УДК 517.937

В. А. Михайлец

Спектральный анализ эллиптических дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве

Пусть $J = \bigcup_{k=1}^{n} J_k$, $J_k = (a_{k-1}, a_k)$, $-\infty < a_0 < \ldots < a_n < \infty$, $k = 1, \ldots$ $\ldots, n < \infty$, H — сепарабельное гильбертово пространство. Рассмотрим заданное на множестве J дифференциальное выражение с операторными коэффициентами:

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{n} \chi_{J_k}(x)\, r_k (D^{2m_k} + A_k^{2m_k}) + Q(x), \tag{1}$$

где $D = id/dx$, $m_k \in \mathbb{N}$, $r_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\chi_{J_k}(x)$ характеристическая функция интервала, A_k — положительно определенные самосопряженные операторы в H, $Q(x)$ — слабо измеримая операторная функция $x \in J$ со значениями в $[H]$ и такая, что $Q(x) = Q^*(x)$ и $\|Q(x)\|_{[H]} \leqslant M < \infty$.

Дифференциальное выражение вида (1) при $n \geqslant 2$ содержит, в частности, некоторые выражения с разрывными коэффициентами при производных, а также при неограниченном операторном коэффициенте. Спектральная теория таких выражений развита еще недостаточно полно. При $n = 1$ выражение вида (1) систематически исследовалось ранее (см. [1, 2]). Большая часть приводимых ниже результатов являются новыми и для этого случая.

1. Дифференциальное выражение (1) задает в гильбертовом пространстве вектор-функций $L_2(J; H)$ оператор $\{\mathcal{L}, J\}_0 : u(\cdot) \to (\mathcal{L}u)(\cdot)$. Он определен на плотном множестве вектор-функций вида

$$u(x) = \sum_{j} \sum_{k=1}^{n} \varphi_{j,k}(x) f_{j,k},$$

где сумма по j конечна, скалярные функции $\varphi_{j,k}(x) \in C_0^\infty(J)$, $\operatorname{supp} \varphi_{j,k}(x) \subset J_k$, а векторы $f_{j,k} \in \mathcal{D}(A_k^{2m_k})$.

В принятых нами допущениях оператор $\{\mathcal{L}, J\}_0$ симметричен в $L_2(J; H)$. Его замыкание $\{\mathcal{L}, J\}_{\min}$ и сопряженный оператор $\{\mathcal{L}, J\}_{\max} := \{\mathcal{L}, J\}_0^*$ являются соответственно минимальным и максимальным операторами дифференциального выражения $\mathcal{L}$ в пространстве $L_2(J; H)$.

Используем следующие обозначения: а) $H_s(k)$ — гильбертова шкала пространств, построенная по положительно определенному в пространстве H оператору A_k (см. [3]), $s \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, n}$; б) $u_k(x) := u(x) \mid J_k$, $u(x) \in L_2(J; H) = \bigoplus_{k=1}^{n} L_2(J_k; H)$, $\mathcal{L}_k := \mathcal{L} \mid J_k$, $k = \overline{1, n}$; в) $\{\mathcal{L}, J\}_{\mathcal{D}} := \{\mathcal{L}, J\}_{\max} \mid \{u(x) : u_k(x) \in W_2^{2m_k}(J_k; H) \cap L_2(J_k; H_{2m_k}(k)) \cap \overset{0}{W}{}_2^{m_k}(J_k; H)\}$.

Можно показать, что оператор $\{\mathcal{L}, J\}_{\mathcal{D}}$ самосопряжен в пространстве $L_2(J; H)$. Он полуограничен снизу (сверху) тогда и только тогда, когда $r_k > 0$ ($r_k < 0$). Спектр оператора $\{\mathcal{L}, J\}_{\mathcal{D}}$ дискретен в том и только в том случае, когда выполнено условие (A): *спектр каждого из операторных коэффициентов в выражении* (1) *дискретен*.

Пусть $N_+(\lambda; \cdot)$ и $N_-(\lambda; \cdot)$ — функции распределения собственных значений самосопряженного оператора. Между поведением функций $N_+(\lambda; A_k^{2m_k})$ и $N_\pm(\lambda; \{\mathcal{L}, J\}_{\mathcal{D}})$ имеется связь.

Опишем ее сначала в простейшей ситуации, когда в дифференциальном выражении (1) $n = 1$, $Q(x) \equiv 0$, а $r_1 > 0$.

Теорема 1. *В принятых допущениях при* $\lambda > 0$ *выполняется неравенство*

$$N_+(\lambda; \{\mathcal{L}_1, J_1\}_{\mathcal{D}} - b_1 (I^{1/(2m_1)} N_+(\cdot; A_1^{2m_1}))(\lambda r_1^{-1})| \leqslant (2m_1 + 1) N_+(\lambda r_1^{-1}; A_1^{2m_1}), \tag{2}$$

где $b_1 := (2\pi m_1)^{-1}(a_1 - a_0)\Gamma(1/2m_1)$, I^α — *интеграл Римана — Лиувилля дробного порядка* $\alpha > 0$:

$$(I^\alpha f(\cdot))(\lambda) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\lambda (\lambda - t)^{\alpha - 1} f(t)\, dt.$$

Доказательство теоремы 1 для случая $m_1 = 1$ дано в [14] (см. также [2, с. 227]). Случай $m_1 > 1$ может быть рассмотрен аналогичным образом с учетом следующих замечаний:

1) тождество

$$N_+(\lambda; \{\mathcal{L}_1, J_1\}_{\mathcal{D}}) \equiv \sum_{\lambda_j(A_1^{2m_1}) \leqslant \lambda} N_+(\lambda - \lambda_j(A_1^{2m_1}); \{r_1 D^{2m_1}, J_1\}_{\mathcal{D}}),$$

где $\lambda_j(A_1^{2m_1})$ — собственные числа оператора $A_1^{2m_1}$, $\{r_1 D^{2m_1}; J\}_{\mathcal{D}}$ — самосопряженный оператор в пространстве $L_2(J_1; \mathbb{C})$, верно при всех $m_1 \geqslant 1$. Этот факт следует из теоремы о спектре самосопряженного оператора, допускающего разделение переменных (см. [3, с. 474]);

2) при $m_1 \geqslant 2$ спектр оператора $\{r_1 D^{2m_1}, J_1\}_{\mathcal{D}}$ не выражается явной формулой, но для функции его распределения верно соотношение

$$\left| N_+(\lambda; \{r_1 D^{2m_1}, J_1\}_{\mathcal{D}}) - \left[\frac{(a_1 - a_0)}{\pi \sqrt{r_1}} \lambda^{1/(2m_1)} \right] \right| \leqslant 2m_1, \quad \lambda > 0,$$

где $[\cdot]$ — целая часть вещественного числа. Это неравенство следует из оценки разности функций распределения собственных значений двух самосопряженных расширений симметрического оператора с конечными индексами дефекта (см. [4, с.207]), если учесть, что $\left[\frac{(a_1 - a_0)}{\pi \sqrt{r_1}} \lambda^{1/(2m_1)} \right] \equiv N_+(\lambda; \{r_1^{1/m_1} D^2, J_1\}_{\mathcal{D}}^{m_1})$.

При $r_1 < 0$ в неравенстве (2) в выражении $N_+(\lambda; \{\mathcal{L}_1, J_1\}_{\mathcal{D}})$ знак «+» следует заменить на «—».

Случай $n \geqslant 2$ сводится к рассмотренному очевидным соотношением

$$N_{\pm}(\lambda; \{\mathscr{L}, J\}_{\mathscr{D}}) \equiv \sum_{k=1}^{n} N_{\pm}(\lambda; \{\mathscr{L}_k, J_k\}_{\mathscr{D}}).$$

Из теоремы 1 и последнего тождества вытекают (в предположении, что в выражении (1) $Q(x) \equiv 0$) следствия.

Следствия: 1. *Пусть* $N_{+}(\lambda; A_k^{2m_k}) \sim \Phi_k(\lambda) \uparrow +\infty$, $\Phi_k(\lambda) = o(1) \times \times (I^{1/(2m_k)}\Phi_k)(\lambda)$. *Тогда*

$$N_{\pm}(\lambda; \{\mathscr{L}; J\}_{\mathscr{D}}) \sim \sum_{k: \pm r_k > 0} b_k (I^{1/(2m_k)}\Phi_k)(\lambda), \quad \lambda \to \infty,$$

$$b_k := (2\pi m_k)^{-1}(a_k - a_{k-1})\,\Gamma(1/2m_k).$$

В частности:

1а. *Если* $N_{+}(\lambda; A_k^{2m_k}) \sim c_k \lambda^{\alpha_k} \log^{\beta_k}(1+\lambda)$, $c_k, \alpha_k > 0$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, *то*

$$N_{\pm}(\lambda; \{\mathscr{L}, J\}_{\mathscr{D}}) \sim \sum_{k: \pm r_k > 0} c'_k \lambda^{\alpha_k + 1/(2m_k)} \log^{\beta_k}(1+\lambda) \sim c_{\pm}\lambda^{\alpha_{\pm}} \log^{\beta_{\pm}}(1+\lambda),$$

где $c'_k := (2\pi m_k)^{-1} c_k |r_k|^{-\alpha_k - 1/(2m_k)} (a_k - a_{k-1})\, B(\alpha_k + 1/2,\ 1/(2m_k))$, *а коэффициенты* $\alpha_{\pm}$, $\beta_{\pm}$, $c_{\pm}$ *определяются очевидным образом.*

2. *Пусть* $N_{+}(\lambda; A_k^{2m_k}) = \Phi_k(\lambda)(1 + O(\lambda^{-\delta_k}))$, *где* $\Phi_k(\lambda) \uparrow +\infty$, $\delta_k > 0$. *Тогда*

$$N_{\pm}(\lambda; \{\mathscr{L}; J\}_{\mathscr{D}}) = \sum_{k: \pm r_k > 0} b_k (I^{1/(2m_k)}\Phi_k(\lambda))(1 + O(\lambda^{-\delta_k})) + O(1) \sum_{k: \pm r_k > 0} \Phi_k(\lambda).$$

В частности:

2а. *Если* $N_{+}(\lambda; A_k^{2m_k}) = c_k \lambda^{\alpha_k} + O(\lambda^{\alpha_k - \delta_k})$, c_k, α_k, $\delta_k > 0$, *то*

$$N_{\pm}(\lambda; \{\mathscr{L}, J\}_{\mathscr{D}}) = \sum_{k: \pm r_k > 0} c'_k \lambda^{\alpha_k + 1/(2m_k)} + O(\lambda^{\gamma_{\pm}}), \quad \lambda \to \infty,$$

$$\gamma_{\pm} := \max_{k: \pm r_k > 0} \{\max\{\alpha_k + 1/(2m_k) - \delta_k,\ \alpha_k\}\}.$$

Утверждения следствий 1а и 2а верны и при $Q(x) \not\equiv 0$. Это следует из неравенства $\|Q(\cdot)\|_{[L_2(J;H)]} \leqslant \operatorname{ess\,sup}_{x \in J} \|Q(x)\|_{[H]} \leqslant M < \infty$ и известных фактов теории ограниченных возмущений (см. [4, с. 210]).

Утверждение следствия 1а в менее общем случае установлено ранее в [5] ($n = 1$, $m_1 = 1$, $\beta_1 = 0$) и [6] ($n = 1$, $m_1 \geqslant 2$, $\beta_1 = 0$). Метод [5, 6] использует геометрические соображения (счет целых точек в семействе возрастающих плоских областей). Его развитие позволяет уточнить следствие 2а (см. [13], где $n = 1$, $m_1 = 1$, $\beta_1 = 0$).

2. Рассмотрим произвольные самосопряженные в $L_2(J; H)$ расширения минимального оператора $\{\mathscr{L}, J\}_{\min}$. Будем предполагать, что оператор $\{\mathscr{L}, J\}_{\mathscr{D}}^{-1}$ существует и определен на $L_2(J; H)$.

Положим

$$\mathscr{H} = H \oplus \ldots \oplus H \ (m \text{ слагаемых}), \ m = m_1 + \ldots + m_n,$$

$$\Gamma_i := \{\Gamma_{i,1}, \Gamma_{i,2}, \ldots, \Gamma_{i,n}\}, \quad i = 1, 2,$$

$$\Gamma_{2,k} := \{A_k^{-1/2} u(a_{k-1}+0),\ -A_k^{-1/2} u(a_k - 0), \ldots$$
$$\ldots, A_k^{1/2 - m_k} u^{(m_k - 1)}(a_{k-1}+0),\ -A_k^{1/2-m_k} u^{(m_k-1)}(a_k - 0)\},$$

$$\Gamma_{1,k} := \{A_k^{1/2} v^{(2m_k - 1)}(a_{k-1}+0),\ A_k^{1/2} v^{(2m_k-1)}(a_k - 0), \ldots$$
$$\ldots, A_k^{m_k - 1/2} v^{(m_k)}(a_{k-1}+0),\ A^{m_k - 1/2} v^{(m_k)}(a_k - 0)\},$$

$$u \in \mathscr{D}(\{\mathscr{L}; J\}_{\max}),\ v := \{\mathscr{L}; J\}_{\mathscr{D}}^{-1}(\mathscr{L}u), \quad k = \overline{1, n}.$$

Можно показать, что набор $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ образует пространство граничных значений симметричного оператора $\{\mathcal{L}, J\}_{\min}$ в смысле определения работы [7] (см. также [2, с. 158]). Из этого следует, что каждое самосопряженное расширение минимального оператора на множество вектор-функций $y(x)$, удовлетворяющих граничному условию вида

$$(\cos C)(\Gamma_1 y) - (\sin C)(\Gamma_2 y) = 0, \tag{3}$$

где C — некоторый ограниченный самосопряженный оператор в пространстве $\mathcal{H}$, $\|C\|_{[\mathcal{H}]} \leqslant \pi/2$, $\operatorname{Ker}(C + (\pi/2) I) = \{0\}$. Обратно, каждое условие вида (3) определяет некоторое самосопряженное расширение $\{\mathcal{L}, J, C\}$ минимального оператора. Соответствие между граничными условиями вида (3) и определяемыми ими расширениями взаимно однозначно.

Между спектральными свойствами операторов C и $\{\mathcal{L}, J, C\}$ имеется связь.

Теорема 2. *Пусть* $\{\mathcal{L}, J\}_{\mathcal{D}} > 0$ *в* $L_2(J; H)$.

(i). *Отрицательная часть спектра оператора* $\{\mathcal{L}, J, C\}$

а) *дискретная (т. е. ограничена и может сгущаться лишь к нулю)*;

б) *состоит из* $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ *собственных значений (с учетом их кратностей)*;

тогда и только тогда, когда этим же свойством обладает спектр оператора C.

(ii). *Для того чтобы оператор* $\{\mathcal{L}, J, C\}$ *был полуограничен снизу, необходимо, а если выполнено условие* (А) (см. п. 1), *то и достаточно, чтобы точка* $-\pi/2$ *была для оператора* C *регулярной.*

Для общих положительно определенных симметрических операторов описания их самосопряженных расширений с заданным характером отрицательного спектра содержатся как один из результатов в [8, 9]. В [9] имеется также характеристика полуограниченных снизу расширений. Отметим также работу [17], где рассматривается операторное уравнение Штурма — Лиувилля на полуоси.

В случае когда $n = 1$, $m_1 = 1$ условие (А) в утверждении (ii) можно опустить [11].

Из результатов работы [7] следует, что если выполнено условие (А), то дискретность спектра оператора $\{\mathcal{L}, J, C\}$ равносильна компактности в $\mathcal{H}$ оператора $\cos C$. Можно показать, что условие (А) является необходимым для дискретности спектра любого из операторов $\{\mathcal{L}, J, C\}$.

Количественную характеристику распределения дискретного спектра дифференциального оператора $\{\mathcal{L}, J, C\}$ дает следующая теорема.

Теорема 3.

(i). *Пусть выполнены условия следствия* 1а *из теоремы* 1 *с* $\beta_+ = \beta_- = 0$. *Если* $|\lambda_n(\cos C)| = o(n^{-1/\alpha_\pm})$, $n \to \infty$, *то* $N_\pm(\lambda; \{\mathcal{L}, J, C\}) \sim c_\pm \lambda^{\alpha_\pm}$, $\lambda \to \infty$.

(ii). *Пусть выполнены условия следствия* 2а *из теоремы* 1 *и*

$$|\lambda_n(\cos C)| = O(n^{-1/\gamma}),\ n \to \infty,\ \gamma \in [0, \alpha_\pm),\ \alpha_\pm := \max_{k:\pm r_k > 0} \{\alpha_k + 1/(2m_k)\}.$$

Тогда

$$N_\pm(\lambda; \{\mathcal{L}, J, C\}) = \sum_{k:\pm r_k > 0} c_k' \lambda^{\alpha_k + 1/(2m_k)} + O(\lambda^{\gamma_\pm}) + O(\lambda^{\delta_\pm}),$$

где $\gamma_\pm := \max_{k:\pm r_k > 0} \{\max\{\alpha_k + 1/(2m_k) - \delta_k, \alpha_k\}\}$, $\delta_\pm := \alpha_\pm (1 + \alpha_\pm - \gamma_\pm)^{-1}$.

Доказательства теорем 2, 3 проводятся по той же схеме, что и доказательства соответствующих утверждений в [14], где $n = 1$, $m_1 = 1$.

Теорема 3 редуцирует вопрос об асимптотическом распределении собственных значений самосопряженного оператора, порожденного дифференциальным выражением $\mathcal{L}$, к аналогичному вопросу для компактного в пространстве $\mathcal{H}$ оператора $\cos C$ в граничном условии (3). Однако для общих граничных условий приведение их к «каноническому» виду (3) связано со значительными трудностями. Опишем кратко способ, который не содержит процедуры сведения. Он использует явный вид лишь отображения Γ_2, нахождение которого не требует обращения дифференциального оператора $\{\mathcal{L}, J\}_{\mathcal{D}}$.

Определим для произвольного самосопряженного расширения $\{\mathcal{L}, J, C\}$ оператора $\{\mathcal{L}, J\}_{\min}$ линейное множество в пространстве $\mathcal{H}$:

$$\gamma\{\mathcal{L}, J, C\} := \{h \in \mathcal{H};\, h = \Gamma_2 u,\ u \in \mathcal{D}(\{\mathcal{L}, J, C\})\}. \qquad (4)$$

Отметим, что различным расширениям может соответствовать одно и то же линейное множество вида (4).

Лемма 1. *На $\gamma\{\mathcal{L}, J, C\}$ единственным с точностью до эквивалентности образом можно ввести структуру (полного) гильбертова пространства, непрерывно вложенного в гильбертово пространство $\mathcal{H}$.*

Обозначим через $d_m(\gamma\{\mathcal{L}, J, C\}; \mathcal{H})$ m-й поперечник по Колмогорову единичного шара гильбертова пространства $\gamma\{\mathcal{L}, J, C\}$ относительно содержащего его пространства $\mathcal{H}$.

Лемма 2. *Справедливо асимптотическое соотношение*

$$d_m(\gamma\{\mathcal{L}, J, C\}; \mathcal{H}) \asymp |\lambda_{m+1}(\cos C)|,\ m \in \mathbb{N}. \qquad (5)$$

Соотношение (5) дает возможность выразить утверждения теоремы 3 в терминах асимптотического поведения поперечников. Оценить их сверху или снизу позволяет следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ — гильбертовы пространства, непрерывно вложенные в $\mathcal{H}$, и $\mathcal{H}_1 \subset \gamma\{\mathcal{L}, J, C\} \subset \mathcal{H}_2$. Найдутся такие постоянные $c_1, c_2 > 0$, что*

$$c_1 d_m(\mathcal{H}_1; \mathcal{H}) \leqslant d_m(\gamma\{\mathcal{L}, J, C\}; \mathcal{H}) \leqslant c_2 d_m(\mathcal{H}_2; \mathcal{H}),$$

где $d_m(\mathcal{H}_i; \mathcal{H})$ — m-й поперечник единичного шара пространства $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$.

Пользуясь этими утверждениями, можно показать, что если $\{\mathcal{L}, J, \cdot\}$ — самосопряженное расширение оператора $\{\mathcal{L}, J\}_{\min}$,

$$\mathcal{D}(\{\mathcal{L}, J, \cdot\}) \subset \bigoplus_{k=1}^{n} W_2^{s_k}(J_k; H),\ s_k \in (0, 2m_k], \qquad (6)$$

и выполнено условие (А) п. 1, то спектр оператора $\{\mathcal{L}, J, \cdot\}$ дискретен.

Этот результат уточняет следующая теорема.

Теорема 4.

(i). *Если выполнены условия следствия* 1а *из теоремы* 1 *и в* (6)

$$s_k > \frac{2m_k\alpha_k}{\min\{\alpha_-, \alpha_+\}},\quad k = \overline{1, n}, \qquad (7)$$

то

$$N_\pm(\lambda; \{\mathcal{L}, J, \cdot\}) \sim c_\pm \lambda^{\alpha_\pm} \log^{\beta_\pm}(1 + \lambda),\quad \lambda \to \infty.$$

(ii). *Если выполнены условия следствия 2а из теоремы* 1 *и соотношение* (7), *то*

$$N_\pm(\lambda; \{\mathcal{L}, J, \cdot\}) = \sum_{k:\, \pm r_k > 0} c_k' \lambda^{\alpha_k + 1/(2m_k)} + O(\lambda^{\gamma_\pm}) + O(\lambda^{\rho_\pm}),$$

где $\rho_\pm := \dfrac{\rho(1 + \alpha_\pm)}{1 + \rho}$, $\rho := \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n}\{2m_k\alpha_k s_k^{-1}\}$, *а* c_k', $\alpha_\pm$, $\gamma_\pm$ *определены ранее.*

Аналогичный (i) результат для функции $N_+(\lambda; \{\mathcal{L}, J, \cdot\}) + N_-(\lambda; \{\mathcal{L}, J, \cdot\})$ при $n = 1$, $\beta_1 = 0$ доказан в [12].

3. Рассмотрим сходимость спектральных разложений изучаемых дифференциальных операторов по более сильным чем в исходном пространстве $L_2(J; H)$ нормам.

Пусть L — неограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ со спектральной мерой E_Δ, $\mathfrak{B}$ — банахово пространство, непрерывно вложенное в $\mathfrak{H}$, Ξ — направленность ограниченных борелевских подмножеств $\mathbb{R}$, упорядоченная отношением теоретико-операторного включения.

Определение. *Будем говорить, что спектральное разложение (отвечающее оператору L) вектора $f \in \mathfrak{B}$ безусловно $\mathfrak{B}$-сходится, если направление $\{E_\Delta f : \Delta \in \Xi\}$ сходится в пространстве $\mathfrak{B}$ к вектору f.*

Для операторов с полной в $\mathfrak{H}$ системой собственных подпространств безусловная $\mathfrak{B}$-сходимость равносильна сходимости в пространстве $\mathfrak{B}$ ортогонального ряда, которым выражается спектральное разложение, при любой перестановке его членов.

Обозначим через $\overset{0}{W}{}_2^{s_k}(J_k; A_k; H)$ банахово пространство вектор-функций из $\overset{0}{W}{}_2^{s_k}(J_k; H) \cap L_2(J_k; H_{s_k}(k))$ с нормой

$$\| u(x) \|_{s_k, A_k} := (\| u(x) \|^2_{W_2^{s_k}(J_k; H)} + \| A_k^{s_k} u(x) \|^2_{L_2(J_k; H)})^{1/2}.$$

Теорема 5. *Пусть $\{\mathcal{L}, J, \cdot\}$ — самосопряженный оператор в пространстве $L_2(J; H)$ с $\mathcal{D}(\{\mathcal{L}, J, \cdot\}) \subset \bigoplus_{k=1}^{n} W_2^{2m_k}(J_k; H)$. Если вектор-функция $f(x) \in \bigoplus_{k=1}^{n} \overset{0}{W}{}_2^{2m_k\tau_0}(J_k; A_k; H)$, $\tau_0 \in (0, 1]$, то ее спектральное разложение безусловно сходится по норме пространства $\mathfrak{B} = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{B}_k(J_k; H)$, где*

$$\mathfrak{B}_k(J_k; H) := \begin{cases} L_{q_k}(J_k; H), & q_k = \dfrac{2}{1 - 4m_k\tau_0} \in (2, \infty), \quad \tau_0 \in \left(0, \dfrac{1}{4m_k}\right); \\ C^j(J_k; H), & j \in \{0,1 \ldots, 2m_k - 1\}, \quad \tau_0 \in \left(\dfrac{j + 1/2}{2m_k}, 1\right]. \end{cases}$$

На вектор-функциях из $\bigoplus_{k=1}^{n} \overset{0}{W}{}_2^{2m_k\tau}(J_k; A_k; H)$, $\tau \in (\tau_0, 1]$ скорость сходимости допускает оценку

$$\| f - E_\Delta f \|_{\mathfrak{B}} \leqslant c \sum_{k=1}^{n} \| f_k(x) \|_{2m_k\tau, A_k} (1 + \lambda)^{\tau_0 - \tau}, \quad \Delta \supset (-\lambda, \lambda),$$

где константа c не зависит от Δ, f и τ.

Теорема 5 содержательна и для обыкновенных дифференциальных операторов. Например, из нее следует, что ряд Фурье функции $f(x) \in W_2^{1/2 - 1/q}(0, 2\pi)$ по переставленной тригонометрической системе сходится к ней по норме $L_q(0, 2\pi)$, $q > 2$. Непрерывность разлагаемой функции такой сходимости еще не гарантирует [15].

При доказательстве теоремы 5 используется следующий результат для общих самосопряженных операторов.

Предложение 1. *Пусть A, B — некоторые ограниченные положительные операторы в пространстве $\mathfrak{H}$, перестановочные с оператором L и $\mathfrak{R}(A) \subset \mathfrak{B}$. На элементах $f \in \mathfrak{R}(AB)$ спектральное разложение, соответствующее оператору L, безусловно $\mathfrak{B}$-сходится. Скорость сходимости допускает оценку*

$$\| f - E_\Delta f \|_{\mathfrak{B}} \leqslant c \| B^{-1} A^{-1} f \|_{\mathfrak{H}} \| B(I - E_\Delta) \|_{[\mathfrak{H}]} r_\Delta(f), \tag{8}$$

где направление $\{r_\Delta : \Delta \in \Xi\} \subset [0, 1]$ и монотонно убывает к нулю, а постоянная c не зависит от Δ, вектора f и оператора B.

В случае, когда $L > 0$, оператор L^{-1} компактен, $A = L^{-\tau_1} \in [\mathfrak{H}; \mathfrak{B}]$, $B = L^{-\tau_2}$, $\tau_1 \in (0, 1]$, $\tau_2 \geqslant 0$, близкая к (8) оценка установлена в [16]. Она получается из (8) после замены в (8) множителя $c \| B^{-1} A^{-1} f \|_{\mathfrak{H}}$ константой $c_{f,A,B}$.

1. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Некоторые вопросы спектральной теории дифференциальных уравнений эллиптического типа в пространстве вектор-функций на конечном интервале.— Укр. мат. журн., 1976, **28**, № 1, с. 12—26.
2. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1984.— 283 с.
3. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 799 с.
4. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.— Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1970.— 264 с.
5. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* О некоторых классах граничных задач для уравнения Штурма — Лиувилля с операторным потенциалом.— Укр. мат. журн., 1972, **24**, № 6, с. 726—734.
6. *Кочубей А. Н.* Спектральные свойства дифференциально-операторных уравнений четного порядка : Автореф. дис. ... канд. физ.- мат. наук.— Киев, 1975.— 12 с.
7. *Кочубей А. Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений.— Мат. заметки, 1975, **17**, № 1, с. 41—48.
8. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных операторов и ее приложения. I.— Мат. сб., 1947, **20**, № 3, с. 431—495.
9. *Бирман М. Ш.* К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов.— Там же, 1956, **38**, № 4, с. 431—450.
10. *Горбачук М. Л., Кочубей А. Н.* Самосопряженные граничные задачи для некоторых классов дифференциально-операторных уравнений высокого порядка.— Докл. АН СССР, 1971, **201**, № 5, с. 1029—1032.
11. *Горбачук М. Л., Михайлец В. А.* Полуограниченные самосопряженные расширения симметрических операторов.— Там же, 1976, **226**, № 4, с. 765—768.
12. *Горбачук В. И.* Об асимптотике собственных значений граничных задач для дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций.— Укр. мат. журн., 1975, **27**, № 5, с. 657—664.
13. *Михайлец В. А.* Распределение собственных значений операторного уравнения Штурма — Лиувилля.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1977, **41**, № 3, с. 607—619.
14. *Михайлец В. А.* Спектры операторов и граничные задачи.— В кн.: Спектральный анализ дифференциальных операторов. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1980, с. 106—131.
15. *Ульянов П. Л.* О рядах по переставленной тригонометрической системе.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1958, **22**, № 4, с. 515—542.
16. *Красносельский М. А., Пустыльник Е. И.* Использование дробных степеней операторов при изучении рядов Фурье по собственным функциям дифференциальных операторов.— Докл. АН СССР, 1958, **122**, № 6, с. 978—981.
17. *Горбачук М. Л., Кутовой В. А.* Некоторые вопросы спектральной теории для операторного уравнения Штурма—Лиувилля на полуоси.— В кн.: Спектральный анализ дифференциальных операторов. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1980, с. 67—83.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 04.01.84