УДК 517.948

С. В. Переверзев

Об оптимальных способах задания информации при решении интегральных уравнений с дифференцируемыми ядрами

1. Постановка задачи и вспомогательные утверждения. Пусть X — линейное нормированное пространство, $\mathcal{H}$ — некоторое множество линейных непрерывных операторов, действующих из X в X и таких, что уравнение

$$z = Hz + f \qquad (1)$$

однозначно разрешимо при любых $H \in \mathcal{H}$, $f \in \Phi \subset X$. Класс уравнений (1) будем обозначать $[\mathcal{H}, \Phi]$.

Предположим, что информация о каждом уравнении из $[\mathcal{H}, \Phi]$ задается в виде значений непрерывных функционалов $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$, определенных на множестве пар (H, f), $H \in \mathcal{H}$, $f \in \Phi$, и требующих для вычисления значений $\gamma_1(H, f), \ldots, \gamma_N(H, f)$ $O(N^2)$ простейших операций (в среднем по $O(N)$ операций на вычисление значения каждого γ_i, $i = 1, 2, \ldots, N$), к которым относятся арифметические операции, вычисление значения функции, вычисление интеграла. Множество всевозможных наборов $\{\gamma_i\}_{i=1}^N$ таких функционалов будем обозначать Γ_N. Пусть $M(\gamma_1, \ldots, \gamma_N)$ — множество алгоритмов в смысле Маркова приближенного решения уравнений из $[\mathcal{H}, \Phi]$, использующих в качестве информации об этих уравнениях значения функционалов $\{\gamma_i\}_{i=1}^N \in \Gamma_N$, а $z(A, \gamma_1, \ldots, \gamma_N)$ — результат приближенного решения уравнения (1) с помощью алгоритма $A \in M(\gamma_1, \ldots, \gamma_N)$.

Следуя [1, 2], рассмотрим величины

$$v([\mathcal{H}, \Phi], X, \{\gamma_i\}) = \inf_{A \in M(\gamma_1, \ldots, \gamma_N)} \sup_{[\mathcal{H}, \Phi]} \| z - z(A, \gamma_1, \ldots, \gamma_N) \|_X, \tag{2}$$

$$v_N([\mathcal{H}, \Phi], X) = \inf_{\{\gamma_i\} \in \Gamma_N} v([\mathcal{H}, \Phi], X, \{\gamma_i\}), \tag{3}$$

где точная верхняя грань берется по всем уравнениям из класса $[\mathcal{H}, \Phi]$.

Как и в [3, с. 21], набор функционалов $\{\gamma_i^*\} \in \Gamma_N$ и алгоритм $A^* \in \in M(\gamma_1^*, \ldots, \gamma_N^*)$, для которых

$$\sup_{[\mathcal{H}, \Phi]} \| z - z(A^*, \gamma_1^*, \ldots, \gamma_N^*) \|_X \asymp v_N([\mathcal{H}, \Phi], X),$$

будем называть соответственно оптимальным способом задания информации и оптимальным алгоритмом относительно величины $v_N([\mathcal{H}, \Phi], X)$.

В настоящей работе для некоторых классов интегральных уравнений Фредгольма II рода найдем точный порядок величины (3) и укажем способы задания информации и алгоритмы, реализующие этот порядок. Для простоты изложения ограничимся рассмотрением периодического случая.

Обозначим через C пространство непрерывных 2π-периодических функций с обычной нормой ($\|f\|_C = \max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |f(x)|$) и пусть $\mathcal{H}^{r,s}(\alpha, \beta)$—класс операторов Фредгольма вида

$$Hz(x) = \int_0^{2\pi} h(x, y) z(y)\, dy, \tag{4}$$

для которых

$$\|(E - H)^{-1}\|_{C \to C} < \beta, \quad \beta > 1 \tag{5}$$

(E — единичный оператор), а ядро $h(x, y)$ есть 2π-периодическая по каждой переменной функция такая, что для любой $z \in C$

$$\| d^k/dx^k \int_0^{2\pi} \partial^m h(x, y)/\partial y^m z(y)\, dy \|_C \leqslant \alpha_{km} \| z \|_C, \ k = \overline{0, r}, \ m = \overline{0, s}, \ \alpha = \{\alpha_{km}\}. \tag{6}$$

Пусть еще $\mathcal{H}^r(\mu, \beta)$ — класс удовлетворяющих условию (5) операторов вида (4), ядра которых являются 2π-периодическими функциями своих аргументов, и для любой $z \in C$

$$\| d^{r-i}/dx^{r-i} \int_0^{2\pi} \partial^i h(x, y)/\partial y^i z(y)\, dy \|_C \leqslant \mu_i \| z \|_C, \quad i = \overline{0, r}, \quad \mu = \{\mu_i\},$$

$$\| H \|_{C \to C} \leqslant \mu_{r+1}. \tag{7}$$

Рассмотрим следующие классы уравнений вида (1):

$$\Psi^{r,s,\nu} = \Psi^{r,s,\nu}(\alpha, \beta, \gamma) = [\mathcal{H}^{r,s}(\alpha, \beta), C_\gamma^\nu], \quad \Psi^{r,\nu} = \Psi^{r,\nu}(\mu, \beta, \gamma) = [\mathcal{H}^r(\mu, \beta), C_\gamma^\nu],$$

где C_γ^ν — множество 2π-периодических функций $f(x)$, имеющих на $[0, 2\pi]$ непрерывную производную $f^{(\nu)}$ и $\|f\|_C + \|f^{(\nu)}\|_C \leqslant \gamma$. Отметим, что классы уравнений, аналогичные $\Psi^{r,s,\nu}$ и $\Psi^{r,\nu}$, рассматривались в [4, с. 163].

Лемма 1. *При* $r \geqslant 1$

$$v_N(\Psi^{r,r}, C) \geqslant k_1 N^{-r}, \tag{8}$$

$$v_N(\Psi^{r,r,r}, C) \geqslant k_2 N^{-r}, \tag{9}$$

где k_1, k_2 — *постоянные, не зависящие от* N.

Доказательство проведем для неравенства (8) (неравенство (9) доказывается аналогично). Зафиксируем произвольным образом $H_0 \in \mathcal{H}^r(\mu, \beta)$, $\{\gamma_i\} \in \Gamma_N$ и пусть W_ξ^r — класс 2π-периодических функций $\varphi(x)$ со средним значением на периоде, равным нулю, у которых $\|\varphi^{(r)}\|_C \leqslant \xi$, а $\Phi_\xi = \{f : f = z - H_0 z,\ z \in W_\xi^r\}$. Постоянную ξ выберем теперь так, чтобы множество $[H_0, \Phi_\xi]$ уравнений вида $z = H_0 z + f$, $f \in \Phi_\xi$, принадлежало $\Psi^{r,r}$.

Рассмотрим отображение ω, ставящее в соответствие решению z уравнения $z = H_0 z + f$ из $[H_0, \Phi_\xi]$ вектор $(\gamma_1(H_0, f), \ldots, \gamma_N(H_0, f)) \in R_N$. Ввиду однозначной разрешимости уравнений из $[H_0, \Phi_\xi]$ множество их решений целиком заполняет класс W_ξ^r, а отображение ω является непрерывным отображением W_ξ^r в R_N.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $z_1, z_2 \in W_\xi^r$ так, чтобы $\omega(z_1) = \omega(z_2)$ и

$$\|z_1 - z_2\|_C \geqslant (1 - \varepsilon)\, \delta_N(W_\xi^r, C), \tag{10}$$

где $\delta_N(\mathfrak{M}, C) = \inf\limits_{\omega:\mathfrak{M}\to R_N} \sup\limits_{z\in\mathfrak{M}} \operatorname{diam} \omega^{-1}\cdot\omega(z)$ — предтабличный поперечник К. И. Бабенко [3, с. 18] класса $\mathfrak{M}$ в C. Из результатов § 4 гл. 1 [3] следует

$$\delta_N(W_\xi^r, C) \asymp N^{-r}. \tag{11}$$

Заметим теперь, что z_1 и z_2 являются решениями уравнений $z = H_0 z + f_i$, $f_i = z_i - H_0 z_i$, $i = 1, 2$, из множества $[H_0, \Phi_\xi] \subset \Psi^{r,r}$ и $\gamma_k(H_0, f_1) = \gamma_k(H_0, f_2)$, $k = \overline{1, N}$. Но тогда для любого $A \in M(\gamma_1, \ldots, \gamma_N)$

$$\|z_1 - z_2\|_C \leqslant \|z_1 - z(A, \gamma_1(H_0, f_1), \ldots, \gamma_N(H_0, f_1))\|_C + \|z_2 - z(A, \gamma_1(H_0, f_2), \ldots$$
$$\ldots, \gamma_N(H_0, f_2))\|_C \leqslant 2 \sup_{\Psi^{r,r}} \|z - z(A, \gamma_1, \ldots, \gamma_N)\|_C \tag{12}$$

и в силу произвольности $\varepsilon > 0$, $\{\gamma_i\} \in \Gamma_N$, $A \in M(\gamma_1, \ldots, \gamma_N)$ утверждение леммы следует из (10) — (12).

В п. 3 будут приведены эффективные способы задания информации об уравнениях классов $\Psi^{r,r}$ и $\Psi^{r,r,r}$, для которых величина (2) имеет порядок N^{-r}, и указаны алгоритмы, реализующие этот порядок. При этом окажется, что эти алгоритмы можно построить на базе оптимальных для $\Psi^{r,r}$, $\Psi^{r,r,r}$ адаптивных прямых методов, которые изучим в п. 2.

2. Оптимальные прямые методы. Следуя С. Л. Соболеву [5], к прямым методам решения уравнения (1) будем относить методы, при которых нахождение приближенного решения (1) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Рассмотрим прямые методы решения (1), представляющие собой правила p, по которым оператору $H \in \mathcal{H}$ сопоставляется подпространство $F_N \subset X$ размерности N и оператор H_N из X в F_N такие, что уравнение

$$z_p = H_N z_p + f \tag{13}$$

однозначно разрешимо, и z_p берется в качестве приближенного решения (1). При фиксированном N множество всех таких прямых методов p обозначим через $\mathcal{P}_N$, а совокупность прямых методов $p \in \mathcal{P}_N$, сопоставляющих всем операторам $H \in \mathcal{H}$ фиксированное подпространство $F_N \subset X$, — через $\mathcal{P}_{F_N}$. В работах [6, 7] рассматривалась оптимизация прямых методов решения (1) по точности в смысле величины $\theta_N([\mathcal{H}, \Phi], X) = \inf\limits_{p \in \mathcal{P}_N} \sup\limits_{[\mathcal{H}, \Phi]} \| z - z_p \|_X$ (смысл термина «адаптивный прямой метод» пояснен в [6]). Продолжая исследования [6, 7], найдем точный порядок величин $\theta_N(\Psi^{r,\nu}, C)$, $\theta_N(\Psi^{r,s,\nu}, C)$ и укажем метод, реализующий этот порядок.

Рассмотрим операторы $V^k_{n,x}$ и $V^k_{n,y}$, определяемые соотношениями

$$V^k_{n,x} h(x, y) = \int\limits_0^{2\pi} V^k_n(x - t)\, h(t, y)\, dt, \quad V^k_{n,y} h(x, y) = \int\limits_0^{2\pi} V^k_n(y - t)\, h(x, t)\, dt,$$

где $V^k_n(t) = \pi^{-1}[2^{-1} + \sum\limits_{m=1}^{n} \cos mt + \sum\limits_{m=n+1}^{n+k-1} (1 - (m - n)/k) \cos mt]$ — ядро Валле Пуссена. В дальнейшем нам потребуется следующая оценка приближения функции f, имеющей производную $f^{(\nu)} \in C$, суммами Валле Пуссена $V^n_n f(x) = \int\limits_0^{2\pi} V^n_n(x - t) f(t)\, dt$ (см., например, [8, с. 119]):

$$\| f - V^n_n f \|_C \leqslant k_\nu n^{-\nu} \| f^{(\nu)} \|_C, \tag{14}$$

где k_ν — некоторая постоянная, зависящая только от ν.

Обозначим через p_n метод из $\mathcal{P}_{8n-2}$, ставящий в соответствие каждому оператору вида (4) конечномерный оператор $\tilde{H}_{8n-2}$:

$$\tilde{H}_{8n-2} z(x) = \int\limits_0^{2\pi} [V^n_{n,x} h(x, y) + V^n_{n,y} h(x, y) - V^n_{n,x} V^n_{n,y} h(x, y)]\, z(y)\, dy. \tag{15}$$

Отметим, что оператор (15) действует в подпространство, базисом которого является максимальная линейно независимая система из множества функций $\{\sin mx, \cos mx, H \sin mx, H \cos mx\}_{m=0}^{2n-1}$.

Лемма 2. *Пусть функция f имеет производную $f^{(\nu)} \in C$. Тогда для $H \in \mathcal{H}^{r,s}(\alpha, \beta)$*

$$\| (H - \tilde{H}_{8n-2}) f \|_C \leqslant k_3 n^{-r-s-\nu} \| f^{(\nu)} \|_C, \tag{16}$$

а для $H \in \mathcal{H}^r(\mu, \beta)$

$$\| (H - \tilde{H}_{8n-2}) f \|_C \leqslant k_4 n^{-r-\nu} \| f^{(\nu)} \|_C, \tag{17}$$

где k_3, k_4 — некоторые постоянные, зависящие лишь от r, s, ν, α, μ, β.

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы из [7], только вместо соотношения (5) работы [7] следует использовать неравенство (14).

Замечание. Из соотношения (17) и теоремы об обратимости линейного оператора, близкого к обратимому [9, с. 212], следует, что для $H \in \mathcal{H}^r(\mu, \beta)$ оператор $E - \tilde{H}_{8n-2}$ будет иметь ограниченный обратный при выполнении условия $\| H - \tilde{H}_{8n-2} \|_{C \to C} \leqslant k_4 n^{-r} < \beta^{-1} < (\| (E - H)^{-1} \|_{C \to C})^{-1}$, из которого находим, что $(E - \tilde{H}_{8n-2})^{-1}$ ограничен при $n > (\beta k_4)^{1/r}$. Кроме того,

$$\| E - \tilde{H}_{8n-2})^{-1} \|_{C \to C} < \beta/(1 - k_4 \beta n^{-r}) = \beta_n. \tag{18}$$

Аналогично для $H \in \mathcal{H}^{r,s}(\alpha, \beta)$ при $n > (\beta k_3)^{1/r+s}$

$$\| (E - \tilde{H}_{8n-2})^{-1} \|_{C \to C} < \beta/(1 - k_3 \beta n^{-r-s}).$$

Теорема 1. *При $r, s \geqslant 1$, $r \geqslant \nu \geqslant 0$*

$$\theta_N(\Psi^{r,s,\nu}, C) \asymp N^{-r-s-\nu}, \tag{19}$$

$$\theta_N(\Psi^{r,\nu}, C) \asymp N^{-r-\nu}. \tag{20}$$

Указанный порядок на классах $\Psi^{r,s,\nu}$, $\Psi^{r,\nu}$ реализует метод p_n, $n=[(N+2)/8]$ ($[m]$ — целая часть числа m).

Доказательство. Докажем соотношение (20) (соотношение (19) доказывается аналогично). Заметим, что

$$z-z_{p_n}=\tilde{H}_{8n-2}(z-z_{p_n})+(H-\tilde{H}_{8n-2})z. \tag{21}$$

Из леммы 2, (21) и соотношения (18) находим

$$\|z-z_{p_n}\|_C\leqslant\|(E-\tilde{H}_{8n-2})^{-1}\|_{C\to C}\|(H-\tilde{H}_{8n-2})z\|_C\leqslant\beta_n k_4 n^{-r-\nu}\|z^{(\nu)}\|_C,$$

но $\|z^{(\nu)}\|_C\leqslant\|d^\nu Hz/dx^\nu\|_C+\|f^{(\nu)}\|_C$, и в силу (7) и неравенства Колмогорова для производных [10, с. 119]

$$\|d^\nu Hz/dx^\nu\|_C\leqslant c_{r,\nu}\|Hz\|_C^{(r-\nu)/r}\|d^rHz/dx^r\|_C^{\nu/r}\leqslant c_{r,\nu}\beta\gamma\mu_{r+1}^{(r-\nu)/r}\mu_0^{\nu/r},$$

где $c_{r,\nu}=K_{r-\nu}/K_r^{1-\nu/r}$, K_m — константа Фавара. Таким образом,

$$\|z^{(\nu)}\|_C\leqslant\gamma(1+c_{r,\nu}\beta\mu_{r+1}^{(r-\nu)/r}\mu_0^{\nu/r}), \tag{22}$$

$$\|z-z_{p_n}\|_C\leqslant k_4n^{-r-\nu}\gamma(1+c_{r,\nu}\beta\mu_{r+1}^{(r-\nu)/r}\mu_0^{\nu/r})\beta/(1-k_4\beta n^{-r}), \tag{23}$$

и требуемая оценка сверху для величины $\theta_N(\Psi_C^{r,\nu}, C)$ получена.

Для получения оценки снизу зафиксируем N и рассмотрим оператор T_N, определяемый равенством $T_Nf(x)=N^{-r}V_N^Nf(x)=N^{-r}\int\limits_0^{2\pi}V_N^N(x-y)\times f(y)\,dy$, где $V_N^N(t)$ и $V_N^Nf(x)$ — соответственно ядро Валле Пуссена и сумма Валле Пуссена функции f. Заметим, что для $f\in C$ в силу неравенства Бернштейна для полиномов [8, с. 216]

$$\left\|d^{r-i}/dx^{r-i}N^{-r}\int\limits_0^{2\pi}\partial^iV_N^N(x-y)/\partial y^if(y)\,dy\right\|_C=\|N^{-r}d^rV_N^Nf(x)/dx^r\|_C\leqslant$$
$$\leqslant 2^r\|V_N^Nf(x)\|_C\leqslant 2^r\|V_N^N\|_{C\to C}\|f\|_C,\quad i=0,1,\ldots,r. \tag{24}$$

Из (24) и ограниченности в C оператора V_N^N следует, что найдется число $\delta>0$ такое, что оператор $T_{N,\delta}=\delta T_N\in\mathcal{H}^r(\mu,\beta)$.

Обозначим через $\Phi_\varkappa^\nu$ множество функций f, представимых в виде $f=\varphi-T_{N,\delta}\varphi$, где φ пробегает шар U_R радиуса $R=\varkappa N^{-\nu}$ в пространстве тригонометрических полиномов порядка N с нормой пространства C. В силу упоминавшегося неравенства Бернштейна константу $\varkappa$ можно выбрать так, чтобы $\Phi_\varkappa^\nu\subset C_\gamma^\nu$. При этом решения уравнений $z=T_{N,\delta}z+f, f\in\Phi_\varkappa^\nu$, множества $[T_{N,\delta},\Phi_\varkappa^\nu]\subset\Psi^{r,\nu}$ целиком заполняют шар U_R, а функции $T_{N,\delta}z(x)=\delta N^{-r}z(x)$ — шар U_{R_1} радиуса $R_1=\delta\varkappa N^{-r-\nu}$. Применяя теорему о поперечнике шара [10, с. 255; 11], получаем требуемую оценку снизу:

$$\theta_N(\Psi^{r,\nu},C)\geqslant\inf_{p\in\mathcal{P}_N}\sup_{[T_{N,\delta},\Phi_\varkappa^\nu]}\|z-z_p\|_C\geqslant$$
$$\geqslant\inf_{\substack{F_N\subset C\\ \dim F_N=N}}\sup_{z\in U_R}\inf_{u\in F_N}\|T_{N,\delta}z-u\|_C=R_1\asymp N^{-r-\nu}.$$

Теорема доказана.

Отметим, что впервые на возможность применения тех или иных методов суммирования рядов Фурье для построения прямых методов из $\mathcal{P}_{F_N}\subset\mathcal{P}_{2N-1}$ (F_N — пространство тригонометрических полиномов порядка N) было указано в [12].

3. Основные результаты. Вернемся к рассмотрению задачи об оптимальном способе задания информации. Обозначим через $S_{m,r}$

$2m$-мерное подпространство 2π-периодических полиномиальных сплайнов степени $r-1$ дефекта 1 по разбиению $\{k\pi/m\}_{k=1}^{2m}$. Пусть $L_{m,i}\in S_{m,r}$, $i=\overline{1, 2m}$, и $L_{m,i}(t_k)=\delta_{k,i}$, где $t_k=k\pi/m-[(-1)^{r-1}+1]\pi/(4m)$, а $\delta_{k,i}$ — символ Кронекера. Рассмотрим оператор $\sigma_{m,r}$, ставящий в соответствие каждой функции $f\in C$ сплайн $\sigma_{m,r}(f, x)=\sum\limits_{k=1}^{2m} f(x_k)\, L_{m,k}(x)$. Известно (см. [10, с. 290; 13]), что

$$\|\sigma_{m,r}\|_{C\to C}=O(\ln r),\ m\to\infty, \tag{25}$$

и для любой функции $f\in C$, у которой $f^{(r)}\in C$,

$$\|f-\sigma_{m,r}(f, \cdot)\|_C\leqslant K_r\|f^{(r)}\|_C\, m^{-r}. \tag{26}$$

Пусть z и z_{p_n} — соответственно решение некоторого уравнения из $\Psi^{r,r}(\mu, \beta, \gamma)$ и приближенное решение этого уравнения, полученное методом $p_n\in\mathcal{P}_{8n-2}$. При этом

$$z_{p_n}(x)=\int\limits_0^{2\pi} h(x, t)\sum_{k=0}^{2n-1} a_k\cos kt+b_k\sin kt dt+\sum_{k=0}^{2n-1} c_k\cos kx+d_k\sin kx+f(x), \tag{27}$$

где числа a_k, b_k, c_k, d_k — решения соответствующей прямому методу p_n системы не более чем $8n-2$ линейных алгебраических уравнений, компоненты матрицы и столбца свободных членов которой определяются однозначно значениями функционалов

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h_1(x, y)\cos(k_1x+\pi i/2)\cos(k_2y+\pi j/2)\, dxdy,$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h(x, y)\, f(y)\cos(k_1x+\pi i/2)\, dxdy, \tag{28}$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h(x, y)\cos(k_1x+\pi i/2)\cos(k_2y+\pi j/2)\, dxdy,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(k_1x+\pi i/2)\, dx,\ \ i, j=0, 1,\ k_1, k_2=0, 1, 2, \ldots, 2n-1. \tag{29}$$

Здесь $h(x, y)$ и $f(x)$ — ядро и свободный член рассматриваемого уравнения, а $h_1(x, y)=\int\limits_0^{2\pi} h(x, t)\, h(t, y)\, dt$ — первое итерированное ядро.

В силу (27) для нахождения значения z_{p_n} в точках t, $i=\overline{1, 2m}$, достаточно знать значения функционалов (28), (29) и функционалов

$$\int\limits_0^{2\pi} h(t_i, t)\sum_{k=0}^{2n-1} a_k\cos kt+b_k\sin kt dt,\ f(t_i),\ \ i=1, 2, \ldots, 2m. \tag{30}$$

Из соотношений (22), (23), (25) и (26) находим, что при $m\asymp n^2$

$$\|z-\sigma_{m,r}(z_{p_n})\|_C\leqslant\|z-\sigma_{m,r}(z)\|_C+\|\sigma_{m,r}\|_{C\to C}\|z-z_{p_n}\|_C\leqslant km^{-r}, \tag{31}$$

где постоянная k зависит лишь от параметров, входящих в определение класса $\Psi^{r,r}$.

Таким образом, из (28)—(31) следует, что найден набор функционалов $\{\gamma_i^*\}_{i=1}^{N}$ вида (28) — (30), $N=4m+8n(4n-1)$, $n\asymp m^{1/2}$, принадлежащий Γ_N, и алгоритм $A^*\in M(\gamma_1^*, \ldots, \gamma_N^*)$ такой, что

$$z(A^*, \gamma_1, \ldots, \gamma_N^*)=\sigma_{m,r}(z_{p_n}), \tag{32}$$

для которых

$$\sup_{\Psi^{r,r}} \| z - z(A^*, \gamma_1^*, \ldots, \gamma_N^*) \|_C = O(N^{-r}).$$

С учетом леммы 1 справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *При* $r \geqslant 1$ $v_N(\Psi^{r,r}, C) \asymp N^{-r}$. *Набор функционалов* $\{\gamma_i^*\}_{i=1}^N$ *вида* (28)—(30) *при* $n = [N^{1/2}/64]$, $m = [(N - 8n(4n-1))/4]$ *определяет оптимальный относительно величины* $v_N(\Psi^{r,r}, C)$ *способ задания информации об уравнениях класса* $\Psi^{r,r}$, *а алгоритм* A^*, *определяемый равенством* (32), *является оптимальным алгоритмом относительно величины* $v_N(\Psi^{r,r}, C)$.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 3. *При* $n = [N^{1/3}]$, $m = [(N - 8n(4n-1))/4]$ *набор функционалов* $\{\gamma_i^*\}_{i=1}^N$ *вида* (28)—(30) *и алгоритм* A^*, *определяемый равенством* (32), *являются соответственно оптимальным способом задания информации и оптимальным алгоритмом в смысле величины* $v_N(\Psi^{r,r,r}\ C)$, $r \geqslant 1$. *При этом* $v_N(\Psi^{r,r,r}, C) \asymp N^{-r}$.

Теоремы 2, 3 позволяют указать способы задания информации, которые хотя и не являются оптимальными, но в определенном смысле более экономичны по сравнению с некоторыми используемыми на практике способами. Приведем пример.

Рассмотрим способ задания информации, при котором каждому уравнению вида (1) с оператором вида (4) ставятся в соответствие значения функционалов (29) и

$$\int_0^{2\pi} h(t_i, t) \cos(k_1 t + \pi j/2)\, dt, \ \int_0^{2\pi} h(t, t_i) \cos(k_1 t + \pi j/2)\, dt,$$

$$f(t_i), \ i = \overline{1, 2m}, \ k_1 = \overline{0, 2n-1}, \ j = 0, 1. \tag{33}$$

Располагая информацией (33), можно приближенно вычислить значения функционалов (28) по формулам

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} h_1(x, y) \cos(k_1 x + \pi i/2) \cos(k_2 y + \pi j/2)\, dx dy =$$

$$= \pi/m \sum_{\nu=1}^{2m} \int_0^{2\pi} h(t, t_\nu) \cos(k_1 t + \pi i/2)\, dt \int_0^{2\pi} h(t_\nu, t) \cos(k_2 t + \pi j/2)\, dt + \omega_{k_1,k_2,i,j}, \tag{34}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} h(x, y) f(y) \cos(k_1 x + \pi i/2)\, dx dy = \pi/m \sum_{\nu=1}^{2m} f(t_\nu) \int_0^{2\pi} h(t, t_\nu) \cos(k_1 t + \pi i/2)\, dt + \lambda_{k_1,i}. \tag{35}$$

Заметим, что для операторов вида (4) из класса $\mathcal{H}^r(\mu, \beta)$ функции $\varphi_k(x) = \int_0^{2\pi} h(x, t) \cos(kt + \pi i/2)\, dt$, $\psi_k(x) = \int_0^{2\pi} h(t, x) \cos(kt + \pi i/2)\, dt$ имеют суммируемые на $(0, 2\pi)$ производные $\varphi_k^{(r)}$, $\psi_k^{(r)}$, нормы которых в пространстве суммируемых 2π-периодических функций не превышают $2\pi \max\{\mu_r, \mu_0\}$. Но тогда, в силу [14, с. 217],

$$\max_{i,j,k_1,k_2} \{|\omega_{k_1,k_2,i,j}|, |\lambda_{k_1 i}|\} \leqslant k m^{-r}, \tag{36}$$

где k — постоянная, не зависящая от m, h, f.

Пусть

$$\tilde{z}_{p_n}(x) = \int_0^{2\pi} h(x,t) \sum_{k=0}^{2n-1} \tilde{a}_k \cos kt + \tilde{b}_k \sin kt dt +$$
$$+ \sum_{k=0}^{2n-1} \tilde{c}_k \cos kx + \tilde{d}_k \sin kx + f(x),$$

где числа $\tilde{a}_k$, $\tilde{b}_k$, $\tilde{c}_k$, $\tilde{d}_k$ определяются из системы линейных уравнений, матрица и столбец свободных членов которой отличается от матрицы и столбца свободных членов системы уравнений для a_k, b_k, c_k, d_k из (27) тем, что компоненты, соответствующие (28), заменены квадратурными суммами из (34), (35). Из (7), (27), (34)—(36) и обычных неравенств для норм решений системы линейных алгебраических уравнений находим

$$\| z_{p_n} - \tilde{z}_{p_n} \|_C \leqslant \max\{1, \mu_{r+1}\} \sum_{k=0}^{2n-1} (| a_k - \tilde{a}_k | + | b_k - \tilde{b}_k | + | c_k - \tilde{c}_k | +$$
$$+ | d_k - \tilde{d}_k |) \leqslant c_1 \max_i \sum_{k_1=0}^{2n-1} | \lambda_{k_1,i} | + c_2 \max_{i,j} \left\{ \max_{k_1} \sum_{k_2=0}^{2n-1} | \omega_{k_1,k_2,i,j} |, \right.$$
$$\left. \max_{k_2} \sum_{k_1=0}^{2n-1} | \omega_{k_1,k_2,i,j,} | \right\} \leqslant km^{-r}n. \tag{37}$$

Здесь c_1, c_2, k — постоянные, зависящие от r, μ, β. Но тогда, если информация об уравнениях класса $\Psi^{r,r}$ задается набором $N = 2m(8n-1) + 4n(4n-1)$ функционалов $\hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_N$ вида (29), (33), то при $n = [N^{r/3r+1}]$, $m = [(N - 4n(4n-1))/(16n-2)]$ для алгоритма $\hat{A} \in M(\hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_N)$, при котором $z(\hat{A}, \hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_N) = \sigma_{m,r}(\tilde{z}_{p_n})$, из (25), (31) и (37) имеем

$$\sup_{\Psi^{r,r}} \| z - z(\hat{A}, \hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_N) \|_C \asymp N^{-2r^2/3r+1}. \tag{38}$$

Пусть $\overline{\Gamma}_N$ — множество всевозможных наборов из N функционалов $\{\gamma_i\}_{i=1}^N$, сопоставляющих каждому уравнению вида (1) с оператором H вида (4) числа $\gamma_i(H, f) = h(x_i, y_i)$, $i = \overline{1, N-k}$, $\gamma_i(H, f) = f(u_i)$, $i = \overline{N-k+1, N}$. Из результатов [15] следует

$$\inf_{\{\gamma_i\} \in \overline{\Gamma}_N} \inf_{A \in M(\gamma_1, \ldots, \gamma_N)} \sup_{\Psi^{r,r}} \| z - z(A, \gamma_1, \ldots, \gamma_N) \|_C \asymp N^{-r/2}. \tag{39}$$

Сравнивая (38) и (39) при $r > 1$, убеждаемся в преимуществе способа задания информации набором функционалов (29), (33) над способами задания информации наборами функционалов из $\overline{\Gamma}_N$.

1. *Бахвалов Н. С.* О свойствах оптимальных методов решения задач математической физики.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1970, **10**, № 3, с. 555—568.
2. *Иванов В. В.* Об оптимальных алгоритмах численного решения сингулярных интегральных уравнений.— В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М. : Наука, 1972, с. 209—219.
3. *Теоретические* основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики / Под ред. К. И. Бабенко.— М. : Наука, 1979.— 295 с.
4. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1980.— 263 с.
5. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики.— М. : Гостехиздат, 1950.— 424 с.
6. *Переверзев С. В.* Об оптимизации адаптивных методов приближенного решения интегральных уравнений.— Докл. АН СССР, 1982, **267**, № 6, с. 1304—1308.
7. *Переверзев С. В.* Об одной задаче оптимизации методов приближенного решения уравнений Фредгольма.— Укр. мат. журн., 1983, 35, № 3, с. 378—382.
8. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М. : Наука, 1977.— 508 с.

9. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М. : Наука, 1972.— 496 с.
10. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.— М. : Наука, 1976.— 320 с.
11. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучшего приближения.— Успехи мат. наук, 1960, **15**, № 3, с. 81—120.
12. *Дзядык В. К.* О применении линейных методов к приближению полиномами функций, являющихся решениями интегральных уравнений Фредгольма второго рода.— Укр. мат. журн., 1970, **22**, № 4, с. 461—480.
13. *Женсыкбаев А. А.* Точные оценки равномерного приближения непрерывных периодических функций сплайнами r-го порядка.— Мат. заметки, 1973, **13**, № 2, с. 217—228.
14. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы.— М. : Наука, 1979.— 255 с.
15. *Емельянов К. В., Ильин А. М.* О числе арифметических действий, необходимом для приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1967, **7**, № 4, с. 905—910.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 10.06.84
после доработки — 28.06.85