УДК 517.938

Ю. А. Митропольский, В. Л. Кулик

Функция Ляпунова и ограниченные решения линейных систем дифференциальных уравнений

Изучение вопросов существования инвариантных многообразий динамических систем [1—8] приводит к рассмотрению решений на всей оси R не только фиксированной линейной системы дифференциальных уравнений

$$dh/dt = H(t)\,h, \tag{1}$$

где $h \in R^n$, $H(t) \in C^0(R)$, но и множеств таких систем [9] ($C^0(R)$ — пространство непрерывных и ограниченных на R функций). Обычное упрощение системы (1) (приведение к треугольному виду, блочному и т. д.) в основном пригодно для исследования решений фиксированной системы (1). Поэтому для изучения множеств слабо регулярных на R таких систем был предложен другой подход, который заключается в расширении этой системы до порядка $2n$:

$$dh/dt = H(t)\,h, \quad dy/dt = -h - H^T(t)\,y, \tag{2}$$

где $y \in R^n$. Настоящая работа является продолжением исследований [6]. Обозначения будем использовать из [6].

Теорема 1. *Пусть существует квадратичная форма $V = \langle S(t)\,h, h\rangle$ с непрерывно дифференцируемой и ограниченной на R матрицей коэффициентов $S(t)$ такая, что производная $\dot V$ вдоль решений сопряженной системы $dh/dt = -H^T(t)h$ является знакоопределенной:*

$$\dot V = \langle (dS(t)/dt - S(t)\,H^T(t) - H(t)\,S(t))\,h, h\rangle \leqslant -\|h\|^2,$$

и пусть определитель матрицы $S(t)$ превращается в нуль при $t = t_j$, $j = \overline{1, k}$. Тогда существуют ненулевые постоянные симметричные n-мерные матрицы W такие, что

$$\|\Omega_0^t W (\Omega_0^\tau)^T\| \leqslant K \exp\{-\gamma\,|t-\tau|\}, \tag{3}$$

K, γ — $\mathrm{const} > 0$, Ω_0^t — *матрицант системы* (1), $\Omega_0^0 = I_n$. *Среди матриц W существует и такая $\overline{W}$, что все нетривиальные ограниченные на R решения системы* (1) *можно представить в следующем виде:*

$$h = h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_0^t \overline{W} (\Omega_0^\tau)^T f(\tau)\,d\tau = \mathfrak{M}f, \tag{4}$$

где $f(t)$ — произвольная вектор-функция из пространства $C^0(R)$, $\mathfrak{M}$ — оператор проектирования, $\mathfrak{M}^2 = \mathfrak{M}$.

При этом

$$\operatorname{rang} \overline{W} = n^-(T_2) - n^-(T_1), \tag{5}$$

T_1, T_2 — фиксированные моменты времени такие, что $T_1 < t_j < T_2$, $j = \overline{1,k}$, $n^-(T)$ — количество отрицательных собственных чисел матрицы $S(T)$.

Доказательство. Рассматривая систему уравнений (2), убеждаемся в том, что производная квадратичной формы

$$V = 2\|S\|_0^2 \langle h, y\rangle + \langle S(t)\,y, y\rangle, \quad \|S\|_0 = \sup_{t\in R}\|S(t)\|, \tag{6}$$

вдоль решений этой системы знакоопределена:

$$\dot V = 2\|S\|_0^2 \langle Hh, y\rangle + 2\|S\|_0^2\langle h, -h - H^Ty\rangle + \langle \dot S y, y\rangle + \langle Sy, -h - H^Ty\rangle \leqslant$$
$$\leqslant -2\|S\|_0^2\|h\|^2 - 2\langle Sy, h\rangle - \|y\|^2 \leqslant -\|S\|_0^2\|h\|^2/2 - \|y\|^2/3.$$

Отсюда в силу невырожденности квадратичной формы (6) следует существование единственной функции Грина $\overline{G}(t,\tau)$ задачи об ограниченных на R решениях для системы (2):

$$\overline{G}(t,\tau) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \omega(t,0) & 0 \\ \omega_2(t,0) & \omega^T(0,t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega(0,\tau) & 0 \\ \omega_2(0,\tau) & \omega^T(\tau,0)\end{bmatrix}, & \tau \leqslant t, \\ \begin{bmatrix} \omega(t,0) & 0 \\ \omega_2(t,0) & \omega^T(0,t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{11} - I_n & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} - I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega(0,\tau) & 0 \\ \omega_2(0,\tau) & \omega^T(\tau,0)\end{bmatrix}, & \tau > t, \end{cases} \tag{7}$$

где $\omega(t,\tau) = \Omega_\tau^t$, $\omega_2(t,\tau) = -\int\limits_\tau^t (\Omega_t^{t_1})^T\,\Omega_\tau^{t_1}dt_1$, $C = \{C_{ij}\}_{i,j=1}^2$ — матрица проектирования, $C^2 = C$. При этом функция Грина $\overline{G}(t,\tau)$ удовлетворяет оценке

$$\|\overline{G}(t,\tau)\| \leqslant K\exp\{-\gamma|t-\tau|\}, \; K, \; \gamma - \mathrm{const} > 0. \tag{8}$$

Неоднородная система уравнений

$$dh/dt = H(t)\,h + \varphi(t), \qquad dy/dt = -h - H^T(t)\,y + f(t)$$

при любых фиксированных вектор-функциях $\varphi(t)$, $f(t) \in C^0(R)$ имеет единственное ограниченное на R решение

$$\begin{pmatrix} h \\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(t) \\ y(t)\end{pmatrix} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{G}(t,\tau)\begin{pmatrix}\varphi(\tau) \\ f(\tau)\end{pmatrix}d\tau. \tag{9}$$

Полагая в равенстве (9) $\varphi(\tau) \equiv 0$, для первых n координат (h) получаем

$$h = h(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega(t,0)\,C_{12}\omega^T(\tau,0)\,f(\tau)\,d\tau. \tag{10}$$

При этом имеет место оценка

$$\|\omega(t,0)\,C_{12}\omega^T(\tau,0)\| \leqslant K\exp\{-\gamma|t-\tau|\}, \tag{11}$$

которая следует из (8). Покажем, что равенством (10) определяется каждое нетривиальное ограниченное на R решение системы (1) при соответствующем выборе вектор-функции $f(t) \in C^0(R)$. Действительно, пусть $h = h_0(t)$ — нетривиальное ограниченное на R решение системы (1), тогда неоднородная система уравнений $dh/dt = H(t)\,h$, $dy/dt = -h - H^T(t)\,y + h_0(t)$ должна иметь единственное ограниченное на R решение $h = h^0(t)$, $y = y^0(t)$ и это решение определяется формулой (9), в которой $\varphi(\tau) \equiv 0$, $f(\tau) \equiv h_0(\tau)$. Но, с другой стороны, ограниченным на R решением этой системы является $h = h_0(t)$, $y = 0$. Поэтому $y^0(t) \equiv 0$, $h^0(t) \equiv h_0(t)$, и с учетом (10) имеем

$$h_0(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t, 0)\, C_{12}\omega^T(\tau, 0)\, h_0(\tau)\, d\tau. \qquad (12)$$

Теперь покажем, что матрица C_{12} симметрична. Заметим выполнение следующего тождества:

$$A(t) \equiv JA^T(t)\, J, \qquad (13)$$

где $A(t) = \begin{pmatrix} H(t) & 0 \\ -I_n & H^T(t) \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$, из которого следует свойство функции Грина: $\bar{G}(t, \tau) \equiv J\bar{G}^T(\tau, t)\, J$. Поэтому для матрицы проектирования $C = \{C_{ij}\}_{i,j=1}^2$ должно выполняться равенство

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}^T & C_{21}^T \\ C_{12}^T & C_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}.$$

Отсюда получаем

$$C_{12} = C_{12}^T, \quad C_{21} = C_{21}^T, \quad C_{11} + C_{22}^T = I_n. \qquad (14)$$

После переобозначения $C_{12} = \overline{W}$ равенство (10) приводит к (4), а тождество (12) указывает на проектируемость оператора $\mathfrak{M}$. Другие матрицы W, отличные от $\overline{W}$ и удовлетворяющие условию (3), можно получить при рассмотрении функции Грина задачи об ограниченных на R решениях для системы

$$dh/dt = H(t)\, h, \quad dy/dt = B(t)\, h - H^T(t)\, y,$$

где $B(t)$ — симметричная знакоопределенная матрица. Равенство (5) следует из рассуждений, приведенных в [10].

Замечание 1. Для матрицы $\overline{W}$, обеспечивающей проектируемость оператора (4) и уд.влетворяющей оценке (3) ($W = \overline{W}$), выполняется равенство

$$\overline{W} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{W}\, (\Omega_0^\tau)^T\, \Omega_0^\tau \overline{W} d\tau. \qquad (15)$$

Действительно, поскольку $h = \Omega_0^t \overline{W} \eta = h_0(t)$ — ограниченное на R решение системы (1) ($\eta \in R^n$), то должно выполняться тождество (12):

$$\Omega_0^t \overline{W} \eta \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_0^t \overline{W}\, (\Omega_0^\tau)^T\, \Omega_0^\tau \overline{W} \eta d\tau. \qquad (16)$$

В силу произвольности $\eta \in R^n$ из тождества (16) следует равенство **(15)**.

Замечание 2. При условии теоремы 1 неоднородная система уравнений

$$dh/dt = H(t)\, h + \varphi(t) \qquad (17)$$

при каждой фиксированной вектор-функции $\varphi(t) \in C^0(R)$ имеет множество ограниченных на R решений и все они представимы равенством

$$h = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_0^t \overline{W}\, (\Omega_0^\tau)^T f(\tau)\, d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} G(t, \tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau, \qquad (18)$$

где $f(t)$ — произвольная вектор-функция из пространства $C^0(R)$; $G(t, \tau)$ — некоторая фиксированная функция Грина задачи об ограниченных на R решениях для системы (17).

С целью доказательства единственности матрицы $\overline{W}$ докажем вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть существуют n-мерные симметричные матрицы $\overline{W}_1$, $\overline{W}_2$, удовлетворяющие условию* (15), *и каждый столбец матрицы $\overline{W}_1$ является линейной комбинацией столбцов матрицы $\overline{W}_2$, и наоборот — каждый столбец матрицы $\overline{W}_2$ можно представить в виде линейной комбинации столбцов матрицы $\overline{W}_1$, т. е. $\overline{W}_1 = \overline{W}_2 D_2$, $\overline{W}_2 = \overline{W}_1 D_1$. Тогда $\overline{W}_1 = \overline{W}_2$.*

Доказательство. Домножая равенство (15) при $\overline{W} = \overline{W}_1$ справа на матрицу D_1

$$\overline{W}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{W}_1 (\Omega_0^\tau)^T \Omega_0^\tau \overline{W}_2 d\tau \tag{19}$$

и вычитая из исходного равенства (15), получаем

$$\overline{W}_1 - \overline{W}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{W}_1 (\Omega_0^\tau)^T \Omega_0^\tau (\overline{W}_1 - \overline{W}_2)\, d\tau. \tag{20}$$

Теперь из равенства (19) вычтем равенство (15) при $\overline{W} = \overline{W}_2$:

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} (\overline{W}_1 - \overline{W}_2) (\Omega_0^\tau)^T \Omega_0^\tau \overline{W}_2 d\tau. \tag{21}$$

Учитывая симметричность матриц $\overline{W}_j$, $j = 1, 2$, и сравнивая (20), (21), имеем $\overline{W}_1 - \overline{W}_2 = 0$.

Доказанная лемма позволяет утверждать единственность матрицы $\overline{W}$, которая обеспечивает проектируемость оператора (4) и выполнение оценки (3), поскольку равенством $h = \Omega_0^t \overline{W} \eta$, $\eta \in R^n$, определяется каждое ограниченное на R решение системы (1).

Для выяснения структуры матрицы $\overline{W}$ будем считать, что система (1) имеет расщепленный вид

$$dh_1/dt = H^+(t)\, h_1, \quad dh_2/dt = H^-(t)\, h_2,$$

$$dh_3/dt = H_1(t)\, h_1 + H_2(t)\, h_2 + \hat{H}(t)\, h_3. \tag{1'}$$

Возможность такого расщепления с помощью замены переменных Ляпунова доказана в работе [10]. Матрицант системы (1′) имеет следующий вид:

$$\Omega_0^t = \begin{pmatrix} \Omega_0^t(H^+) & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_0^t(H^-) & 0 \\ \omega_1(t, 0) & \omega_2(t, 0) & \Omega_0^t(\hat{H}) \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Учитывая оценку (3) для матрицы $W = \overline{W}$ и неограниченность на R матрицантов $\Omega_0^t(H^+)$, $\Omega_0^t(H^-)$, приходим к выводу, что матрица $\overline{W}$ должна иметь блочно-диагональный вид: $\overline{W} = \mathrm{diag}\{0, 0, \overline{W}_{33}\}$. Поскольку матрицант $\Omega_0^t(\hat{H})$ экспоненциально затухает на $+\infty$ и на $-\infty$, то равенство (15) приводит к следующему:

$$\overline{W}_{33} = \overline{W}_{33} \int_{-\infty}^{\infty} (\Omega_0^\tau(\hat{H}))^T \Omega_0^\tau(\hat{H})\, d\tau \overline{W}_{33}, \tag{23}$$

т. е. постоянную матрицу $\overline{W}_{33}$ можно вынести за знак интеграла. Заметим, что матрица

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} (\Omega_0^\tau(\hat{H}))^T \Omega_0^\tau(\hat{H})\, d\tau \tag{24}$$

является симметричной и знакоопределенной:

$$\langle M\eta, \eta\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \| \Omega_0^{\tau}(\hat{H})\,\eta \|^2 d\tau \geqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \| \Omega_{\tau}^0(\hat{H}) \|^{-2} d\tau \, \| \eta \|^2, \quad \eta \in R^r.$$

Отсюда следует также, что $\det M \neq 0$. Теперь рассмотрим равенство (23) как уравнение относительно матрицы $X = \overline{W}_{33}$:

$$X = XMX. \tag{23'}$$

Общее решение уравнения (23') можно получить следующим образом. Домножим равенство (23') справа (или слева) на матрицу M и обозначим $P = XM$, $P^2 = P$. Таким образом, общее решение уравнения (23') имеет вид $X = PM^{-1}$, где P — произвольная матрица проектирования, $P^2 = P$. Но нам нужно получить все симметричные матрицы X, удовлетворяющие уравнению (23'). Поэтому домножим справа и слева равенство (23') на матрицу $M^{1/2}: M^{1/2}XM^{1/2} = M^{1/2}XM^{1/2}M^{1/2}XM^{1/2}$, и обозначим $M^{1/2}XM^{1/2} = P$. Отсюда получаем общее решение уравнения (23') в симметричных матрицах:

$$X = M^{-1/2}PM^{-1/2}, \tag{25}$$

где P — произвольная матрица ортогонального проектирования, $P^2 = P = P^T$. Таким образом, приходим к выводу, что все матрицы $\overline{W} = W = W^T$, удовлетворяющие оценке (3) и равенству (15), в случае расщепленной системы (1), имеют вид

$$\overline{W} = \mathrm{diag}\,\{0, 0, M^{-1/2}PM^{-1/2}\}. \tag{26}$$

Здесь P — произвольная матрица ортогонального проектирования. Отсюда видно, что дополнительное требование к матрице $\overline{W}$: rang $\overline{W} = r$ — размерность подпространства затухающих в обе стороны решений системы (1), приводит к единственности матрицы $\overline{W} = \mathrm{diag}\,\{0, 0, M^{-1}\}$.

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений вида

$$dh/dt = H(g)\,h, \quad dg/dt = \omega(g), \tag{27}$$

где $H(g)$ — n-мерная матричная функция, непрерывная по совокупности переменных $g_1, \ldots, g_m$ и ограниченная на всем пространстве R^m, $\omega(g)$ — вектор-функция определенная при всех $g \in R^m$ и такая, что задача Коши

$$dg/dt = \omega(g), \quad g|_{t=0} = g_0 \tag{28}$$

при каждом фиксированном $g_0 \in R^m$ имеет единственное решение $g_t(g_0)$, определенное при всех $t \in R$ и непрерывно зависящее от g_0. Обозначим через $C^0(R^m)$ пространство функций $F(g)$, непрерывных по совокупности переменных g_i, $i = \overline{1, m}$, и ограниченных на R^m, $C'(R^m)$ — подпространство $C^0(R^m)$ таких функций $F(g)$, что функция $F(g_t(g_0))$ непрерывно дифференцируема по t при всех $t \in R$, $g_0 \in R^m$, $dF(g_t(g))/dt|_{t=0} = \dot{F}(g) \in C^0(R^m)$.

Известно [4], что существование n-мерной матрицы $C(g) \in C^0(R^m)$, обеспечивающей для функции

$$G_0(\tau, g) = \begin{cases} \Omega_{\tau}^0(g)\, C(g_{\tau}(g)), & \tau \leqslant 0, \\ \Omega_{\tau}^0(g)\,(C(g_{\tau}(g)) - I_n), & \tau > 0 \end{cases} \tag{29}$$

выполнение оценки

$$\| G_0(\tau, g) \| \leqslant K \exp\{-\gamma |\tau|\}, \quad K, \ \gamma = \mathrm{const} > 0, \tag{30}$$

влечет за собой существование ограниченного инвариантного многообразия системы уравнений

$$dh/dt = H(g)\,h + \varphi(g), \quad dg/dt = \omega(g) \tag{31}$$

при каждой вектор-функции $\varphi(g) \in C^0(R^m)$, и это многообразие представляется равенством

$$h = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, g)\, \varphi(g_\tau(g))\, d\tau. \tag{32}$$

В (29) через $\Omega_\tau^0(g)$ обозначена матрица, обратная к матрицанту $\Omega_0^\tau(g)$ системы $dh/d\tau = H(g_\tau(g))\, h$, $\Omega_0^0 = I_n$. Напомним, что равенством $h = u(g)$ представляется ограниченное инвариантное многообразие системы (31), если $u(g) \in C'(R^m)$ и выполняется тождество $\dot{u}(g) \equiv H(g)\, u(g) + \varphi(g)$ при всех $g \in R^m$.

Функцию (29) с оценкой (30) обычно называют функцией Грина задачи об ограниченных инвариантных многообразиях системы (31). Заметим, что выполнение оценки (30) для функции Грина (29) эквивалентно выполнению аналогичной оценки

$$\| G_t(0, g) \| \leqslant K \exp\{-\gamma\, |t|\} \tag{30'}$$

для функции

$$G_t(0, g) = \begin{cases} \Omega_0^t(g)\, C(g), & t \geqslant 0, \\ \Omega_0^t(g)\, (C(g) - I_n), & t < 0. \end{cases} \tag{29'}$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть существует n-мерная симметричная матрица $S(g) \in C'(R_m)$, удовлетворяющая условию*

$$\langle (\dot{S}(g) - S(g)\, H^T(g) - H(g)\, S(g))\, h, h \rangle \leqslant -\| h \|^2 \tag{33}$$

при всех $h \in R^n$, $g \in R^m$ и определитель матрицы $S(g)$ в некоторой точке $\bar{g} \in R^m$ превращается в нуль. Тогда при каждой вектор-функции $\varphi(g) \in C^0(R^m)$ система уравнений (31) имеет множество ограниченных инвариантных многообразий и все они представляются равенством

$$h = \int_{-\infty}^{\infty} W(g)\, (\Omega_0^\tau(g))^T f(g_\tau(g))\, d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \varphi)\, \varphi(g_\tau(g))\, d\tau, \tag{34}$$

где $W(g)$ — некоторая n-мерная симметричная матричная функция из пространства $C'(R^m)$, удовлетворяющая тождеству

$$W(g_\tau(g)) \equiv \Omega_0^t(g)\, W(g)\, (\Omega_0^t(g))^T \tag{35}$$

и оценке

$$\| \Omega_0^t(g)\, W(g)\, (\Omega_0^\tau(g))^T \| \leqslant K \exp\{-\gamma\, |t - \tau|\}, \tag{36}$$

$f(g)$ — произвольная вектор-функция из пространства $C^0(R^m)$, $G_0(\tau, g)$ — функция Грина (29).

Доказательство. Зафиксируем точку $g_0 \in R^m$ и рассмотрим расширенную систему линейных дифференциальных уравнений

$$dh/dt = H(g_t(g_0))\, h, \quad dy/dt = -h - H^T(g_t(g_0))\, y. \tag{37}$$

Как и при доказательстве теоремы 1, убеждаемся, что система (37) э-дихотомична на всей оси R, причем равномерно относительно параметров $g_0 \in R^m$. Запишем функцию Грина задачи об ограниченных на R решениях для системы (37):

$$\bar{G}_t(\tau, g_0) =$$

$$= \begin{cases} \begin{bmatrix} \omega(t, 0, g_0), & 0 \\ \omega_2(t, 0, g_0) & \omega^T(0, t, g_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}(g_0) & C_{12}(g_0) \\ C_{21}(g_0) & C_{22}(g_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(0, \tau, g_0) & 0 \\ \omega_2(0, \tau, g_0) & \omega^T(\tau, 0, g_0) \end{bmatrix}, & \tau \leqslant t, \\ \begin{bmatrix} \omega(t, 0, g_0) & 0 \\ \omega_2(t, 0, g_0) & \omega^T(0, t, g_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}(g_0) - I_n & C_{12}(g_0) \\ C_{21}(g_0) & C_{22}(g_0) - I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(0, \tau, g_0) & 0 \\ \omega_2(0, \tau, g_0) & \omega^T(\tau, 0, g_0) \end{bmatrix}, & \tau > t, \end{cases} \tag{38}$$

где $\omega(t, 0, g_0) = \Omega_0^t(g_0)$, $\omega_2(t, \tau, g_0) = -\int\limits_{\tau}^{t} (\Omega_t^{t_1}(g_0))^T \Omega_\tau^{t_1}(g_0)\, dt_1$. Функция Грина $\overline{G}_t(\tau, g_0)$ единственная и удовлетворяет экспоненциальной оценке

$$\| \overline{G}_t(\tau; g_0) \| \leqslant K \exp\{-\gamma |t - \tau|\} \tag{30''}$$

с постоянными K, $\gamma > 0$, независящими от $g_0 \in R^m$, t, $\tau \in R$. Учитывая групповое свойство решений $g_t(g_\sigma(g_0)) \equiv g_{t+\sigma}(g_0)$ и единственность функции Грина $\overline{G}_t(\tau, g_0)$, получаем тождество

$$\overline{G}_t(\tau, g_\sigma(g_0)) \equiv \overline{G}_{t+\sigma}(\tau + \sigma, g_0). \tag{39}$$

Исходя из структуры функции Грина (38) и тождества (39), для матрицы $C_{12}(g_0)$ имеем

$$C_{12}(g_\sigma(g_0)) \equiv \Omega_0^\sigma(g_0)\, C_{12}(g_0)\, (\Omega_0^\sigma(g_0))^T. \tag{35'}$$

Докажем непрерывность функции Грина $\overline{G}_t(\tau, g_0)$ по параметрам g_0. С этой целью для разности $\overline{G}_t(\tau, g_0) - \overline{G}_t(\tau, \tilde{g}_0)$ запишем равенство

$$\overline{G}_t(\tau, g_0) - \overline{G}_t(\tau, \tilde{g}_0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{G}_t(\sigma, g_0)\,[A(g_\sigma(g_0)) - A(g_\sigma(\tilde{g}_0))]\, \overline{G}_\sigma(\tau, \tilde{g}_0)\, d\sigma, \tag{40}$$

где $A(g) = \begin{pmatrix} H(g) & 0 \\ -I_n & -H^T(g) \end{pmatrix}$.

Из равенства (40) с учетом оценки (30) получаем

$$\| \overline{G}_t(\tau, g_0) - \overline{G}_t(\tau, \tilde{g}_0) \| \leqslant K^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \| A(g_\sigma(g_0)) - A(g_\sigma(\tilde{g}_0)) \| \times$$

$$\times \exp\{-\gamma(|t - \sigma| + |\tau - \sigma|)\}\, d\sigma = L_\gamma(g_0, \tilde{g}_0, t, \tau). \tag{41}$$

Поскольку интеграл справа сходится равномерно относительно g_0, $\tilde{g}_0$ при каждом фиксированном значении t и τ из R, то функция $L_\gamma(g_0, \tilde{g}_0, t, \tau)$ непрерывна по совокупности переменных g_0, $\tilde{g}_0$. При этом

$$L_\gamma(g_0, g_0, t, \tau) \equiv 0. \tag{42}$$

Оценки (41) и тождества (42) вполне достаточно для непрерывности функции Грина $\overline{G}_t(\tau, g_0)$ по параметрам g_0. Отметим еще некоторые свойства функции $L_\gamma(g_0, \tilde{g}_0, t, \tau)$: 1) $L_\gamma(g_0, \tilde{g}_0, t, \tau) \leqslant L_{\gamma-\gamma_1}(g_0, \tilde{g}_0, t, \tau) \exp\{-\gamma_1 |t - \tau|\}$, $0 < \gamma_1 < \gamma$; 2) $L_\gamma(g_0, \tilde{g}_0, t, \tau) = L_\gamma(g_0, \tilde{g}_0, \tau, t) \leqslant K^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \| A(g_{\sigma+t}(g_0)) - A(g_{\sigma+t}(\tilde{g}_0)) \| \exp\{-\gamma |\sigma|\}\, d\sigma$.

Таким образом, непрерывность функции Грина $\overline{G}_t(\tau, g_0)$ по параметрам g_0 влечет за собой непрерывность матрицы проектирования $C(g_0) = \{C_{ij}(g_0)\}_{i,j=1}^2$ и, в частности, блока $C_{12}(g_0)$. Учитывая тождество (35), приходим к выводу о том, что $C_{12}(g) \in C'(R^m)$.

Как и при доказательстве теоремы 1, убеждаемся в симметричности матрицы $C_{12}(g_0)$. Обозначая $W(g) = C_{12}(g)$, приходим к тождеству (35) и оценке (36). Равенство (34) получим при записи первых n координат равенства

$$\begin{pmatrix} h \\ y \end{pmatrix} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{G}_0(\tau, g) \begin{pmatrix} \varphi(g_\tau(g)) \\ f(g_\tau(g)) \end{pmatrix} d\tau,$$

которым определяется единственное ограниченное инвариантное многообразие системы

$$dh/dt = H(g)h + \varphi(g), \quad dg/dt = \omega(g), \quad dy/dt = -h - H^T(g)y + f(g),$$

где $\varphi(g)$, $f(g) \in C^0(R^m)$. Этим и завершается доказательство теоремы 2.

Анализ, проведенный при доказательстве теоремы 1, позволяет утверждать следующее.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы 2, тогда существует единственная n-мерная симметричная матричная функция* $\overline{W}(g) \in C'(R^m)$, *удовлетворяющая тождеству*

$$\overline{W}(g) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \overline{W}(g)(\Omega_0^\tau(g))^T \Omega_0^\tau(g)\overline{W}(g)\,d\tau \tag{43}$$

и такая, что при каждом фиксированном $g_0 \in R^m$ *равенством* $h = \Omega_0^t(g_0)\overline{W}(g_0)\eta$, $\eta \in R^n$, *можно определить каждое ограниченное на* R *решение системы* $dh/dt = H(g_t(g_0))h$. *При этом матрица* $\overline{W}(g)$ *будет обладать свойствами:* 1) *выполняется тождество* (35) *и оценка* (36) ($W = \overline{W}$); 2) *равенством* $h = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{W}(g)(\Omega_0^\tau(g))^T f(g_\tau(g))\,d\tau = \mathfrak{M}f$ *определяются все нетривиальные ограниченные инвариантные многообразия системы* (27); 3) $\mathfrak{M}^2 = \mathfrak{M}$.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\langle\omega, \partial h/\partial g\rangle = (\operatorname{th}\langle\lambda, g\rangle)h + \varphi(g), \tag{44}$$

где $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$, $\omega_i \neq 0$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, $\langle\omega, \partial h/\partial g\rangle = \sum_{i=1}^{m} \omega_i \partial h/\partial g_i$, $\langle\lambda, g\rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i$, $\varphi(g) \in C^1(R^m)$, $C^1(R^m)$ — подпространство $C^0(R^m)$ функций $F(g)$, имещих непрерывные производные первого порядка по каждой переменной g_i, $i = \overline{1, m}$. Покажем, что необходимым и достаточным условием существования решений $h = h(g) \in C^1(R^m)$ уравнения (44) при каждой функции $\varphi(g) \in C^1(R^m)$ является следующее:

$$\langle\lambda, \omega\rangle < 0. \tag{45}$$

Пусть при некоторых числовых векторах $\lambda_0, \omega_0 \in R^m$ неравенство (45) нарушается: $\langle\lambda_0, \omega_0\rangle \geqslant 0$, тогда уравнение

$$\langle\omega_0, \partial h/\partial g\rangle = (\operatorname{th}\langle\lambda_0, g\rangle)h + 1 \tag{46}$$

не имеет ограниченных на R^m решений. Действительно, если есть такое решение $h = h(g) \in C^1(R^m)$, то $h = h(\omega_0 t)$ — ограниченное на R решение уравнения $dh/dt = (\operatorname{th}(\langle\lambda_0, \omega_0\rangle t))h + 1$, а это уравнение не имеет ограниченных на R^m решений. Поэтому уравнение (46) не имеет ограниченных на R^m решений. Пусть теперь выполняется условие (45), тогда в качестве $S(g)$ выберем скалярную функцию $S(g) = \operatorname{th}\langle\lambda, g\rangle$ и проверим выполнение условия (33):

$$\dot{S}(g) - 2S(g)\operatorname{th}\langle\lambda, g\rangle = (\langle\lambda, \omega\rangle - 2\operatorname{sh}^2\langle\lambda, g\rangle)\operatorname{ch}^{-2}\langle\lambda, g\rangle \leqslant -\delta = \text{const} < 0.$$

Таким образом, условие (45) является необходимым и достаточным для того, чтобы уравнение (44) имело решение $h = h(g) \in C^1(R^m)$ при каждой функции $\varphi(g) \in C^1(R^m)$.

Теперь изучим вопрос о представлении всех ограниченных на R^m решений уравнения (44) при условии (45). С этой целью рассмотрим систему уравнений $dg/dt = \omega$, $dh/dt = (\operatorname{th}\langle\lambda, g\rangle)h$. Подставляя решение первой системы $g_t(g) = \omega t + g$ в последнее уравнение, получаем

$$dh/dt = (\operatorname{th}(-\mu t + \nu))\,h, \tag{47}$$

где $\mu = -\langle\lambda, \omega\rangle$, $\nu = \langle\lambda, g\rangle$. В случае уравнения (47) матрицант $\Omega_0^t(\nu)$ имеет вид

$$\Omega_0^t(\nu) = (\operatorname{ch}\nu)^{1/\mu}(\operatorname{ch}(\mu t - \nu))^{-1/\mu}. \tag{48}$$

Запишем равенство (43): $\overline{W} = \overline{W}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\operatorname{ch}\nu)^{2/\mu}(\operatorname{ch}(\mu t - \nu))^{-2/\mu}\,dt\overline{W}$. Отсюда однозначно получаем $\overline{W}(\nu) = (\operatorname{ch}\nu)^{-2/\mu}\mu\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\operatorname{ch}\sigma)^{-2/\mu}\,d\sigma\right)^{-1}$. Общее ограниченное на R^m решение уравнения $\langle\omega, \partial h/\partial g\rangle = (\operatorname{th}\langle\lambda, g\rangle)\,h$ представляется формулой

$$h = (\operatorname{ch}\langle\lambda, g\rangle)^{(\lambda,\omega)^{-1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\operatorname{ch}(\langle\lambda, \omega\rangle\,\tau + \langle\lambda, g\rangle)]^{(\lambda,\omega)^{-1}}f(\omega\tau + g)\,d\tau, \tag{49}$$

где $f(g)$ — произвольная функция из пространства $C^1(R^m)$. Очевидно, второй сомножитель в (49) представляет собой первый интеграл системы $dg/dt = \omega$. Поэтому он равен некоторой функции от $m-1$ первых интегралов: $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1})$, $\varphi_i = \omega_i g_{i+1} - \omega_{i+1}g_i$, $i = \overline{1, m-1}$. Таким образом, формулу (49) можно заменить эквивалентной

$$h = (\operatorname{ch}\langle\lambda, g\rangle)^{(\lambda,\omega)^{-1}}F\left(\begin{vmatrix}\omega_1 & \omega_2\\ g_1 & g_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}\omega_2 & \omega_3\\ g_2 & g_3\end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix}\omega_{m-1} & \omega_m\\ g_{m-1} & g_m\end{vmatrix}\right), \tag{50}$$

где $F(\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_{m-1})$ — произвольная функция из пространства $C^1(R^{m-1})$. Для записи частного ограниченного на R^m решения уравнения (44) достаточно найти такую функцию $C(\nu) \in C^1(R)$, чтобы выполнялась оценка $|G_t(0, \nu)| \leqslant K\exp\{-|t|\}$, где

$$G_t(0, \nu) = \begin{cases}(\operatorname{ch}\nu)^{1/\mu}(\operatorname{ch}(\mu t - \nu))^{-1/\mu}C(\nu), & t \geqslant 0,\\ (\operatorname{ch}\nu)^{1/\mu}(\operatorname{ch}(\mu t - \nu))^{-1/\mu}(C(\nu) - 1), & t < 0.\end{cases} \tag{51}$$

Существование этой функции эквивалентно существованию функции $C(\nu) \in C^1(R)$, удовлетворяющей неравенствам

$$|C(\nu)| \leqslant K(\operatorname{ch}\nu)^{-1/\mu}\exp\{-\nu/\mu\}, \quad |C(\nu) - 1| \leqslant K(\operatorname{ch}\nu)^{-1/\mu}\exp\{\nu/\mu\}, \tag{52}$$

где постоянная K не зависит от ν. Рассмотрим два случая: 1) $\mu \geqslant 1$; 2) $0 < \mu < 1$. В первом случае в качестве функции $C(\nu)$ можно выбрать следующую: $C(\nu) = (2\operatorname{ch}\nu)^{-1}\exp\{-\nu\}$. Во втором случае рассмотрим сначала на плоскости (ν, y) область, определяемую неравенствами $-y_1(\nu) \leqslant y \leqslant y_1(\nu)$; $2 - y_2(\nu) \leqslant y \leqslant y_2(\nu)$, где

$$y_1(\nu) = K(\operatorname{ch}\nu)^{-1/\mu}\exp\{-\nu/\mu\}, \quad y_2(\nu) = 1 + K(\operatorname{ch}\nu)^{-1/\mu}\exp\{\nu/\mu\}. \tag{53}$$

Для существования функции $y = C(\nu)$, удовлетворяющей оценкам (52), необходимо и достаточно, чтобы графики функций $y = y_1(\nu)$, $y = 2 - y_2(\nu)$ не пересекались, т. е. $y_1(\nu) \geqslant 2 - y_2(\nu)$. Покажем, что при всех $\nu \in R$, $\mu \in]0, 1[$ имеет место неравенство

$$[(\operatorname{ch}\nu)^{-1}\exp\{-\nu\}]^{1/\mu} + [(\operatorname{ch}\nu)^{-1}\exp\{\nu\}]^{1/\mu} \geqslant 2. \tag{54}$$

С этой целью обозначим $x = (\operatorname{ch}\nu)^{-1}\exp\{-\nu\}$ и найдем наименьшее значение функции $f(x) = x^{1/\mu} + (2 - x)^{1/\mu}$ на промежутке $]0, 2[$: $\min\limits_{x\in]0,2[} f(x) = f(1) = 2$.

Учитывая обозначения (53), из неравенства (54) получаем $y_1(\nu) + y_2(\nu) - 2 \geqslant 2K - 1$. Отсюда видно, что выбор постоянной $K \geqslant 1/2$ обеспечивает непересекаемость графиков функций $y = y_1(\nu)$, $y = 2 - y_2(\nu)$, а значит, и возможность выбора функции $C(\nu)$, удовлетворяющей оценкам (52). Для конкретного нахождения функции $C(\nu)$ запишем матрицант расширенной системы уравнений

$$dh/dt = (\operatorname{th}(-\mu t + \nu))\,h, \quad dy/dt = -h - (\operatorname{th}(-\mu t + \nu))\,y. \tag{55}$$

Имеем

$$\tilde{\Omega}_0^t(\nu) = \begin{bmatrix} (\operatorname{ch}\nu)^{1/\mu}(\operatorname{ch}(\mu t - \nu))^{-1/\mu} & 0 \\ \omega(t, \nu, \mu) & (\operatorname{ch}\nu)^{-1/\mu}(\operatorname{ch}(\mu t - \nu))^{1/\mu} \end{bmatrix}, \tag{56}$$

где

$$\omega(t, \nu, \mu) = -(\operatorname{ch}(\mu t - \nu))^{1/\mu}(\operatorname{ch}\nu)^{1/\mu}\int_0^t (\operatorname{ch}(\mu\tau - \nu))^{-2/\mu}\,d\tau. \tag{57}$$

Поскольку заведомо известно, что система (55) э-дихотомична на R, то существует двумерный числовой вектор $\tilde{C} = \begin{pmatrix} C \\ C_2 \end{pmatrix}$ такой, что

$$\tilde{\Omega}_0^t(\nu)\,\tilde{C} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0, \quad \tilde{\Omega}_0^t(\nu)\begin{pmatrix} C - 1 \\ C_2 \end{pmatrix} \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0. \tag{58}$$

Учитывая структуру матрицанта (58), (57), условия (58) записываем в следующем виде:

$$\begin{gathered} (\operatorname{ch}(\mu t - \nu))^{1/\mu}\left(-(\operatorname{ch}\nu)^{1/\mu}\int_t (\operatorname{ch}(\mu\tau - \nu))^{-2/\mu}\,d\tau C + (\operatorname{ch}\nu)^{-1/\mu}C_2\right) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0, \\ (\operatorname{ch}(\mu t - \nu))^{1/\mu}\left(-(\operatorname{ch}\nu)^{1/\mu}\int_0^t (\operatorname{ch}(\mu\tau - \nu))^{-2/\mu}\,d\tau\,(C - 1) + (\operatorname{ch}\nu)^{-1/\mu}C_2\right) \to \\ \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0. \end{gathered} \tag{59}$$

Поскольку $\operatorname{ch}(\mu t - \nu) \xrightarrow[|t| \to \infty]{} \infty$, то из (59) следуют равенства

$$-(\operatorname{ch}\nu)^{1/\mu}\int_0^{+\infty} (\operatorname{ch}(\mu\tau - \nu))^{-2/\mu}\,d\tau C + (\operatorname{ch}\nu)^{-1/\mu}C_2 = 0,$$

$$(\operatorname{ch}\nu)^{1/\mu}\int_{-\infty}^0 (\operatorname{ch}(\mu\tau - \nu))^{-2/\mu}\,d\tau\,(C - 1) + (\operatorname{ch}\nu)^{-1/\mu}C_2 = 0.$$

Отсюда однозначно определяем $C(\nu)$:

$$C(\nu) = \int_\nu^\infty (\operatorname{ch}\sigma)^{-2/\mu}\,d\sigma\left(\int_{-\infty}^\infty (\operatorname{ch}\sigma)^{-2/\mu}\,d\sigma\right)^{-}. \tag{60}$$

Таким образом, учитывая равенства (50), (60), все ограниченные на R^m решения уравнения (44) при любых $\langle\lambda, \omega\rangle < 0$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{gathered} h = (\operatorname{ch}\langle\lambda, g\rangle)^{\langle\lambda,\omega\rangle^{-1}} F\left(\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} \omega_{m-1} & \omega_m \\ g_{m-1} & g_m \end{vmatrix}\right) + \\ + (\operatorname{ch}\langle\lambda, g\rangle)^{\langle\lambda,\omega\rangle^{-1}}\left(\int_{-\infty}^\infty [\operatorname{ch}(\langle\lambda, \omega\rangle\tau + \langle\lambda, g\rangle)]^{-\langle\lambda,\omega\rangle^{-1}} \times \right. \\ \times \int_{\langle\lambda,\omega\rangle\tau + \langle\lambda,g\rangle}^\infty (\operatorname{ch}\sigma)^{-2\langle\lambda,\omega\rangle}\,d\sigma\varphi(\omega\tau + g)\,d\tau - \int_t^\infty [\operatorname{ch}(\langle\lambda, \omega\rangle\tau + \langle\lambda, g\rangle)]^{-\langle\lambda,\omega\rangle^{-1}} \times \\ \left. \times \int_{-\infty}^{\langle\lambda,\omega\rangle\tau + \langle\lambda,g\rangle} (\operatorname{ch}\sigma)^{2/\langle\lambda,\omega\rangle}\,\sigma\varphi(\omega\tau + g)\,d\tau\right)\left(\int_{-\infty}^\infty (\operatorname{ch}\sigma)^{2/\langle\lambda,\omega\rangle}\,d\sigma\right)^{-1}. \end{gathered}$$

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1969.— 244 с.
2. *Митропольский Ю. А.* Об исследовании интегрального многообразия для системы нелинейных уравнений с переменными коэффициентами.— Укр. мат. журн., 1958, **10**, № 3, с. 270— 279.
3. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М. : Наука, 1973.— 512 с.
4. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантности тора при возмущении.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1970, **34**, № 6, с. 1219—1240.
5. *Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Экспоненциальная дихотомия инвариантного тора динамических систем.— Дифференц. уравнения, 1979, **15**, № 8, с. 1434—1443.
6. *Митропольский Ю. А., Кулик В. Л.* Ограниченные решения нелинейных систем дифференциальных уравнений.— Укр. мат. журн., 1984, **36**, № 6, с. 720—729.
7. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на римановых многообразиях отрицательной кривизны.— Тр. Мат. ин-та АН СССР , 1967, **90**, с. 1—210.
8. *Бронштейн И. У.* Слабая регулярность и функции Грина линейных расширений динамических систем.— Дифференц. уравнения, 1983, **19**, № 12, с. 2031—2038.
9. *Плисс В. А.* Множества линейных систем дифференциальных уравнений с равномерно ограниченными решениями.— Там же, 1980, **16**, № 9, с. 1599—1616.
10. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование линейных систем дифференциальных уравнений с помощью квадратичных форм.— Киев, 1982.— 44 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 82.10).
11. *Coppel W. A.* Dichotomies and Lyapunov functions.— J. Different. Equat., 1984, **52**, N 1, p. 58—65.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 18.04.85