}\,(g)$. В силу квазиинъективности модуля E гом морфизм t продолжается до эндоморфизма h модуля E. Тогда $hf = g$.

Лемма 3. *Для квазиинъективного модуля E_R равносильны след ющие условия:*

а) *E — эндоцепной модуль;*

б) *правые аннуляторы элементов модуля E линейно упорядочены і включению.*

Доказательство. Утверждение вытекает из леммы 2 и ест ственного изоморфизма $t : E \to \mathrm{Hom}\,(R_R, E_R)$, при котором $(t(e))(r) = e$

Предложение 2. *Пусть E_R — неразложимый квазиинъекти ный модуль. Тогда равносильны следующие условия:*

а) *E — эндодистрибутивный модуль;*

б) *E — эндоцепной модуль;*

в) *правые аннуляторы элементов модуля E линейно упорядочены і включению.*

Доказательство. Пусть $D = \mathrm{End}\,(E_R)$. Так как E — нера ложимый модуль, то кольцо D не содержит нетривиальных идемпотенто Тогда из теоремы 19.27 (см. [2, с. 123]) следует, что кольцо D локально. У верждение вытекает теперь из леммы 3 и того, что все дистрибутивные мод ли над локальным кольцом являются цепными [1].

Следствие 3. *Для кольца R равносильны следующие условия:*

а) *все простые правые R-модули эндодистрибутивны;*

б) *все прямые произведения полупростых правых R-модулей эндодистрибутивны;*

в) *все максимальные правые идеалы кольца R являются идеалами.*

Доказательство. Эквивалентность условий а) и б) вытекает из предложения 1. Для доказательства эквивалентности условий а) и в) достаточно показать, что если M — максимальный правый идеал кольца R, то эндодистрибутивность модуля $E_R = R/M$ равносильна тому, что M — идеал. По предложению 2 эндодистрибутивность модуля E равносильна тому, что для произвольных элементов a, b кольца R правые идеалы $(M : a)$, $(M : b)$ сравнимы по включению. Пусть модуль E эндодистрибутивен, $a \in R$. Надо доказать, что $aM \subseteq M$. Допустим противное. Тогда $M = (M : 1) \not\subseteq (M : a)$. Поэтому $(M : a) \subset M$ и включение строгое, откуда модуль $R / (M : a)$ не является простым. Пусть $E_1 = aR/a(M : a)$. Так как $aR \not\subseteq M$, то $R = aR + M$, откуда $E = (aR + M)/M \cong aR/(aR \cap M) = E_1$. Тогда $E \cong R/(M : a)$, поскольку $(a(M : a) : a) = (M : a) + (0 : a) = (M : a)$. Поэтому модуль E не прост и полученное противоречие доказывает импликацию а) $\Rightarrow$ в). Если же M — идеал, то E — одномерный модуль над телом R/M и его эндодистрибутивность очевидна.

Теорема 1. *Для кольца R равносильны следующие условия:*

а) *R — дистрибутивное справа кольцо;*

б) *все инъективные правые R-модули эндодистрибутивны;*

в) *все прямые произведения и прямые суммы квазиинъективных правых R-модулей эндодистрибутивны;*

г) *все неразложимые квазиинъективные правые R-модули являются эндоцепными модулями;*

д) *все инъективные оболочки простых правых R-модулей являются эндодистрибутивными модулями.*

Доказательство. Импликации в) $\Rightarrow$ б) $\Rightarrow$ д), г) $\Rightarrow$ д) тривиальны. Импликация б) $\Rightarrow$ в) вытекает из следствия 2 и предложения 1. Импликация б) $\Rightarrow$ г) вытекает из следствия 2 и предложения 2. Так как инъективные оболочки простых модулей являются равномерными модулями, то импликация а) $\Rightarrow$ д) вытекает из предложения 2 и того, что правые аннуляторы элементов любого равномерного модуля над дистрибутивным справа кольцом линейно упорядочены по включению [1].

д) $\Rightarrow$ а). Так как дистрибутивность произвольного модуля равносильна тому, что цоколь любого его фактор-модуля свободен от квадратов [3], то достаточно доказать, что модуль R_R не имеет никакого фактор-модуля, содержащего подмодуль, изоморфный модулю $T \oplus T$, где T — простой модуль. Допустим противное. Тогда найдутся такие правые идеалы A_1 и A_2 кольца R, что имеют место изоморфизмы $A_1/(A_1 \cap A_2) \cong A_2/(A_1 \cap A_2) \cong T$. Пусть E — инъективная оболочка модуля T, $A = A_1 \cap A_2$, $\overline{R} = R/A$, $\overline{A}_i = A_i/A$, $\overline{f}_i$ — эпиморфизмы модуля $\overline{A}_1 \oplus \overline{A}_2$ на модуль T, при которых $\operatorname{Ker}(\overline{f}_1) = \overline{A}_2$, $\operatorname{Ker}(\overline{f}_2) = \overline{A}_1$. В силу инъективности модуля E гомоморфизмы $\overline{f}_i$ продолжаются до гомоморфизмов $\overline{h}_i \colon \overline{R} \to E$, $i = 1, 2$. Пусть $t : R_R \to \overline{R}$ — естественный эпиморфизм, $h_i = \overline{h}_i t$, $i = 1, 2$. Правые идеалы $\operatorname{Ker}(h_1)$ и $\operatorname{Ker}(h_2)$ не сравнимы по включению, поскольку $h_2(A_1) = h_1(A_2) = 0$, $h_1(A_1) = h_2(A_2) = T \neq 0$. Тогда правые аннуляторы элементов $h_1(1), h_2(1)$ инъективного модуля E, совпадающие с $\operatorname{Ker}(h_1)$, $\operatorname{Ker}(h_2)$, не сравнимы по включению, что противоречит предложению 2.

д) $\Rightarrow$ б). Прямое произведение F инъективных оболочек всех простых R-модулей является инъективным кообразующим [4, с. 136]. Поэтому произвольный инъективный R-модуль E изоморфен прямому слагаемому некоторого прямого произведения экземпляров модуля F. По предложению 1 E — эндодистрибутивный модуль.

Следствие 4. *Если максимальное правое кольцо частных Q дистрибутивного справа кольца R самоинъективно справа, то Q — дистрибутивное слева кольцо. В частности, дистрибутивное справа самоинъективное справа кольцо является дистрибутивным кольцом.*

Доказательство. Так как в наших условиях Q_R — инъективная оболочка модуля R_R и $Q = \text{End}(Q_R)$ [5, с. 279], то по теореме 1 Q — дистрибутивное слева кольцо. Второе утверждение вытекает из того, что самоинъективное справа кольцо является своим максимальным правым кольцом частных [5, с. 279].

Следствие 5. *Если максимальное правое кольцо частных Q дистрибутивного справа конечномерного справа по Голди кольца R самоинъективно справа, то Q — конечное прямое произведение самоинъективных справа цепных слева колец.*

Доказательство. Так как кольцо R конечномерно справа по Голди, а кольцо Q самоинъективно справа, то Q — полусовершенное кольцо [5, с. 280]. Теперь утверждение вытекает из следствия 4 и того, что дистрибутивное слева полусовершенное кольцо является конечным прямым произведением цепных слева колец [1].

Следствие 6. *Если максимальное правое кольцо частных Q дистрибутивного справа кольца R самоинъективно, то Q дистрибутивно.*

Доказательство. По следствию 4 Q дистрибутивно слева, а по лево—право симметричному аналогу второй части следствия 4 Q дистрибутивно справа.

Кольцо называется инвариантным справа, если все правые идеалы являются идеалами. Кольцо называется ограниченным справа, если каждый его существенный правый идеал содержит ненулевой идеал.

Лемма 4. *Для совершенного слева или справа кольца R равносильны следующие условия:*

а) *все правые и все левые R-модули эндодистрибутивны;*

б) *R — артиново полуцепное кольцо, являющееся дистрибутивным слева или справа кольцом;*

в) *R — конечное прямое произведение цепных артиновых колец.*

Доказательство. Импликация в) $\Rightarrow$ б) тривиальна. Так как локальное полуцепное кольцо является цепным, то импликация б) $\Rightarrow$ в) следует из того, что дистрибутивное справа или слева артиново кольцо — конечное прямое произведение локальных колец [1]. Импликация а) $\Rightarrow$б) вытекает из того, что совершенное слева или справа дистрибутивное кольцо является конечным прямым произведением цепных артиновых колец [1]. Так как произвольный модуль над артиновым полуцепным кольцом разлагается в прямую сумму неразложимых циклических модулей [2, с. 366], то для доказательства импликации в) $\Rightarrow$ а) достаточно в силу предложения 1 доказать, что произвольный неразложимый циклический модуль B над конечным прямым произведением R цепных артиновых колец эндодистрибутивен. Из неразложимости модуля B следует, что можно считать R цепным артиновым и, в частности, инвариантным кольцом. Тогда модуль B можно отождествить с цепным фактор-кольцом кольца R. Поэтому модуль B эндодистрибутивен.

Лемма 5. *Для наследственного нетерова первичного кольца R равносильны условия:*

а) *R ограничено справа и каждое его собственное фактор-кольцо является эндодистрибутивным правым R-модулем;*

б) *все существенные правые идеалы кольца R являются идеалами;*

в) *R ограничено справа и каждое его собственное фактор-кольцо является конечным прямым произведением цепных артиновых колец.*

Доказательство. Эквивалентность условий а) и в) вытекает из леммы 4 и того, что каждое собственное фактор-кольцо наследственного нетерова первичного кольца — артиново полуцепное кольцо [2, с. 382].

в) $\Rightarrow$ б). Пусть A — произвольный существенный правый идеал кольца R. Так как R ограничено справа, то A содержит ненулевой идеал B кольца R. Из условия в) вытекает, что кольцо R/B инвариантно. Тогда A/B идеал кольца R/B, откуда A — идеал.

б) $\Rightarrow$ в). Пусть B — ненулевой идеал кольца R. Так как R первично, то B — существенный правый идеал. Поэтому все правые идеалы, содержащие B, существенны и являются по условию б) идеалами. Тогда R/B — инвариантное справа кольцо. Поскольку к тому же R/B — собственное фактор-кольцо наследственного нетерова первичного кольца, то R/B — артиново полуцепное кольцо [2, с. 382]. Поэтому R — конечное прямое произведение цепных артиновых колец.

Теорема 2. *Для наследственного нетерова полупервичного кольца R равносильны следующие условия:*

а) *все сингулярные правые R-модули эндодистрибутивны;*

б) *все сингулярные циклические правые R-модули эндодистрибутивны;*

в) *все существенные правые идеалы кольца R являются идеалами.*

Доказательство. Так как R — конечное прямое произведение первичных колец [2, с. 197], то можно считать, что кольцо R первично. Импликация а) $\Rightarrow$ б) тривиальна.

б) $\Rightarrow$ в). Поскольку R — наследственное нетерово первичное кольцо, то R либо ограничено справа, либо примитивно справа [6]. В первом случае импликация б) $\Rightarrow$ в) вытекает из леммы 5 и того, что любой ненулевой идеал первичного кольца является существенным правым идеалом. Пусть теперь R примитивно справа, M — максимальный правый идеал кольца R, не содержащий ненулевых идеалов. Считаем, что $M \neq 0$. Правый идеал M не может быть существенным, поскольку в противном случае модуль $(R/M)_R$ был бы эндодистрибутивным по условию модулем и, повторяя рассуждения из доказательства следствия 3, мы доказали бы, что M — идеал, и получили бы противоречие. Так как несущественный максимальный правый идеал является прямым слагаемым, то $R_R = M \oplus N$, где N — минимальный правый идеал. Тогда R — наследственное нетерово первичное кольцо с ненулевым правым цоколем и, как легко видеть, полупростое артиново кольцо.

в)$\Rightarrow$а). Пусть A — сингулярный модуль; a, b, d — его произвольные элементы; $E = \mathrm{End}\,(A)$, $D = (0 : a) \cap (0 : b) \cap (0 : d)$ — существенный правый идеал кольца R, являющийся по условию идеалом кольца R, $T = R/D$, $F = \{g \in A \quad gD = 0\}$. Достаточно доказать включение $Ea \cap (Eb + Ed) \subseteq Ea \cap Eb + Ea \cap Ed$. Так как $Ea + Eb + Ed \subseteq F$, то достаточно доказать эндодистрибутивность модуля F_R, что равносильно эндодистрибутивности модуля F_T над кольцом T, являющимся, как доказано в [2, с. 382], артиновым полуцепным кольцом. Эндодистрибутивность модуля F_T вытекает из лемм 4 и 5.

Частным случаем теоремы 2 является теорема 3.

Теорема 3. *Структура вполне инвариантных подмодулей периодического модуля над дедекиндовым кольцом дистрибутивна.*

1. *Stephenson W.* Modules whose lattice of submodules is distributive.— Proc. London Math. Soc., 1974, 28, N 2, p. 291—310.
2. *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули и категории: В 2-х т.— М. : Мир, 1979.— Т. 2. 464 с.
3. *Camillo V. P.*, Distributive modules.— J. Algebra, 1975, 36, N 1, p. 16—25.
4. *Каш Ф.* Модули и кольца.— М. : Мир, 1981.— 368 с.
5. *Stenström B.* Rings of quotients. An introduction to methods of ring theory.—Berlin et al. : Springer, 1975.— 304 p.
6. *Lenagan T. H.* Bounded hereditary noetherian prime rings.— J. London Math. Soc., 1973, 6, N 2, p. 241—246.

Моск. энергет. ин-т
Получено 19.11.84