УДК 517.5

Т. Н. Бусарова

Об оптимизации приближенного интегрирования быстро осциллирующих функций

Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_0^1 f(x)\sin m\pi x d = \sum_{k=0}^{n+1} p_k f(x_k) + R(f, X, P, m) \quad n \geqslant m \geqslant 1, \tag{1}$$

задаваемую при фиксированном $n = 1, 2, \ldots$ векторами узлов $X = \{x_k\}$, $0 = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n < x_{n+1} = 1$ и коэффициентов $P = \{p_k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n+1$.

В предположении, что задан класс функций $\mathfrak{M}$ из $C[0, 1]$, требуется найти величину

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}, m) = \inf_{X,P} R(\mathfrak{M}, X, P, m), \tag{2}$$

где $R(\mathfrak{M}, X, P, m) = \sup_{f\in\mathfrak{M}} |R(f, X, P, m)|$, и указать векторы $X^0 = \{x_k^0\}$ и $P^0 = \{p_k^0\}$, реализующие в (2) точную нижнюю грань.

Задача приближенного вычисления интегралов от быстро осциллирующих функций рассматривалась, например, в [1]. Порядковые оценки погрешности на некоторых классах функций получены в работах [2, 3]. Рассмотрим случай, в котором удается получить точный результат.

Пусть V_M— класс заданных на [0, 1] функций $f(x)$, полная вариация которых на [0, 1] не превышает числа M.

Оценку снизу для величины (2) при $\mathfrak{M} = V_M$ получим, следуя методу, изложенному в [4, с. 183]. Зафиксируем некоторый вектор узлов $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ и рассмотрим множество $V_M(X) = \{f : f \in V_M,\ f(x_k) = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n+1\}$. Ясно, что для любого вектора узлов X $V_M(X) \subset V_M$, а значит,

$$\mathcal{E}(V_M, m) \geqslant \mathcal{E}(V_M(X), m) = \inf_X \sup_{f\in V_M(X)} \left| \int_0^1 f(x)\sin m\pi x dx \right| = A_m^M. \tag{3}$$

Для вычисления величины A_m^M нам потребуется следующая лемма.

Лемма. *Пусть функция $g(t)$ суммируема на $[a, b]$, а $f(t)$ имеет на $[a, b]$ ограниченное изменение, причем $f(a) = f(b)$. Тогда*

$$\left| \int_a^b f(t) g(t)\, dt \right| \leqslant \frac{1}{2} \bigvee_a^b (f)\, \Omega(G; a, b),$$

где $G(t) = \int_a^t g(u)\, du$, $\Omega(G; a, b) = \max_{a\leqslant t\leqslant b} G(t) - \min_{a\leqslant t\leqslant b} G(t)$.

Полагая в дальнейшем $g(t)=\sin m\pi t$, введем обозначения: $G_i(t)=$ $=\int\limits_{x_i}^{t}\sin m\pi u du$, $x_i\leqslant t\leqslant x_{i+1}$, $\Omega_i(X)=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}\Omega_i(G_i;x_i,x_{i+1})=\max\limits_{x_i\leqslant t\leqslant x_{i+1}}G_i(t)-$ $-\min\limits_{x_i\leqslant t\leqslant x_{i+1}}G_i(t)$, $\Omega(X)=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}\Omega_i(X)$. На основании леммы имеем

$$\left|\int\limits_0^1 f(x)\sin m\pi x dx\right|\leqslant\sum_{i=0}^{n}\left|\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)\sin m\pi x dx\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\bigvee_{x_i}^{x_{i+1}}(f)\Omega_i(X)\leqslant\frac{1}{2}\bigvee_{0}^{1}(f)\Omega(X)\leqslant\frac{1}{2}M\Omega(X). \qquad (4)$$

Существует функция $f_X(x)\in V_M(X)$, для которой в (4) достигается равенство. Действительно, если

$$\Omega(X)=\max_{0\leqslant i\leqslant n}\Omega_i(X)=\int\limits_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\sin m\pi x|dx,\quad j/m\leqslant x_\nu<x_{\nu+1}\leqslant(j+1)/m,$$
$$j=0,1,2,\dots,m-1,$$

то полагаем $f_X(x)=M/2$ для $x_\nu<x<x_{\nu+1}$, $f_X(x)=0$ при $x\in[0,1]\setminus(x_\nu,x_{\nu+1})$. Если же

$$\Omega(X)=\max\left\{\int\limits_{x_\nu}^{j/m}|\sin m\pi x|dx,\ \int\limits_{j/m}^{x_{\nu+1}}|\sin m\pi x|dx\right\},\quad x_\nu<j/m<x_{\nu+1},$$
$$j=1,2,\dots,m-1,$$

то полагаем $f_X(x)=M/2$ для $y_\nu<x<y_{\nu+1}$, $f_X(x)=0$ при $x\in[0,1]\setminus(y_\nu,y_{\nu+1})$, где $(y_\nu,y_{\nu+1})$ — больший из интервалов $(x_\nu,j/m)$ и $(j/m,x_{\nu+1})$. Наконец, в случае, когда

$$\Omega(X)=\frac{2}{m\pi}=\int\limits_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\sin m\pi x|dx,\quad x_\nu\leqslant j/m<(j+p)/m\leqslant x_{\nu+1},$$
$$j=0,1,\dots,m-p,\quad 1\leqslant p\leqslant m-1,$$

$f_X(x)=M/2$ для $j/m<x<(j+1)/m$, $j=0,1,\dots,m-1$, $f_X(x)=0$ при $x\in[0,1]\setminus(j/m,(j+1)/m)$.

Таким образом, при фиксированном X, для любого вектора коэффициентов P

$$\sup_{f\in V_M(X)}\left|\int\limits_0^1 f(x)\sin m\pi x dx\right|=\left|\int\limits_0^1 f_X(x)\sin m\pi x dx\right|=\frac{M}{2}\Omega(X)$$

и, следовательно,

$$A_m^M=\frac{M}{2}\inf_X\Omega(X). \qquad (5)$$

Построим вектор узлов $X=X^0=\{0=x_0^0<x_1^0<\dots<x_{n+1}^0=1\}$, реализующий нижнюю грань в (5). Количество внутренних узлов n представим в виде $n=mq+k$, где $q=\left[\frac{n}{m}\right]$, $0\leqslant k\leqslant m-1$. На каждом интервале $(j/m,(j+1)/m)$, $j=0,1,2,\dots,m-1$ расположим q узлов $x_1^j,\dots,x_q^j$ так, чтобы выполнялись условия

$$\int\limits_{j/m}^{x_1^j}\sin m\pi x dx=\int\limits_{x_1^j}^{x_2^j}\sin m\pi x dx=\dots=\int\limits_{x_q^j}^{(j+1)/m}\sin m\pi x dx=\frac{2}{m\pi(q+1)}.$$

Этим мы разместим mq узлов. Если $0 < k \leqslant m-1$, то оставшиеся k узлов помещаем в точки j/m ($j = 1, 2, \ldots, k$). Перенумеровав узлы в порядке возрастания: $0 = x_0^0 < x_1^0 < \ldots < x_n^0 < x_{n+1}^0 = 1$, получим вектор X^0.

Пусть теперь $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ — произвольный вектор узлов и $X \neq X^0$. Обозначим через $q_j (j = 0, 1, \ldots, m-1)$ количество узлов вектора X внутри промежутка $(j/m, (j+1)/m)$. Для вектора X^0 это количество на каждом интервале $(j/m, (j+1)/m)$ равно q. Тогда в силу построения вектора X^0 и определения величины $\Omega(X)$ хотя бы на одном интервале $(j/m, (j+1)/m)$ будет выполняться неравенство $q_j \leqslant q$, а значит

$$\Omega(X) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} \Omega_i(X) \geqslant \max_{j/m \leqslant i \leqslant (j+1)/m} \Omega_i(X) \geqslant \Omega(X^0).$$

Таким образом,

$$A_m^M = \frac{M}{2}\Omega(X^0) = \frac{M}{m\pi(q+1)}.$$

Из (3) и (5) следует

$$\mathscr{E}(V_M, m) \geqslant \frac{M}{m\pi(q+1)}.$$

Чтобы оценить $\mathscr{E}(V_M, m)$ сверху, введем вектор коэффициентов $P^0 = \{p_0^0, p_1^0, \ldots, p_{n+1}^0\}$ таким образом: $p_i^0 = \int\limits_{t_i^0}^{t_{i+1}^0} \sin m\pi x dx$, $i = 0, 1, \ldots, n+1$, где $t_0^0 = x_0^0 = 0$, $t_{n+2}^0 = x_{n+1} = 1$, а $t_1^0, \ldots, t_{n+1}^0$ определены условиями

$$\left| \int\limits_{t_0^0}^{t_1^0} \sin m\pi x dx \right| = \left| \int\limits_{t_1^0}^{x_1^0} \sin m\pi x dx \right| = \left| \int\limits_{x_1^0}^{t_2^0} \sin m\pi x dx \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{t_2^0}^{x_2^0} \sin m\pi x dx \right| = \ldots = \left| \int\limits_{x_n^0}^{t_{n+1}^0} \sin m\pi x dx \right| = \left| \int\limits_{t_{n+1}^0}^{t_{n+2}^0} \sin m\pi x dx \right| =$$

$$= \frac{1}{m\pi(q+1)} = \frac{\Omega(X^0)}{2}.$$

Заметим, что $|p_0^0| = |p_{n+1}^0| = \dfrac{1}{m\pi(q+1)}$, $|p_i^0| = \dfrac{2}{m\pi(q+1)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int\limits_0^1 f(x) \sin m\pi x dx = \sum_{k=0}^{n+1} p_k^0 f(x_k^0) + R(f, X^0, P^0, m). \tag{6}$$

Для любой функции $f \in V_M$ имеем

$$|R(f, X^0, P^0, m)| = \left| \sum_{k=0}^{n+1} \int\limits_{t_k^0}^{t_{k+1}^0} [f(x) - f(x_k^0)] \sin m\pi x dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_{t_0^0}^{t_1^0} [f(x) - f(x_0^0)] \sin m\pi x dx \right| + \left| \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_k^0}^{t_{k+1}^0} [f(x) - f(x_k^0)] \sin m\pi x dx \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{t_{n+1}^0}^{t_{n+2}^0} [f(x) - f(x_{n+1}^0)] \sin m\pi x dx \right| = \mathscr{I}_1 + \mathscr{I}_2 + \mathscr{I}_3.$$

Если положить $c_k(f) = \bigvee_{t_k^0}^{x_k^0}(f)$, $k = 1, 2, \ldots, n+1$, $d_k(f) = \bigvee_{x_k^0}^{t_{k+1}^0}(f)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, то очевидно

$$\mathscr{I}_1 \leqslant \frac{\Omega(X^0)}{2} d_0(f), \quad \mathscr{I}_3 \leqslant \frac{\Omega(X^0)}{2} c_{n+1}(f).$$

Оценим $\mathscr{I}_2$. Если на промежутке (t_k^0, t_{k+1}^0), $k = 1, 2, \ldots, n$, $\sin m\pi x$ не меняет знака, то

$$\mathfrak{I}_k = \left| \int_{t_k^0}^{t_{k+1}^0} [f(x) - f(x_k^0)] \sin m\pi x dx \right| \leqslant \int_{t_k^0}^{x_k^0} |f(x) - f(x_k^0)| |\sin m\pi x| dx +$$

$$+ \int_{x_k^0}^{t_{k+1}^0} |f(x) - f(x_k^0)| |\sin m\pi x| dx \leqslant \frac{\Omega(X^0)}{2} [c_k(f) + d_k(f)].$$

Пусть на (t_k^0, t_{k+1}^0) $\sin m\pi x$ меняет знак в точке j/m. Если точка j/m входит в число узлов вектора X^0, т. е. $x_k^0 = j/m$, то $x_k^0 - t_k^0 = t_{k+1}^0 - x_k^0$ и

$$\mathfrak{I}_k \leqslant \frac{\Omega(X^0)}{2} [c_k(f) + d_k(f)].$$

В противном случае $t_k^0 = j/m \pm t_1^0$. Тогда, полагая для определенности $t_k^0 = j/m - t_1^0$ и $t_k' = j/m + t_1^0$, $c_k'(f) = \bigvee_{t_k^0}^{j/m}(f)$, $c_k''(f) = \bigvee_{j/m}^{t_k'}(f)$, $c_k'''(f) = \bigvee_{t_k'}^{x_k^0}(f)$, имеем

$$\mathfrak{I}_k \leqslant \left| \int_{t_k^0}^{t_k'} \left[f(x) - f\left(\frac{j}{m}\right)\right] \sin m\pi x dx \right| + \left| \int_{t_k'}^{x_k^0} [f(x) - f(x_k^0)] \sin m\pi x dx \right| +$$

$$+ \left| \int_{x_k^0}^{t_{k+1}^0} [f(x) - f(x_k^0)] \sin m\pi x dx \right| \leqslant \frac{\Omega(X^0)}{2} [c_k'(f) + c_k''(f) + c_k'''(f) + d_k(f)].$$

Объединяя полученные для $\mathfrak{I}_k$ оценки, находим

$$\mathscr{E}(V_M, m) \leqslant \sup_{f \in V_M} |R(f, X^0, P^0, m)| \leqslant \frac{\Omega(X^0)}{2} \bigvee_0^1 (f) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\Omega(X^0)}{2} M = \frac{M}{m\pi\left(\left[\frac{n}{m}\right] + 1\right)}.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема. *Справедливо равенство*

$$\mathscr{E}(V_M, m) = \sup_{f \in V_M} |R(f, X^0, P^0, m)| = \frac{M}{m\pi\left(\left[\frac{n}{m}\right] + 1\right)}, \tag{7}$$

где X^0 и P^0 — построенные выше векторы узлов и коэффициентов.

Замечание. Используя полученный результат, нетрудно по заданной погрешности ε определить наименьшее количество узлов n, при котором погрешность квадратурной формулы (6) для любой функции $f \in V_M$ не будет превышать ε.

Действительно, пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда при $n = \bar{n} = \left(\left[\frac{M}{m\pi\varepsilon} - 1\right] + 1\right) m$ (здесь $[\alpha]$ — целая часть числа α), правая часть (7) не превышает ε, причем никакая другая квадратурная формула вида (1) не обеспечит на множестве V_M заданную погрешность при меньшем количестве узлов.

1. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов.— М.: Наука, 1967.— 498 с.
2. *Задирака В. К.*, *Василенко С. С.* Оптимальные квадратурные формулы вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций из некоторых классов и их реализация на ЭВМ.— Киев, 1974.— 37 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т кибернетики; 74-17).
3. *Жилейкин Я. М.*, *Кукаркин А. Б.* Об оптимальном вычислении интегралов от быстроосциллирующих функций.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1978, 18, № 2, с. 294—301.
4. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы.— М.: Наука, 1974.— 224 с.

Днепропетр. ин-т инженеров ж.-д. трансп. Получено 26.06.84