УДК 519.21

В. В. КОРОЛЮК, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

Центральная предельная теорема для неоднородных процессов с независимыми приращениями с полумарковскими переключениями

Доказана центральная предельная теорема для неоднородных процессов с независимыми приращениями с полумарковскими переключениями с равномерно эргодической вложенной цепью Маркова.

Доведено центральну граничну теорему для неоднорідних процесів з незалежними приростами з напівмарковськими перемиканнями з рівномірно ергодичним вкладеним ланцюгом Маркова.

В работе [1] рассмотрена проблема применимости центральной предельной теоремы теории вероятностей к однородным процессам с независимыми приращениями с полумарковскими переключениями. Для неоднородных (по времени) процессов условия применимости центральной предельной теоремы усложняются, в частности, при выборе компенсирующего усредненного сноса.

1. Пусть задано семейство неоднородных процессов с независимыми приращениями $\mathcal{Y}(t, x)$, $\mathcal{Y}(0, x) \equiv 0$, независимых в совокупности при любом конечном наборе значений $x \in X$, с кумулянтами

$$\psi(t, iz, x) = \ln M \exp [iz\mathcal{Y}(t, x)] \tag{1}$$

непрерывно дифференцируемыми по t и дважды по z, так что при $z \to 0$

$$\psi(t, iz, x) = iz\Lambda_1(t, x) - z^2\Lambda_2(t, x) + o(z^2). \tag{2}$$

При этом

$$\Lambda_k(t, x) = \int_0^t \lambda_k(v, x)\, dv, \quad k = 1, 2. \tag{3}$$

В измеримом фазовом пространстве состояний $(X, \mathfrak{X})$ задан равномерно эргодический полумарковский процесс $\mathcal{X}(t)$ с полумарковским ядром [2]

$$Q(x, t, A) = \mathcal{P}\{\mathcal{X}_{n+1} \in A, \theta_{n+1} \leqslant t / \mathcal{X}_n = x\} = P(x, A)\, G_x(t), \tag{4}$$

$$P(x, A) = Q(x, +\infty, A) = \mathcal{P}\{\mathcal{X}_{n+1} \in A / \mathcal{X}_n = x\},$$

$$G_x(t) = Q(x, t, X) = \mathcal{P}\{\theta_{n+1} \leqslant t / \mathcal{X}_n = x\} = \mathcal{P}\{\theta_x \leqslant t\}.$$

Здесь $(\mathcal{X}_n, \theta_n;\ n \geqslant 0)$ — процесс марковского восстановления, порождающий полумарковский процесс $\mathcal{X}(t) = \mathcal{X}_{\nu(t)}$, $\nu(t) = \max\{n : \tau_n \leqslant t\}$, $\tau_n = \sum_1^n \theta_k$.

Введем обозначения: $\rho(A)$ — стационарное распределение вложенной цепи Маркова $(\mathcal{X}_n;\ n \geqslant 0)$, $\Pi a(x) = \int_X \rho(dx)\, a(x)\, \mathbf{1}$ — проектор в банаховом пространстве ограниченных измеримых функций, $(\mathbf{1} = \mathbf{1}(x) \equiv 1)$; $R_0 = [I - P + \Pi]^{-1} - \Pi$ — потенциал вложенной цепи Маркова [2] с оператором P, который порождает вероятности перехода $P(x, A)$; средние времена пребывания в состояниях $m(x) = \int_0^\infty \overline{G}_x(t)\, dt$, $\overline{G}_x(t) = 1 - G_x(t)$; усредненное распределение $\overline{G}(t) = \int_X \rho(dx)\, \overline{G}_x(t)$; стационарное среднее время пребывания $m = \int_0^\infty \overline{G}(t)\, dt = \int_X \rho(dx)\, m(x)$; стационарные семиинварианты

$$\lambda_k(s) = \int_X \rho(dx) \int_0^\infty \overline{G}_x(t)\, \lambda_k(s + t, x)\, dt, \quad k = 1, 2. \tag{5}$$

Определим усредненную интенсивность $\lambda(s)$ решением уравнения в свертках

$$\int_0^\infty \overline{G}(t)\,\lambda(s+t,x)\,dt=\lambda_1(s),\quad s\geqslant 0. \tag{6}$$

Применение теории интегральных уравнений в свертках на полуоси [3] дает представление решения уравнения (6) виде

$$\lambda(s)=\lambda_1(s)/m+\int_0^\infty \lambda_1(s+t)\,g_1(t)\,dt. \tag{7}$$

Функция $g_1(t)$ определяется своим преобразованием Лапласа по формуле

$$\widetilde{g}_1(\lambda)=\int_0^\infty e^{\lambda t}g_1(t)\,dt=[\widetilde{g}(\lambda)]^{-1}-m^{-1},$$

$$\widetilde{g}(\lambda)=\int_0^\infty e^{\lambda t}\overline{G}(t)\,dt,\quad \operatorname{Re}\lambda\leqslant\lambda_0\leqslant 0.$$

2. Введем теперь переключаемый процесс

$$\alpha_\varepsilon(s,t)=\sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon^2)}[\mathcal{Y}(s+\tau_k,\varkappa_{k-1})-\mathcal{Y}(s+\tau_{k-1},\mathcal{X}_{k-1})]+\mathcal{Y}(s+t/\varepsilon^2,$$
$$\mathcal{X}(t/\varepsilon^2))-\mathcal{Y}(s+\tau(t/\varepsilon^2),\ \mathcal{X}(t/\varepsilon^2)). \tag{8}$$

Здесь $\tau(t)=\tau_{\nu(t)}$, ε — малый параметр, по которому осуществляется предельный переход при $\varepsilon\to 0$.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:* 1) *вложенная цепь Маркова* $(\mathcal{X}_n;\ n\geqslant 0)$ *равномерно эргодическая со стационарным распределением* $\rho(dx)$; 2) *кумулянты* (1) *непрерывно дифференцируемы по* t *и дважды по* z, *так что имеют место соотношения* (2) *и* (3); 3) *конечны семиинварианты* (5), *а также определена при всех* $x\in X$ *функция*

$$\lambda_1^{(2)}(s,x)=\int_0^\infty G_x(dt)\left[\int_s^{s+t}\lambda_1^0(v,\ x)\,dv\right]^2, \tag{9}$$

с $\lambda_1^0(s,x)=\lambda_1(s,x)-\lambda(s)$; 4) *равномерно по* $x\in X$ *интегрируемы первые два момента распределений* $G_x(t)$.

Тогда конечномерные распределения центрированного процесса уклонений

$$\beta_\varepsilon(s,t)=\varepsilon\left[\alpha_\varepsilon(s,t)-\int_s^{s+t}\lambda(v)\,dv\right] \tag{10}$$

сходятся к конечномерным распределениям диффузионного процесса с независимыми приращениями с дисперсией $\sigma^2(s)$, *которая вычисляется по формулам*

$$\sigma^2(s)=m^{-1}[\widehat{\lambda}_2(s)+\widetilde{\lambda}_1^{(2)}(s)+2\widetilde{\lambda}_1(s)],$$
$$\widetilde{\lambda}_1(s)=\int_X\rho(dx)\,\widetilde{\lambda}_1^0(s,x)\,[R_0-I]\,\widetilde{\lambda}_1^0(s,x),$$
$$\widetilde{\lambda}_1^0(s,x)=\int_0^\infty\overline{G}_x(t)\,\lambda_1^0(s+t,x)\,dt, \tag{11}$$
$$\widetilde{\lambda}_1^{(2)}(s)=\int_X\rho(dx)\,\lambda_1^{(2)}(s,x).$$

3. Доказательство теоремы основано на применении предельной теоремы обращения сингулярно возмущенных операторов [4] к уравнению марковского восстановления, которому удовлетворяет производящая функция центрированного процесса уклонений (10)

$$U_\varepsilon(x, s, \lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda t} M\{\exp[iz\beta_\varepsilon(s, t)]/\mathcal{X}_0 = x\}\, dt. \tag{12}$$

Лемма 1. *Производящая функция* (12) *определяется решением уравнения*

$$[I - G_\varepsilon]\, u_\varepsilon = \varepsilon^2 d_\varepsilon. \tag{13}$$

Здесь

$$G_\varepsilon U(x, s) = \int_0^\infty e^{\varepsilon^2\lambda t} G_x(dt) \exp[\varphi_\varepsilon(s, t)]\, PU(x, s + \varepsilon^2 t), \tag{14}$$

$$\varphi_\varepsilon(s, t) = \psi(s + t, iz\varepsilon, x) - \psi(s, iz\varepsilon, x) - iz\varepsilon \int_s^{s+t} \lambda(v)\, dv, \tag{15}$$

$$d_\varepsilon = \int_0^\infty e^{\varepsilon^2\lambda t} \overline{G}_x(t) \exp[\varphi_\varepsilon(s, t)]\, dt. \tag{16}$$

Утверждение леммы получается стандартным приемом с использованием момента первого скачка полумарковского процесса и последующим применением преобразования Лапласа по t.

Далее осуществляется асимптотическое представление оператора G_ε и свободного члена d_ε.

Лемма 2. *В условиях теоремы имеют место асимптотические представления*

$$G_\varepsilon U = [I + \varepsilon iz\widetilde{\lambda}_1^0(s, x) + \varepsilon^2 G_2]\, PU + o(\varepsilon^2), \tag{17}$$

$$G_2 U(x, s) = m(x)[\lambda + d/ds - z^2\sigma_0^2(s, x)/2]\, U(x, s), \tag{18}$$

$$\sigma_0^2(s, x) = \lambda_1^{(2)}(s, x) + \int_0^\infty \overline{G}_x(t)\, \lambda_2(s + t, x)\, dt,$$

$$d_\varepsilon = m(x) + o_\varepsilon(1). \tag{19}$$

Для доказательства леммы 2 следует воспользоваться асимптотическим представлением кумулянт (2) и формулой Тейлора для экспоненты в (14) и функции $U(x, s + \varepsilon^2 t)$ по второй переменной. Для обоснования остаточных членов в (17) и (19) используются условия теоремы.

Из определения усредненной интенсивности $\lambda(s)$ в (6) с учетом (11) легко убедиться, что выполнено условие баланса

$$\int_X \rho(dx)\, \widetilde{\lambda}_1^0(s, x) = 0. \tag{20}$$

Теперь можно воспользоваться предельной теоремой обращения [4, с. 90] в виде

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 [I - P - \varepsilon iz\widehat{\lambda}_1^0 P - \varepsilon^2 G_2 P + o(\varepsilon^2)]^{-1} = -G^{-1}\Pi. \tag{21}$$

Предельный оператор G определяется формулой

$$G = \Pi G_2 \Pi - z^2 \Pi \widetilde{\lambda}_1^0 [R_0 - I]\, \widetilde{\lambda}_1^0 \Pi. \tag{22}$$

Вычисления в (22) с учетом (18) и (11) дают

$$GU(s) = m[\lambda + d/ds - z^2\sigma^2(s)/2]\, U(s). \tag{23}$$

Лемма 3. *Производящая функция*

$$U(s,\lambda)=\int_0^\infty e^{\lambda t}M\exp[iz(\zeta(s+t)-\zeta(s))]\,dt \tag{24}$$

диффузионного процесса с независимыми приращениями $\zeta(t)$ с дисперсией

$$M[\zeta(s+t)-\zeta(s)]^2=\int_s^{s+t}\sigma^2(v)\,dv \tag{25}$$

определяется решением уравнения

$$dU(s,\lambda)/ds+(\lambda-z^2\sigma^2(s)/2U(s,\lambda)=-1 \tag{26}$$

с граничным условием

$$\lim_{s\to+\infty}U(s,\lambda)=0. \tag{27}$$

Доказательство леммы легко получить дифференцированием по s выражения

$$U(s,\lambda)=\int_0^\infty \exp\Big[\lambda t-z^2\int_s^{s+t}\sigma^2(v)\,dv/2\Big]\,dt \tag{28}$$

с последующим применением формулы интегрирования по частям (при $\operatorname{Re}\lambda\leqslant\lambda_0<0$).

По схеме, приведенной в работе [5], устанавливается компактность семейства характеристических функций $\tilde{U}_\varepsilon(x,\ s,\ t)=M\{\exp[iz\beta_\varepsilon(s,t)]/$ $/\varkappa_0=x\}$ при $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, так что сходимость при $\varepsilon\to 0$ производящих функций (12) к производящим функциям (24) влечет сходимость конечномерных распределений переключаемого центрированного процесса (10) к конечномерным распределениям диффузионного процесса с производящей функцией (24), определяемой решением уравнения (26) с условием (27).

1. *Королюк В. С., Королюк В. В.* Центральная предельная теорема для однородных процессов с независимыми приращениями с полумарковскими переключениями // Укр. мат. журн.— 1983.— 35, № 6.— С. 760—763.
2. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения.— Киев: Наук. думка, 1976.— 182 с.
3. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // Успехи мат. наук.— 1958.— 13, вып. 5.— С. 3—120.
4. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем.— Киев : Наук. думка, 1978.— 218 с.
5. *Королюк В. В.* Стохастические системы с полумарковскими переключениями.— Киев, 1983.— 38 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т кибернетики, № 35).

Получено 04.07.90