УДК 519.21

Я. Ф. Виннишин

О суммировании независимых слабых случайных линейных операторов

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ — вероятностное пространство, X — сепарабельное гильбертово пространство над полем действительных чисел, $L_s(\Omega, X)$ и $L_w(\Omega, X)$ — пространства сильных и слабых случайных линейных операторов соответственно, $\mathscr{A}(\omega)$ и $\mathscr{B}(\omega)$ — два независимых слабых случайных линейных оператора, не являющихся сильными, т. е. $\mathscr{A}(\omega)$, $\mathscr{B}(\omega) \in L_w(\Omega, X) \setminus L_s(\Omega, X)$. Выясним, может ли сумма этих операторов быть сильным случайным оператором?

Как известно ([1, с. 12]), слабый случайный оператор $T(\omega)$ является сильным тогда и только тогда, когда $\forall x \in X \; P\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(T(\omega)x, e_k)^2 < \infty\right\} = 1$, где $\{e_k\}$ — ортонормированный базис в X. Поскольку $\mathscr{A}(\omega)$, $\mathscr{B}(\omega) \in L_w(\Omega, X) \setminus L_s(\Omega, X)$, то $\exists x, y \in X : P\{\Sigma(\mathscr{A}(\omega)x, e_k)^2 = \infty\} > 0$ и $P\{\Sigma(\mathscr{B}(\omega)y, e_k)^2 = \infty\} > 0$. Хотя x и y могут, вообще говоря, не совпадать, легко видеть, что по крайней мере для одного из трех элементов x, y, $x + y$ (обозначим его через z) $p_1 = P\{\Sigma(\mathscr{A}(\omega)z, e_k)^2 = \infty\} > 0$ и $p_2 = P\{\Sigma(\mathscr{B}(\omega)z, e_k)^2 = \infty\} > 0$. Если предположить, что $\mathscr{A}(\omega) + \mathscr{B}(\omega) \in L_s(\Omega, X)$, то $p_1 = p_2 = 1$. Действительно, если бы, например, $p_1 < 1$, то на множестве меры $p_2(1 - p_1)$ $\Sigma((\mathscr{A}(\omega) + \mathscr{B}(\omega))z, e_k)^2 = \infty$. Это множество тех ω, для которых $\Sigma(\mathscr{A}(\omega)z, e_k)^2 < \infty$ и $\Sigma(\mathscr{B}(\omega)z, e_k)^2 = \infty$, что следует из неравенства (выполняющегося почленно) $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)^2 \geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{b_k^2}{2} - a_k^2\right)$.

Покажем сначала, что при некоторых дополнительных условиях, наложенных на один из операторов, $(\mathscr{A}(\omega)+\mathscr{B}(\omega))\in L_w(\Omega, X)\setminus L_s(\Omega, X)$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathscr{A}(\omega)$, $\mathscr{B}(\omega)\in L_w(\Omega, X)\setminus L_s(\Omega, X)$ *независимы и в некотором ортонормированном базисе* $\{e_k\}$ *имеет место свойство* $\exists c>0\ \forall x\in X\ P\{(\mathscr{A}(\omega)x, e_k)\geqslant 0\}\geqslant c$. *Тогда* $\mathscr{A}(\omega)+\mathscr{B}(\omega)\in L_w(\Omega, X)\setminus L_s(\Omega, X)$.

Лемма 1. *Пусть* $\xi_n\geqslant 0$, $N=\{\omega:\Sigma\xi_n=\infty\}$, $P(N)>0$. *Тогда* $\forall\varepsilon>0$ $\exists M\in\mathscr{F}\exists 1=n_0<n_1<n_2<\ldots$ — *возрастающая неслучайная последовательность натуральных чисел,* $\exists\eta_n(\omega)$: $0\leqslant\eta_n\leqslant\xi_n$, $\eta_n=0$ *на* $\Omega\setminus M$, $\sum_{k=n_p}^{n_{p+1}-1}\eta_k=1$ *на* M, $p=0, 1, 2, \ldots$, $M\subset N$, $P(M)\geqslant(1-\varepsilon)P(N)$.

Доказательство. Легко видеть, что $\exists n_1$ $\exists M_1\subset N$: $P(M_1)\geqslant(1-\varepsilon/2)P(N)$, $\sum_{k=1}^{n_1-1}\xi_k\geqslant 1$ на M_1. Положим $\varphi_m=\xi_m/\left(\sum_{k=1}^{n_1-1}\xi_k\right)$ на M_1 и 0 на $\Omega\setminus M_1$, $m=\overline{1, n_1-1}$. Далее, $\exists n_2>n_1$ $\exists M_2\subset M_1: P(M_2)\geqslant\left(1-\frac{2}{3}\varepsilon\right)P(N)$ и $\sum_{k=n_1}^{n_2-1}\xi_k\geqslant 1$ на M_2. Для $m=\overline{n_1, n_2-1}$ положим $\varphi_m=\xi_m/\left(\sum_{k=n_1}^{n_2-1}\xi_k\right)$ на M_2 и 0 на $\Omega\setminus M_2$. Продолжая процесс таким образом, строим последовательность $\eta_m=\varphi_m\chi_M$, обладающую нужными свойствами, где $M=\bigcap_{k=1}^{\infty}M_k$ и $P(M)\geqslant(1-\varepsilon)P(N)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $(\Omega_1, \mathscr{F}_1, P_1)$ *и* $(\Omega_2, \mathscr{F}_2, P_2)$ — *два вероятностных пространства,* $(\Omega, \mathscr{F}, P)=(\Omega_1\times\Omega_2, \mathscr{F}_1\otimes\mathscr{F}_2, P_1\times P_2)$, ξ_n — *последовательность неотрицательных случайных величин на* $(\Omega_1, \mathscr{F}_1, P_1)$, $P_1\{\Sigma\xi_n=\infty\}=t>0$, C_k — *последовательность событий из* $\mathscr{F}_2$, *причем* $P_2(C_k)\geqslant c>0$. *Обозначим через* A *множество расходимости ряда* $\Sigma\xi_k\chi_{C_k}$, *т. е.* $A=\{\omega\in\Omega:\Sigma\xi_k\chi_{C_k}=\infty\}$. *Тогда* $P(A)\geqslant tc$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. $\gamma=P(A)<tc$. Для $\varepsilon>0$ выберем согласно лемме 1 последовательности n_k и η_n; $\sum_{k=n_p}^{n_{p+1}-1}\eta_k=1$ на M и $\eta_k=0$ на $\Omega\setminus M$, $P_1(M)\geqslant(1-\varepsilon)t$. Поскольку $P\{\omega:\Sigma\eta_k\chi_{C_k}=\infty\}\leqslant\gamma$, то $\forall\delta>0$ $\exists H: P\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k\chi_{C_k}\leqslant H\right\}\geqslant 1-\gamma-\delta$. В таком случае для произвольного натурального p

$$M\left(\sum_{k=1}^{n_p-1}\eta_k\chi_{C_k}\right)=\sum_{k=1}^{n_p-1}M\eta_k\cdot P_2(C_k)\geqslant c\sum_{k=1}^{n_p-1}M\eta_k=c\cdot M\left(\sum_{k=1}^{n_p-1}\eta_k\right)\geqslant(1-\varepsilon)ctp.$$

С другой стороны, $M\left(\sum_{k=1}^{n_p-1}\eta_k\chi_{C_k}\right)\leqslant H+p(\gamma+\delta)$. Следовательно, $(1-\varepsilon)ctp\leqslant H+p(\gamma+\delta)$, т. е. $p((1-\varepsilon)ct-\gamma-\delta)\leqslant H$. Но ε и δ могут быть выбраны первоначально такими, чтобы $(1-\varepsilon)ct-\gamma-\delta>0$ (ведь по предположению $ct>\gamma$). Это противоречит произвольности выбора натурального числа p. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Поскольку $P\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(\mathscr{B}(\omega)z, e_k)^2=\infty\right\}=1$, то либо $\sum_{k=1}^{\infty}((\mathscr{B}(\omega)z, e_k)^{+})^2=\infty$, либо $\sum_{k=1}^{\infty}((\mathscr{B}(\omega)z, e_k)^{-})^2=\infty$ с положительной вероятностью. Пусть $P\left\{\sum_{k=1}^{\infty}((\mathscr{B}(\omega)z,\ e_k)^+)^2=\infty\right\}=t>0$. Тогда $((\mathscr{A}(\omega)+\mathscr{B}(\omega))z,\ e_k)^2\geqslant((\mathscr{B}(\omega)z,\ e_k)^+)^2\chi_{C_k}$, где $C_k=\{\omega:(\mathscr{A}(\omega)(-z),\ e_k)\geqslant\geqslant 0\}$, $P(C_k)\geqslant c>0$. Доказательство теоремы получаем из леммы 2.

Следствие. *Если* $\mathscr{A}_t(\omega)$ — *гауссовский операторнозначный процесс с независимыми приращениями и при* t_0 $\mathscr{A}_{t_0}(\omega)\in L_w(\Omega,\ X)\setminus L_s(\Omega,\ X)$, *то* $\forall t\geqslant t_0$ $\mathscr{A}_t(\omega)\in L_w(\Omega,\ X)\setminus L_s(\Omega,\ X)$.

Доказательство. Имеет место представление $\mathscr{A}_t(\omega)=\tilde{\mathscr{A}}_t(\omega)+A_t$, где $\tilde{\mathscr{A}}_t(\omega)$ — гауссовский операторнозначный процесс с независимыми приращениями, обладающий тем дополнительным свойством, что $\forall x,\ y\in X: P\{(\mathscr{A}_t(\omega)x,\ y)\geqslant 0\}\geqslant 1/2$; $A_t=M\mathscr{A}_t(\omega)$, $A_t\in L(X)$. К процессу $\tilde{\mathscr{A}}_t(\omega)$ применима теорема 1. Следствие доказано.

Оказывается, что утверждение теоремы 1 справедливо без дополнительных условий, налагаемых на одно из слагаемых. Это позволяет, например, получить утверждение доказанного выше следствия для произвольных операторнозначных процессов с независимыми приращениями. Докажем сначала теорему для разности двух независимых одинаково распределенных операторов.

Теорема 2. *Пусть* $\mathscr{A}(\omega)$ *и* $\tilde{\mathscr{A}}(\omega)$ — *независимые одинаково распределенные случайные линейные операторы и* $\mathscr{A}(\omega)\in L_w(\Omega,\ X)\setminus L_s(\Omega,\ X)$. *Тогда* $(\mathscr{A}(\omega)-\tilde{\mathscr{A}}(\omega))\in L_w(\Omega,\ X)\setminus L_s(\Omega,\ X)$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. $(\mathscr{A}(\omega)-\tilde{\mathscr{A}}(\omega))\in\in L_s(\Omega,\ X)$. Тогда $\exists x_0\in X: P\{\Sigma(\mathscr{A}(\omega)x_0,\ e_k)^2=\infty\}>0$. Положим $\xi_k==(\mathscr{A}(\omega)x_0,\ e_k)$, $\tilde{\xi}_k(\tilde{\mathscr{A}}(\omega)x_0,\ e_k)$. Значит, $P\{\Sigma\xi_k^2=\infty\}>0$, $P\{\Sigma(\xi_k-\tilde{\xi}_k)^2<<\infty\}=1$. Обозначим через a_k медиану случайной величины ξ_k. Ряд $\Sigma(\xi_k-a_k)^2$ сходится с вероятностью 1, так как если бы, например, $t==P\{\Sigma((\xi_k-a_k)^+)^2=\infty\}>0$, то мера множества расходимости ряда $\Sigma(\xi_k-\tilde{\xi}_k)^2$ согласно утверждению леммы 2 была бы не меньше $t/2$, поскольку $(\xi_k-\tilde{\xi}_k)^2\geqslant((\xi_k-a_k)^+)^2\chi_{C_k}$, где $C_k=\{\omega:\tilde{\xi}_k-a_k\leqslant 0\}$, $P(C_k)\geqslant\geqslant 1/2$. Рассмотрим оператор $(\mathscr{B}(\omega)x,\ y)=(x,\ x_0)((\mathscr{A}(\omega)x_0,\ y)-(\eta,\ y))$, где η — гильбертовозначная случайная величина, $(\eta,\ e_k)=\xi_k-a_k$; $\mathscr{B}(\omega)\in\in L_w(\Omega,\ X)\setminus L_s(\Omega,\ X)$, поскольку $(x,\ x_0)(\eta,\ y)\in L_s(\Omega,\ X)$, $(x,\ x_0)(\mathscr{A}(\omega)x_0,\ y)\in\in L_w(\Omega,\ X)\setminus L_s(\Omega,\ X)$; $(\mathscr{B}(\omega)x,\ e_k)=(x,\ x_0)a_k$. Покажем, что $\Sigma a_k^2<\infty$. Для этого рассмотрим $y_n=\sum_{k=1}^{n}a_ke_k$. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2=\infty$. Тогда $\|y_n\|\to\infty$, $\|y_n\|>0$ при $n\geqslant N$, и можно рассмотреть последовательность

$$\varphi_n=\left(\mathscr{B}(\omega)\frac{x_0}{\|y_n\|^{1/2}},\quad \frac{y_n}{\|y_n\|^{3/2}}\right),\quad n\geqslant N.$$

Поскольку $\frac{x_0}{\|y_n\|^{1/2}}\to 0$, $\frac{y_n}{\|y_n\|^{3/2}}\to 0$, то последовательность φ_n сходится по вероятности к 0. В то же время

$$\varphi_n=\frac{1}{\|y_n\|^2}(\mathscr{B}(\omega)x_0,\ y_n)=\frac{\|x_0\|^2}{\|y_n\|^2}\sum_{k=1}^{n}a_k^2=\|x_0\|^2>0.$$

Следовательно, $\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2<\infty$. Но в таком случае $\mathscr{B}(\omega)$ — сильный случайный оператор, $(\mathscr{B}(\omega)x,\ y)=(x,\ x_0)(a,\ y)$, где $(a,\ e_k)=a_k$. Полученное противоречие доказывает справедливость теоремы.

Теорема 3. *Пусть* $\mathscr{A}(\omega)$, $\mathscr{B}(\omega)\in L_w(\Omega,\ X)\setminus L_s(\Omega,\ X)$ *и независимы. Тогда* $(\mathscr{A}(\omega)+\mathscr{B}(\omega))\in L_w(\Omega,\ X)\setminus L_s(\Omega,\ X)$.

Доказательство. Пусть $(\mathscr{A}(\omega)+\mathscr{B}(\omega)) \in L_s(\Omega, X)$. Тогда на вероятностном пространстве $(\Omega \times \Omega, \mathscr{F} \otimes \mathscr{F}, P \times P)$ можно рассмотреть оператор $(\mathscr{A}_1(\omega)+\mathscr{B}_1(\omega))-(\mathscr{A}_2(\omega)+\mathscr{B}_2(\omega))$, где $\mathscr{A}_1(\omega)$, $\mathscr{A}_2(\omega)$, $\mathscr{B}_1(\omega)$, $\mathscr{B}_2(\omega)$ независимы; $\mathscr{A}_1(\omega)$ и $\mathscr{A}_2(\omega)$ распределены так же, как и $\mathscr{A}(\omega)$; $\mathscr{B}_1(\omega)$ и $\mathscr{B}_2(\omega)$ распределены так же, как и $\mathscr{B}(\omega)$; $(\mathscr{A}_1(\omega)+\mathscr{B}_1(\omega))-(\mathscr{A}_2(\omega)+\mathscr{B}_2(\omega)) \in L_s(\Omega, X)$. Согласно теореме 2 $(\mathscr{A}_1(\omega)-\mathscr{A}_2(\omega)) \in L_w(\Omega, X) \setminus L_s(\Omega, X)$ и удовлетворяет условию теоремы 1, поскольку $\forall x, y \in X$ $((\mathscr{A}_1(\omega)-\mathscr{A}_2(\omega))x, y)$ — симметричная случайная величина. Поэтому $(\mathscr{A}_1(\omega)+\mathscr{B}_1(\omega))-(\mathscr{A}_2(\omega)+\mathscr{B}_2(\omega))=(\mathscr{A}_1(\omega)-\mathscr{A}_2(\omega))+(\mathscr{B}_1(\omega)-\mathscr{B}_2(\omega)) \in L_w(\Omega, X) \setminus L_s(\Omega, X)$. Полученное противоречие доказывает справедливость теоремы.

1. *Скороход А. В.* Случайные линейные операторы.— Киев : Наук. думка, 1978.— 200 с.
2. *Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л.* Интеграл, мера и производная : Общ. теория.—М.: Наука, 1967.— 220 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 17.12.84