УДК 517.5

Б. В. Винницкий

Об описании некоторых абсолютно представляющих систем

Пусть f — целая функция с тейлоровскими коэффициентами f_n, $\varkappa_n(f) = |f_{n-1}/f_n|$, $\mathcal{A}_R$ — пространство функций, аналитических в круге $\{z : |z| < R\}$, с обычной топологией, $\widehat{f}$ — мажоранта Ньютона (см. [1, 2]) функции f, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — множество различных комплексных чисел с единственной предельной точкой на ∞. Скажем, что $f \in P_R$, $0 < R \leqslant \infty$, если существует множество $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ такое, что система $\{f(\lambda_n z)\}_{n=1}^{\infty}$ будет абсолютно представляющей [3] в $\mathcal{A}_R$. Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Для того чтобы* $f \in P_\infty$ ($f \in P_R$, $0 < R < \infty$) *необходимо и достаточно, чтобы все* $f_n \neq 0$ *и*

$$\varlimsup_{n\to\infty} |\widehat{f}_n/f_n|^{1/n} < \infty \ (\lim_{n\to\infty} |\widehat{f}_n/f_n|^{1/n} = 1). \tag{1}$$

Если все $f_n \neq 0$ и выполняется (1), то (ср. с [4]) функции f и $\widehat{f}$ одновременно принадлежат или не принадлежат P_R, а так как $\varkappa_n(\widehat{f}) \uparrow \infty$, то $\widehat{f} \in P_R$ [5]. Поэтому достаточная часть теоремы 1 доказана. Далее, необходимость условия $f_n \neq 0$ очевидна, ибо это условие необходимо [6] для полноты системы $\{f(\lambda_n z)\}_{n=1}^{\infty}$. Пусть $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $\mu_f(r) = \max\{|f_n| r^n : n \geqslant 0\}$, $\mathcal{A}'_R[f]$ — множество целых функций g, удовлетворяющих условию $\varlimsup_{n\to\infty} |g_n/f_n|^{1/n} < R$. При доказательстве необходимости условия (1) используем следующее утверждение, вытекающее из результатов Ю. Ф. Коробейника (см. [3, 5]).

Лемма 1. *Для того чтобы система* $\{f(\lambda_n z)\}_{n=1}^{\infty}$ *была абсолютно представляющей в* $\mathcal{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$(\forall R_1 \in (0; R))(\exists R_2 \in (0; R))(\exists \mathcal{K}_1 \in (0; \infty))(\forall g \in \mathcal{A}'_R[f]) : \sup_{k\geqslant 0}\left\{\frac{|g_k|}{|f_k| R_2^k}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{K}_1 \sup_{n\geqslant 1}\left\{\frac{|g(\lambda_n)|}{M_f(R_1|\lambda_n|)}\right\}. \tag{2}$$

Из леммы 1 следует, что если $f \in P_R$, $0 < R \leqslant \infty$, то

$$(\forall R_1 \in (0; R))\,(\exists R_2 \in (0; R))\,(\exists \mathcal{K}_1 \in (0; \infty))\,(\forall g \in \mathscr{A}'_R[f]) : \sup_{k \geqslant 0} \left\{ \frac{|g_k|}{|f_k| R_2^k} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{K}_1 \sup_{r \geqslant 0} \left\{ \frac{M_g(r)}{M_f(R_1 r)} \right\}. \qquad (3)$$

Предположим, что $f \in P_R$, $0 < R < \infty$, однако (1) не выполняется, т. е. существуют число q, $1 < q < \infty$, и бесконечное множество $\{n_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ такие, что $\hat{f}_{n_k} > |f_{n_k}| q^{n_k}$ для всех $k \geqslant 0$. Поэтому (см. [2])

$$\mu_f(r) > \max_{k \geqslant 0} \{ |f_{n_k}| (rq)^{n_k} \}. \qquad (4)$$

Возьмем $R_1 \in (0; R)$ таким, чтобы при всех $R^* \in (R_1; R)$ выполнялось $R^* < qR_1$. Для любого $R_2 \in (0; R)$ найдем R^* такое, что $\max\{R_1; R_2\} < < R^* < R$. Положим $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{n_k} (R^* z)^{n_k}$. Тогда $g \in \mathscr{A}'_R[f]$ и в силу (4)

$$M_g(r) \leqslant \max_{k \geqslant 0} \{ |f_{n_k}| (qR_1 r)^{n_k} \} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{R^*}{qR_1} \right)^k \leqslant \mathcal{K}_2 M_f(R_1 r),$$

где $\mathcal{K}_2 < \infty$ — постоянная. Следовательно, $\sup_{r \geqslant 0} \{ M_g(r)/M_f(R_1 r) \} < \infty$. С другой стороны, $\sup_{n \geqslant 0} \{ |g_n| / f_n R_2^n | \} = \infty$, что противоречит (3). Поэтому в случае $0 < R < \infty$ теорема 1 доказана. Случай $R = \infty$ рассматривается аналогично.

Пусть f — фиксированная функция из класса P_R, $0 < R \leqslant \infty$. Скажем, что $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Lambda_f[P_R]$, если система $\{f(\lambda_n z)\}_{n=1}^{\infty}$ абсолютно представляющая в $\mathscr{A}_R$.

Теорема 2. *Пусть $f \in P_R$, $0 < R \leqslant \infty$. Тогда для того чтобы $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Lambda_f[P_R]$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$(\forall R_1 \in (0; R))\,(\exists R_0 \in (0; R))\,(\exists \mathcal{K} \in (0; \infty))\,(\forall g \in \mathscr{A}'_R[f]) : \sup_{r \geqslant 0} \left\{ \frac{M_g(r)}{M_f(R_0 r)} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{K} \sup_{n \geqslant 1} \left\{ \frac{|g(\lambda_n)|}{M_f(R_1 |\lambda_n|)} \right\}. \qquad (5)$$

Доказательство. Если $f \in P_R$, то условие (2) — это условие на множество $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$. Поэтому нам нужно показать, что условия (2) и (5) эквивалентны. Можем считать, что $\varkappa_n(f) \uparrow \infty$. Пусть выполняется (2) и $\sup_{n \geqslant 1} \{ |g(\lambda_n)| / M_f(R_1 |\lambda_n|) \} = \mathcal{K}_3$. Если $\mathcal{K}_3 = \infty$, то (5) очевидно. Если же $\mathcal{K}_3 < \infty$, то пусть $\mathcal{K}_4 = \mathcal{K}_1 \mathcal{K}_3$ и $R_0 \in (R_2; R)$. Из (2) получаем $|g_k| \leqslant \leqslant \mathcal{K}_4 |f_k| R_2^k$. Поэтому

$$M_g(r) \leqslant \mathcal{K}_4 M_f(R_0 r) \sum_{k=0}^{\infty} (R_2/R_0)^k.$$

Значит, $\sup_{r \geqslant 0} \{ M_g(r)/M_f(R_0 r) \} \leqslant \mathcal{K} \mathcal{K}_3$, где $\mathcal{K} < \infty$ не зависит от g, т. е. (5) верно. Обратно, пусть выполняется (5) и $R_2 \in (R_0; R)$. Тогда из неравенств Коши для всех $k \geqslant 0$ и $r > 0$ имеем $|g_k / R_2^k| \leqslant M_g(R_2^{-1} r)/r^k$. Учитывая справедливое для всех $r \geqslant 0$ и $\varepsilon > 0$ неравенство $M_f(r) \leqslant (1 + 1/\varepsilon) \times \times \mu_f((1 + \varepsilon) r)$ и равенство $\mu_f(\varkappa_n(f)) = |f_n| \varkappa_n^n(f)$, находим

$$|g_k / f_k R_2^k| \leqslant M_g(R_2^{-1} \varkappa_k(f)) / |f_k \varkappa_k^k(f)| = M_g(R_2^{-1} \varkappa_k(f)) / \mu_f(\varkappa_k(f)) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{r\geqslant 0}\left\{\frac{M_g(r)}{\mu_f(R_2r)}\right\}\leqslant \mathcal{K}_5\sup_{r\geqslant 0}\left\{\frac{M_g(r)}{M_f(R_0r)}\right\}.$$

Поэтому

$$(\forall\, R_0\in(0;R))\,(\exists\, R_2\in(0;R))\,(\exists\,\mathcal{K}_2\in(0;\infty))\,(\forall\, g\in\mathscr{A}'_R[f]):\sup_{k\geqslant 0}\left\{\frac{|g_k|}{|f_k|\,R_2^k}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{K}_2\sup_{r\geqslant 0}\{M_g(r)/M_f(R_0r)\}.$$

Отсюда и из (5) следует (2). Теорема 2 доказана.

Заметим, что если $f\in P_R$, то [2] множество $\mathscr{A}'_R[f]$ совпадает с множеством целых функций g, для которых существуют $R_1<R$ и $\mathcal{K}<\infty$ такие, что при всех $r\geqslant 0$ выполняется неравенство $M_g(r)\leqslant \mathcal{K}M_f(R_1r)$.

1. *Валирон Ж.* Аналитические функции.— М.: Гостехтеоретиздат, 1957.— 235 с.
2. *Винницкий Б. В.* Об условиях сходимости последовательностей в некоторых пространствах аналитических функций.— Укр. мат. журн., 1982, 4, № 6, с. 741—744.
3. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы.— Успехи мат. наук, 1981, **36**, вып. 1, с. 73—126.
4. *Альпер С. Я.* О полноте систем аналитических функций.— Докл. АН СССР, 1949, **66**, № 6, с. 1029—1032.
5. *Винницкий Б. В.* О рядах по системе $\{f(\lambda_n z)\}$.—Мат. заметки, 1981, **29**, № 4, с. 503—516.
6. *Винницкий Б. В.* О полноте системы $\{f(\lambda_n z)\}$.— Укр. мат. журн., 1984, **36**, № 5, с. 655—658.

Дрогобыч. пед. ин-т

Получено 13.11.84